1. Доколлоквиумная часть

Здесь только формулировки и кое-где минимальные схемы доказательства.

Интегральное исчисление

1. Линейность (определённого) интеграла и формула интегрирования по частям.

   Линейность – $\alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g = \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$.

   Формула интегрирования по частям – $\int\limits_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int\limits_a^b gf'$.

2. Замена переменной в определённом интеграле. Примеры.

   $f \in C\langle a, b\rangle, \varphi \in C\langle \alpha, \beta\rangle, \varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$

   $p, q \in \langle \alpha, \beta\rangle$

   Тогда

   $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$.

   Пример: $\int\limits_2^3 \frac{tdt}{1+t^4}$ (замена $x = t^2, dx = 2tdt$).

3. Вычисление $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

   Дважды взять по частям и свести к рекуррентной формуле $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

   Ответ: $W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$, $W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

4. Формула Валлиса.

   Валлис говорит, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   Вкратце, доказывается через $\cos^n x \le \cos^{n-1} x \le \cos^{n-2} x$ и интегрированием этого ~~добра~~ неравенства.

5. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

   $f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle, x, x_0 \in \langle a, b\rangle$.

   Тогда

   $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

   Доказывается по индукции (база – Ньютон-Лейбниц, переход по частям).

6. Иррациональность числа π.

   Этот билет предполагался как чисто доказательный. Всё же стоит написать, что у нас была теорема Ламберта о том, что π и π^2 иррациональны.

   Для доказательства вводились числа $H_j = \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx$ и доказывалось, что существует многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$. Кроме того, $n^j H_j \to 0$ при $j \to \infty$, а значит, если $\pi^2 = \frac{m}{n}$, то совместно с предыдущим получается всё плохо.

7. Равномерная непрерывность функций. Равномерная непрерывность функций с ограниченной производной. Теорема Кантора.

   $f : E \to \mathbb{R}$ – равномерно непрерывна, если $\forall\varepsilon\exists\delta\forall x, y\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Понятно, что из этого следует непрерывность во всех точках.

   $f : E \to \mathbb{R}$ – липшициева (с константой M), если $\forall x, y \in E\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Понятно, что из этого следует равномерная непрерывность ($\delta = \frac{\varepsilon}{M}$).

   Если функция имеет ограниченную проихзводную, то она липшициева, а значит, равномерно непрерывна.

   Теорема Кантора говорит, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна там.

8. Модуль непрерывности. Свойства.

   $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$ – модуль непрерывности функции f. Свойства: Неотрицательный, монотонно неубывает, $\omega_f(0) = 0$. Ещё: если f – липшициева (с константой M), то $\omega_f(\delta) \leq M\delta$. Равномерная непрерывность равносильна непрерывности модуля непрерывности в нуле. Если $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, то $f \in C[a; b] \Leftrightarrow \omega_f \to 0$.

9. Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

   Дробление отрезка – понятно, что. Ранг – макимальная длина. Оснащение – множество точек ξ_i в отрезках дробления (по одному в каждом).

   Сумма Римана (интегральная сумма): $S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

   Теорема (об интегральных суммах): $f \in C[a; b] \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$.

10. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману. Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

    Видимо, в первой части билета надо сказать, что из предыдущей теоремы следует, что если $|\tau| \to 0$, то всё это дело сходится к интегралу.

    Во второй надо сказать, что если $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и $\forall\varepsilon\exists\delta$, что для любого дробления τ мелкости $< \delta$ и любого оснащения ξ выполняется $|I - S(f, \tau, \xi)|$, то f интегрируема по Риману на $[a; b]$. I тогда – интеграл Римана.

    В третьей части билета говорим, что $(\frac{n}{2})^{p+1} < S_p < n^{p+1}$, а предел их отношения равен интегральной сумме функции $f(x) = x^p$ на $[0; 1]$, откуда сумма сходится к $\frac{1}{p+1}$ (или $+\infty$ при $p = -1$).

11. Формула трапеций.

    $\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$.

    А милейший СГ уверен также в верности константы 12 вместо 8.

12. Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

    $f \in C^2[m; n], m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда

    $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\})dt$.

13. Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^{n} k^p$ при различных p. Постоянная Эйлера.

    Расписывается через формулу Эйлера-Маклорена. Забивается константа, получается, что при $p \in (-1; 1)$ выполняется $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$.

    При $p > 1$ интеграл оценивается как $\mathcal{O}(n^{p-1})$, это и подставляется вместо последнего члена предыдущего.

    При $p = -1$ также расписываем по формуле Эйлера-Маклорена. Получаем $\ln n+$ что-то похожее на $\frac{1}{2} + a_n$. Вот a_n там монотонно возрастает и ограничена, а предел (с $\frac{1}{2}$) равен γ – постоянная Эйлера.

14. Формула Стирлинга.

    $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

15. Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

    Определение – ну предел собственных. Если предел конечен, то интеграл сходится. Иначе расходится.

    Критерий Коши: $\int\limits_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon\exists c\in(a,b):\quad \forall x,y\in(c,b)\quad \left|\int\limits_c^d f\right| < \varepsilon$.

    Пример: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

16. Свойства несобственных интегралов.

    Аддитивность, линейность, монотонность. $\int\limits_c^b f \to 0$ при $c\to b$.

    Можно брать по частям и заменять переменные.

    А когда-то это был один из жёстких билетов, лол.

17. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

    Сходимость равносильна ограниченности первообразной. Признак сравнения в представлении не нуждается.

    Следствия: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ при $\varepsilon > 0$ сходятся и расходятся понятно где.

    Признак эквивалентности (для знакопостоянных функций!).

18. Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

    Абсолютная сходимость – это сходимость модуля. Из неё следует сходимость условная, но не наоборот. Признак Дирихле: $\int_a^{+\infty} fg$ сходится, если (но не только если):

    (1) $\left|\int\limits_a^y f\right|$ ограничен.

    (2) g монотонна.

    (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

19. Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$.

    Признак Абеля: $\int_a^{+\infty} fg$ сходится, если (но не только если):

    (1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

    (2) $|g(x)|$ ограничен.

    (3) g монотонна.

    Также есть такая тема: если f периодична, а g монотонна и стремится к нулю на бесконечности, при этом её интеграл абсолютно расходится, то сходимость $\int\limits_a^{+\infty} fg$ равносильна тому, что интеграл по периоду равен нулю. Из этого сразу всё понятно про $\frac{\sin x}{x^p}$. Там только кое-где нужен критерий Коши.

Метрические и нормированные пространства

20. Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

    $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство, если $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, и выполняется:

    (1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
    (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
    (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

    Примеры: $\mathbb{R}^d$, тривиальное 1 если $x \neq y$, Матхэттенская метрика, Французская железнодорожная метрика.

    Открытый шар $B_p(x)$ и замкнутый $\overline{B_p}(x)$ – понятно, что.

21. Открытые и замкнутые множества. Опеределения и свойства.

    $A \subset X$, a – внутренняя точка, если лежит вместе с каким-то шаром. A – открытое множество, если все его точки внутренние.

    Свойства: пустое множество и X – открытые множества. Бесконечное объединение открытых открыто. Конечное пересечение открытых открыто. Открытый шар (surprise, surprise!) открыт.

    $B \subset X$ – замкнутое множество, если его дополнение открыто.

    Свойства: пустое множество, X – замкнутые множества. Бесконечное пересечение замкнутых замкнуто. Конечное объединение замкнутых замкнуто. Замкнутый шар (surprise, surprise!) замкнут.

22. Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

    $\operatorname{int} A$ – внутренность множества A, множество всех его внутренних точек.

    Свойства: $\operatorname{int} A \subset A$, $\operatorname{int} A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, $\operatorname{int} A$ – открытое множество, $\operatorname{int} A = A \Leftrightarrow A$ – открыто.

    Также: $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int} A$.

23. Замыкание множества, связь со внутренностью. Свойства.

    $\operatorname{Cl} A$ – замыкание множества A, пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

    Есть теорема, что $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.

    Свойства: $A \subset \operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Cl} A$ замкнуто, $\operatorname{Cl} A = A \Leftrightarrow A$ – замкнуто.

    Также: $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$, $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$, $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

    Кроме того, $a \in \operatorname{Cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(a) \cup A \neq \varnothing$. И если $U \cup A = \varnothing$ и U – открытое множество, то $U \cup \operatorname{Cl} A = \varnothing$.

24. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

    $\mathring{B}_r(a)$ – проколотая окрестность точки a.

    a – предельная точка A, если $\forall r > 0 \;\; A \cup \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

    A' – множество всех предельных точек A.

    Свойства: $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$, $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$, $(A \cup B)' = A' \cup B'$, A – замкнуто $\Leftrightarrow A' \subset A$, $a \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \;\; B_r(a)$ содержит бесконечно много точек из A.

25. Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве подпространстве.

    $Y \subset X, \tilde{\rho} = \rho|_{Y \times Y}$. Тогда $\tilde{\rho}$ – индуцированная метрика, Y – подпространство.

    A – открыто в Y равносильно тому, что $\exists\, G$ – открытое в X – множество, что $A = G \cap Y$. То же верно и про замкнутые множества.

26. Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши-Буняковского.

    X – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Норма: $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – функция, обладающая следующими свойствами:

(1) $||x|| \geq 0$ и $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Примеры: $\mathbb{R}^d$: максмимум модулей, сумма модулей, расстояние до центра координат. $C[a;b]$: $||f|| = \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$.

Свойства нормы: $\rho(x,y) = ||x - y||$ – метрика, $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$.

Скалярное произведение: $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

(3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (в $\mathbb{C}$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$).

Примеры: в $\mathbb{R}^d$ сумма произведений координат, взвешенных произведений координат. $C[a;b] : \langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Свойства: $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$. Также $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Доказывается возведением в квадрат $\langle x + ty, x + ty \rangle$.

27. Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и свойства.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$.

E – ограниченное множество, если содержится в некотором шаре.

Свойства: единственность, $\lim\limits_{n \to \infty} = a \Leftrightarrow \rho(x_n, a) \to 0$, ограниченность последовательности, имеющей предел, если a – предельная точка A, то можно выбрать $x_n \subset A \to a$, даже $\rho(x_n, a) \searrow$.

28. Арифметические свойства пределов последовательностей векторов. Покоординатная сходимость.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = a + b$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n x_n = \lambda a$.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n = ab$.

(4) $||x_n|| \to ||a||$.

(5) Если есть скалярное произведение, то $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle$.

В $\mathbb{R}^d$ покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

29. Покрытия. Компактность. Компактные множества. Компактность в пространстве и подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

$U_\alpha \subset X$. U – покрытие, если $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$.

$K \subset X$ – компакт, если из любого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Компактность в пространстве и подпространстве равносильны.

Компактные множества замкнуты и ограничены. Отсюда, $\tilde{K} \subset K, \tilde{K}$ – замкнуто $\Rightarrow \tilde{K}$ – компакт.

30. Теорема о пересечении семества компактов. Следствие о вложенных компактах.

    Если K_α – семейство компактов и любой их конечный набор имеет непустое пересечение, то $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha$ непусто.

    Следствие. Если $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset$ – непустые компакты, то их пересечение непусто (и компактно, конечно же).

31. Теорема о вложенных параллелепипедах. Теорема Гейне-Бореля.

    Здесь про $\mathbb{R}^d$.

    Замкнутый параллелепипед – декартово произведение координатных отрезков. Открытый – декартово произведение координатных интервалов.

    Теорема о вложенных параллелепипедах: $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ – замкнутые параллелепипеды $\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$.

    Теорема Гейне-Бореля: замкнутый куб в $\mathbb{R}^d$ компактен. Надо бить стороны пополам, стало быть.

32. Секвенциальная компактность. Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$.

    Теорема: в $\mathbb{R}^d$ следующие условия равносильны:

    (1) K – компакт.

    (2) K – замкнуто и ограничено.

    (3) Из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из K.

    Последнее свойство называется секвенциальной компактностью. И в произвольном метрическом пространстве равносильно обычной компактности. (2) $\Rightarrow$ (1) же в произвольном пространстве не верно.

33. Следствия секвенциальной компактности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

    Если $K \subset \mathbb{R}^d$ – компакт, то всякое бесконечное множество точек из K имеет предельные точки в K.

    Теорема Больцано-Вейерштрасса: из ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

34. Фундаментальные последовательности. Полнота $\mathbb{R}^m$. Полнота компактных метрических пространств.

    Последовательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Метрическое пространство полно, если любая фундаментальная последовательность сходится.

    Фундаментальная последовательность ограничена, поэтому $\mathbb{R}^d$ – полное, и если K – компакт, то $(K, \rho|_K)$ – полное.

2. Послеколлоквиумная часть

35. Определения предела по Коши и по Гейне. Критерий Коши.

    X, Y – метрические пространства, $f : E \to Y$, $E \subset X$, a – предельная точка E.

    Определение по Коши: $A = \lim\limits_{x \to a} f$, если $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall a \neq x \in E$ и $\rho_X(x, a) < \delta\ \ \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$.

    Определение по Гейне: $\forall x_n \in E \backslash \{a\}$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \text{A}$.

    Они равносильны.

    Доказательство. Коши $\Rightarrow$ Гейне: $\rho(x_n, a) \to 0$ и это всё решает.

    Гейне $\Rightarrow$ Коши: Если для ε не нашлось δ, то можно построить последовательность, не стремящуюся к $f(a)$. □

Если следствие: предел функции единственен (т.к. единственен предел последовательности).

Есть теорема об арифметических действиях с пределами, не представляющая в силу определения по Гейне никакой ценности.

Есть теорема о том, что имеющая предел функция в какой-то окрестности ограничена.

Критерий Коши. Если Y – полное, то существование предела равносильно такому утверждению: $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x, y \in E \setminus \{a\}\ \ x, y \in B_\delta(a) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Доказательство. $\Rightarrow$ состоит в суммировании двух неравенств пределов.

$\Leftarrow$ проверять по Гейне: $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность, поэтому сходится (Y – полное!). Если у двух последовательностей оказались разные пределы, смешать их и выбрать сходящуюся подпоследовательность понятно куда. □

36. Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

    $f : E \to Y$ непрерывна в a, если a – изолированная либо a – предельная и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

    Пусть $f : E \to Y$ непрерывна в точке a и $g : \tilde{E} \to Z$ ($\tilde{E} \supset f(E)$) непрерывна в точке $f(a)$. Тогда хоть по Гейне, хоть по Коши, хоть по чему выходит, что $g \circ f$ непрерывна в точке a.

    Пусть $f : X \to Y$. Тогда f непрерывна на X равносильно тому, что прообраз любого открытого множества открыт.

    Доказательство. $\Rightarrow$. Берём $a \in V := f^{-1}(U)$. Тогда $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U \Rightarrow B_\delta(a) \subset V$, откуда a – внутренняя, чего и вам желаю.

    $\Leftarrow$. Проверяем непрерывность в a. $U := B_\varepsilon(f(a))$, $a \in f^{-1}(U)$ – открытом множестве, значит, $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(a)$. □

37. Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

    Непрерывный образ компакта – компакт. Так как прообраз открытого открыт, мы справимся выбрать подпокрытие. Ну и как следствие – замкнут и ограничен.

    Теорема Вейерштрасса: $f : (K \subset X) \to \mathbb{R}$ непрерывна, следовательно, $\exists u, v \in K$ такие, что $\forall x \in K\ \ f(u) \le f(x) \le f(v)$. Доказывается: ищем супремум и инфинум; пусть они ни лежат в образе, но тогда они предельные точки, следовательно, лежат в замыкании, а $f(K)$ замкнуто, противоречие.

    Обратное отображение к непрерывной биекции из компакта таки непрерывно. Доказывается: покажем, что прообраз открытого открыт. Помним, что f – биекция. Тогда $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$. $X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта $\Rightarrow f(X \setminus U)$ – компакт, поэтому замкнуто $\Rightarrow f(U)$ – открыто, чего и вам желаю.

38. Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

    Равномерная непрерывность – это как в обычных функциях. Для всех ε ищем δ такую, что если x и y отличаются не больше чем на δ, то $f(x)$ и $f(y)$ отличаются не больше чем на ε.

    Теорема Кантора – это непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна там. Доказывается: $\delta = \frac{1}{n}$, выбрать точки x_n и y_n, выбрать сходящиеся подпоследовательности, их пределы обязательно равны (a) лежат в K, воспользоваться непрерывностью в a.

39. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^m$.

    Нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$, т.ч. $\forall x\ \ C_1 ||x|| \le |||x||| \le C_2 ||x||$. Имеется ввиду, что сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

    Любые две нормы в $\mathbb{R}^m$ эквивалентны. Доказательство придётся написать.

Доказательство. $||x||$ – стандартная норма, $p(x)$ – другая. e_k – станадартный базис.

$$p(x-y) = p\left(\sum_{k=1}^{d}(x_k-y_k)e_k\right) \le \sum_{k=1}^{d} p((x_k-y_k)e_k) = \sum_{k=1}^{d}|x_k-y_k|p(e_k)$$
$$\underset{\text{Коши-Буняковский}}{\le} \left(\sum_{k=1}^{d}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{d}p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C||x-y||$$

□

Так как вместо $x-y$ можно было взять просто x, то уже норм доказали правое неравенство. А ещё после этого легко проверить, что $p(x)$ – непрерывная функция.

Для левого неравенства: p достигает на единичной сфере (компакт, а p – непрерывна) минимального значения, оно ненулевое и неотрицательное, далее $p(x) = p(\frac{x}{||x||} \cdot ||x||) = ||x|| \cdot p(\frac{x}{||x||}) \ge ||x|| \cdot D$, что и требовалось.

40. Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

    X, Y – метрические пространства.

    Линейный оператор $A : X \to Y$ – это когда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

    Свойства. $A(0) = 0$, $A\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k A(x_k)$.

    Линейные операторы можно складывать и умножать на числа.

    Композиция линейных операторов таки линейна, обратный оператор существует, если единственен, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$. И вообще группа относительно композиции.

    С матричной записью дорогие читатели, готовившиеся к коллоквиуму по алгебре (нет), справятся.

41. Норма линейного оператора. Простейшие свойства.

    $A : X \to Y$, X, Y – нормированные.

    Норма $||A|| := \sup\limits_{||x|| \le 1}||Ax||$. Если не ∞, то оператор ограничен (что совсем не то же, что ограниченное отображение, лол).

    Свойства: $||A+B|| \le ||A|| + ||B||$, $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Получается, что указанная норма является нормой в пространстве ограниченных линейных операторов.

    Свойства как-то вообще просто доказываются.

42. Эквивалентные определения нормы оператора.

    По всей видимости, здесь обсуждаются линейные операторы. Короче, тут тема такая:

$$||A|| = \sup_{||x||<1}||Ax|| = \sup_{||x||=1}||Ax|| = \sup_{x \ne 0}\frac{||Ax||}{||x||} = \inf\{C > 0 : \forall x \ ||Ax|| \le C||x||\}$$

Доказательство. Предлагается пронумеровать их как $N_1 \dots N_5$.

Сразу видно: $N_1 \ge N_2$, $N_1 \ge N_3$. Вполне видно, что $N_3 = N_4$. $N_4 = N_5$ по каким-то свойствам супремума и инфинума (супремум тут равен инфинумуму дополнения, как-то так). Чуть сложнее оставшееся.

$N_2 \ge N_1$: нужно сказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ N_1 \le (1+\varepsilon)N_2$. Это следует из того, что $||x|| \le 1 \Rightarrow ||\frac{x}{1+\varepsilon}|| < 1$.

$N_5 \ge N_1$: нужно сказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ N_1 \le N_5 + \varepsilon$. Это следует из того, что $||x|| \le 1 \Rightarrow ||Ax|| \le N_5 + \varepsilon$. □

Есть следствие: $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$ и $||BA|| \le ||B|| \cdot ||A||$. Последнее следует из первого выносом $||A||$.

43. Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора. Ограниченность линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Оценка нормы через сумму квадратов.

    $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

    (1) A – ограниченный оператор.

    (2) A непрерывен в нуле.

    (3) A непрерывен.

    (4) A равномерно непрерывен.

    Доказательство. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ – очевидно. $1 \Rightarrow 4$: $\delta = \frac{\varepsilon}{||A||}$. $2 \Rightarrow 1$: Какой бы ε ни возьмём, $||A||$ будет $< \frac{\varepsilon}{\delta}$. Действительно, $||x|| < 1 \Rightarrow \delta||Ax|| < \varepsilon$. □

    Тогда, кстати, любой линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ ограничен.

    Последняя часть билета. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – линейный оператор. Тогда $||A|| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$.

    Доказательство. Предлагается раскрыть скобки и получить, что $||Ax||^2 = \sum\left(\sum a_{ij}x_j\right)^2 \leq ||x||^2 \cdot \sum\sum a_{ij}^2$ (неравенство Коши-Буняковского), после чего воспользоваться одним из эквивалентных определений нормы операторы. □

44. Путь, носитель пути, простой путь, гладкий путь. Эквивалентные пути. Определение кривой.

    $\gamma : [a; b] \to X$ – непрерывное отображение. Тогда γ – путь.

    Начало $\gamma(a)$, конец $\gamma(b)$, носитель $\gamma([a; b])$.

    Замкнутый путь: $\gamma(a) = \gamma(b)$. Простой путь: $\gamma(s) \neq \gamma(t)$, если $s \neq t$. Простой замкнутый путь делает исключение для a и b.

    Противоположный путь: $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$.

    Эквивалентные пути: $\gamma : [a; b] \to X$, $\tau : [c; d] \to X$ эквивалентны, если существует функция $r : [a; b] \to [c; d]$ – непрерывная и строго монотонная, такая, что $r(a) = c$ и $r(b) = d$ и $\gamma = \tau \circ r$. И это достаточно очевидно отношение эквивалентности.

    Кривая – класс эквивалентности путей. Представитель – параметризация кривой. Носитель кривой – носитель путей из этого класса.

    Путь в $\mathbb{R}^m$ гладкий, если по всем координатам лежит в $C^1[a; b]$. r-гладкий, если C^r.

45. Длина пути и длина кривой. Определение и простейшие свойства. Аддитивность длины кривой.

    Длина пути $l(\gamma)$ – супремум по всем разбиениям отрезка расстояний между образами соседних точек в пути. Длины эквивалентных и противоположных путей, ясен пень, равны.

    Длина кривой – длина любого пути из её класса.

    Свойства: $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$ и даже $\geq$ длины любой вписанной в неё ломанной.

    Аддитивность: $\gamma : [a; b] \to X, c \in (a, b)$. Тогда $l(\gamma) = l\left(\gamma|_{[a;c]}\right) + l\left(\gamma|_{[c;b]}\right)$.

    Доказательство. Очевидно, что $\geq$: это просто супремум по всем разбиениям, содержащим точку c. Для того, чтобы показать $\leq$, надо воспользоваться неравенством треугольника и добавить таким образом точку c в разбиение. □

46. Длина кривой, заданной параметрически (с леммой).

    Путь кусочно гладок, если можно нарезать на конечное число гладких кусков.

Lm. γ – гладкий путь, $\Delta \subset [a;b]$ – отрезок. Обозначим $m_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \min\limits_{t\in\Delta} \gamma_i'(t)}$, M_Δ – то же, но с максимумом. Тогда $m_\Delta l(\Delta) \le l\left(\gamma|_\Delta\right) \le M_\Delta l(\Delta)$.

Кажется, что-то похожее у нас было с интегралами.

Доказательство. Взять любое разбиение, внутри сделать оснащение по теореме Лагранжа (про значение производной) и получить требуемое неравенство с двух сторон, после чего перейти к супремуму. □

Th. $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^m$ – гладкий путь. Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_m'(t)^2}dt = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

Доказательство.

1. Зажать $\int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$ для каждого разбиения между суммами m и M.
2. Сказать, что $\sum(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \to 0$ при мелкости разбиения $\to 0$.
   Для этого нужно сказать, что $\sum(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \le \sum\sum(M^{(i)} - m^{(i)})(t_k - t_{k-1})$ (разность квадратов и поменять множители местами), что в свою очередь меньше модуля непрерывности, стремящегося к нулю.

□

47. Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах. Оценка длины кривой.

    Длина графика функции $\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}dt$.

    Длина в полярных координатах $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$, так как координаты $r(\varphi)\cos\varphi$ и $r(\varphi)\sin\varphi$.

    Оценка длины кривой $l(\gamma) \le (b-a)\max\limits_{t\in[a;b]} ||\gamma'(t)||$, так как $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

48. Натуральная параметризация кривой.

    Если $\gamma'(t_0) = 0$, то t_0 – особая точка.

    Пусть γ имеет конечную длину S.

    Тогда натуральная параметризация кривой $\tilde{\gamma} : [0;S] \to X$, т.ч. $\forall s \in [0;S] \quad l\left(\tilde{\gamma}|_{[0;s]}\right) = s$.

    Есть офигенная история, что натуральная параметризация гладкой кривой обязательно существует, если нет особых точек.

    Доказательство. Уже знаем, что длина конечна. Скажем, что $\tau : [a;b] \to [0;S]$, $\tau(t) = l\left(\gamma|_{[a;t]}\right)$. Надо, чтобы она была строго монотонной и непрерывной. Ну да, $\tau(t) = \int\limits_a^t ||\gamma||'(u)du$. Видно, что строго монотонна (производная!) и непрерывна. □

    Также есть свойство, что $||\tilde{\gamma}'|| = 1$. Доказывается дифференцированием определения по s.

49. Линейная связность. Теорема Больцано–Коши.

    $E \subset X$ линейно связное, если между любыми двумя точками есть путь, проходящий только по E.

    Область – открытое линейно связное множество.

    Есть теорема о том, что в области путь можно заменить на ломанную. Для доказательства нужно взять путь, выбрать конечное подпокрытие (путь – компакт!) шариками (закрытыми) из покрытия каждой точки шариком (уполовинить радиус), и ~~оставить первую и последнюю точку в каждом шарике~~ составить путь из точек пересечения этих шариков.

Теорема Больцано-Коши. Пусть E – линейно связное множество, $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in [A; B]$ существует $c \in E$, т.ч. $f(c) = C$. Доказывается взятием кривой, соединяющей a и b и любой её пераметризации и применением человеческой теоремы Больцано-Коши.

Числовые ряды

50. Критерий Коши. Группировка членов ряда. Свойства.

Критерий Коши: $\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m > n > N\quad \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$. Доказывается через критерий Коши для предела последовательностей частичных сумм.

Групппировка: Есть ряд a_n, его члены сгруппировали (подряд идущие, видимо). Тогда если в каждой группе не больше M членов или все члены одного знака, то из сходимости сгруппированного следует сходимость $\sum a_n$.

Доказательство. (1) Проверить критерий Коши. Воспользоваться критерием Коши для сгруппированного ряда и $\frac{\varepsilon}{M}$.

(2) Зажать S_n между S_{n_k} и $S_{n_{k+1}}$. Два милиционера.

□

Вопрос: Свойства?

51. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами: S_n ограничена $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится. Доказывается элементарно – монотонная ограниченная последовательность имеет предел, а неограниченная по-любому не имеет.

Признак сравнения: a_n и b_n – неотрицательные ряды, $a_n \le b_n$. Тогда b_n сходится $\Rightarrow a_n$ сходится и a_n расходится $\Rightarrow b_n$ расходится. Вторая часть теоремы является чёртовой переформулировкой первой, а первая следует из предыдущего пункта ($\sum b_n$ ограничены $\Rightarrow \sum a_n$ тем более).

Следствие: $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится. А ещё эквивалентные ряды ведут себя одинаково. Первое совсем очевидно, второе – $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, если выкинуть нули из b_n, после чего можно зажать a_n и b_n с двух сторон.

52. Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

<u>Th</u> (Признак Коши)**.** $a_n \ge 0$.

(1) Если $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, то ряд сходится.

(2) Если $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд расходится.

(3) $q^* := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Если $q^* < 1$, то ряд сходится. Если $q^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. В первом утверждении ряд мажорируется геометрической прогрессией, которая сходится. Во втором $a_n \ge 1 \nrightarrow 0$. Сложность только в третьем.

Первая часть третьего утверждения: возьмём q между q^* и 1. Тогда начиная с какого-то момента все члены a_n будут меньше q, откуда по первому утверждению ряд сходится.

Вторая часть третьего утверждения: выберем подпоследовательность, стремящуюся к верхнему пределу. С какого-то момента все члены будут там > 1, откуда и в a_{n_k} они будут > 1, откуда $a_n \nrightarrow 0$, откуда ряд расходится. □

Вопрос: Примеры?

Ответ: В билете 53.

53. Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Th (Признак Даламбера)**.** $a_n > 0$

(1) Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le d < 1$, то ряд сходится.

(2) Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, то ряд расходится.

(3) $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Если $d^* < 1$, то ряд сходится, если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

(1) $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \le a_1 \cdot d^{n-1}$. Мажорируем геометрической прогрессией.

(2) a_n возрастает $\Rightarrow a_n \not\to 0$.

(3.1) Снова взяли d между d^* и единицей и воспользовались пунктом (1).

(3.2) Снова с какого-то номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ и пункт (2).

$\square$

Пример (сразу на Коши и Даламбера): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Коши там сделает формулу Стирлинга, а Даламбер будет стремиться к нулю вообще элементарно.

Связь: $a_n > 0$. Если существует d^* из Даламбера, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d^*. Доказывается применением Штольца к $\ln \sqrt[n]{a_n}$.

54. Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак. Сходимость и расходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Если функция монотонна (и интегрируема), то $\left|\sum\limits_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right| \le \max\{|f(a)|; |f(b)|\}$. Для доказательства надо зажать интеграл между интегральными суммами с шагом 1 и вычесть сумму из неравенства.

Интегральный признак: пусть f монотонно убывает, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{n} f(x)dx$ ведут себя одинаково. Всё замечательно следует из предыдущего факта. В доказательстве сходимости интеграла надо дополнительно оценить $F(x)$, где x – не целое (можно, так как интеграл монотонен).

Про вторую часть билета: по [не]стремлению к нулю и интегральному признаку сходимость равносильна $p > 1$.

Про третью часть билета: $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y} = \ln y\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty$.

55. Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Условно сходящиеся ряды.

Ряд абсолютно сходится, если его модуль абсолютно сходится.

Свойства: линейность (т.е. образуют линейное пространство). Абсолютная сходимость равносильна (в комплекснозначных рядах) покоординатной сходимости. Если $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то $|S| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Про доказательство первого и говорить-то нечего, второе напрямую вытекает из первого, третье – вроде бы признак сравнения.

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Для этого надо разбить ряд на положительные и отрицательные члены и убить оба ряда по признаку сравнения.

Ряд условно сходится, если он сходится, но не абсолютно.

56. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

Преобразование Абеля: $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Th (признак Дирихле).

(1) $|\sum a_k|$ ограничены.

(2) b_n монотонна.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$.

Тогда $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k-1})$.

Первое слагаемое стремится к нулю, так как A_n ограничено, а b_n стремится к нулю. Второе слагаемое замечательно оценивается как $M \sum b_k - b_{k+1}$, что в силу монотонности сходится. □

Th (признак Абеля).

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(2) b_n монотонна.

(3) $|b_n|$ ограничена.

Тогда $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Взть $B :=$ предел b_n и вычесть из него. Для полученного выполнено условие признака Дирихле. Если прибавить обратно, появится слагаемое $B \sum a_n$, сходящееся по первому условию. □

57. Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры.

Признак Лейбница: если ряд знакочередующийся и $|a_n| \searrow 0$, то он сходится.

Вообще-то элементарно следует из Дирихле. Но нам хочется дополнительное свойство на чётные и нечётные члены, поэтому скажем, что $[0; S_1] \supset [S_2; S_3] \supset \ldots$ и у этой последовательности вложенных отрезков есть единственная общая точка – сумма ряда.

Примеры: $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$.

Вопрос: Оценка суммы?..

58. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.

Ну да, в абсолютно сходящемся ряде можно произвольным образом переставлять члены. Сумма не поменяется.

Для знакопостоянных рядов всё понятно: оцениваем сумму для перестановки и для обратной перестановки сверху и получаем оба нужных неравенства.

Для действительнозначных рядов надо разбить на положительный и отрицательный ряд и сказать, что для обоих рядов всё замечательно выполняется.

Для комплекснозначных рядов надо сказать, что сходимость равносильна покоординатной сходимости.

59. Теорема Римана.

    Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ и $\sum a_n$ условно сходится.

    Тогда можно придумать перестановку такую, что новый ряд будет сходится к любому наперёд заданному числу или вообще расходиться.

    Нужно разбить ряд на положительные и отрицательные. b_n стремятся к нулю, а сумма ряда равна $+\infty$. То же с c_n, только сумма $-\infty$. Дальше нужно вставлять члены b_n и c_n пока не больше – не меньше – не больше – не меньше, и так далее.

    Для бесконечности надо заменить S на 1, 2, 3, ... на каждом этапе.

60. Теорема Коши. Произведение рядов. Теоремы Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

    Теорема Коши. Если $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, $A := \sum a_n$, $B := \sum b_n$, то их произведения (все попарно) в какой-то перестановке абсолютно сходятся и их сумма равна AB. Абсолютная сходимость следует из ограниченности частичных сумм: их несложно ограничить произведением сумм абсолютных рядов. Раз абсолютно сходится, порядок может быть любым. Выберем такой: все индексы до 1, до 2, и так далее. Получим $S_{n^2} = A_n B_n \to AB$. Осталось зажать произвольное S_m. Если $n^2 \le m \le (n+1)^2$, то $S_m = S_{n^2} + \sum a_{n+1} b_k + \sum a_k b_{n+1}$, разность можно по модулю оценить как $\tilde{A}|b_{n+1}| + \tilde{B}|a_{n+1} \to 0$.

    Произведение рядов – сумма $\sum_n \sum_{k+l=n} a_k b_l$. Если раскрыть скобки, получится именно так.

    Теорема Мертенса. если $\sum a_n$ абсолютно сходится, а $\sum b_n$ сходится, то их произведение сходится и равно AB.

    Контрпример к отсутствию абсолютной сходимости: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Тогда произведение достаточно очевидно оценивается снизу суммой единиц.

61. Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

    Теорема Абеля – это если $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ и $\sum c_n = C$ и c_n – произведение a_n и b_n, то $AB = C$.

    Лемма – это если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то среднее арифметическое их произведений с фиксированной суммой индексов стремится к xy.

    Доказывается так: сначала разобрать $y = 0$, потом $y_n \equiv y$, потом общий случай.

    Первое – ограничить x_n и y_n по модулю константой M и выбрать n по ε, разбив на две части из сходимости y_n к нулю.

    Второе – вроде бы теорема Штольца.

    Третье – комбинация первых двух.

    Теорема: свести к лемме среднее арифметическое частичных сумм. Раскрывать скобки – такое себе удовольствие.

62. Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства

    Ну это как бесконечные суммы, только бесконечные произведения.

    Например, $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$, так как соседние произведения хорошо сокращаются. Если заменить n^2 на $4n^2$, получится $\frac{2}{\pi}$, так как соседние будут сокращатся в что-то Валлисо-подобное.

    Свойства: конечное количество начальных множителей не влияет на сходимость, $\prod p_n$ сходится $\Rightarrow$ $\lim p_n = 1$, на знаки можно помахать руками и забить, для положительных p_n равносильно сходимость $\sum \ln p_n$. В доказательстве не нуждается ни одно.

63. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

    p_n – это все простые числа, так-то. И они расходятся.

Про первое хочется сказать, что $\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$, а дальше раскрыть скобки. Но так нельзя, потому что бесконечность. Зато бесконечную сумму можно оценить конечной (до n), и оценить получившееся суммой гармонического ряда, который расходится.

Про второе хочется прологарифмировать первое и оценить этим при малых $\frac{1}{t}$ тот ряд. Будет нормально.

64. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

 Пусть $f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – последовательность функций. Тогда f_n поточечно сходится к f на E, если $\forall x \in E$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

 $f_n \rightrightarrows f$, если $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это квантор $\forall x$ перенёсся на последнее место по сравнению с предыдущим.

 Например, x^n на $(0, 1)$ сходится к нулю поточечно, но не равномерно.

 Если $f_n \rightrightarrows f$, то f_n поточечно сходится к f, но не наоборот.

 Критерий: $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказывается: это в две стороны тупо переформулировка.

 Следствия: $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ и $\lim a_n = 0$, следовательно, $f_n \rightrightarrows f$ на E. А ещё если можно выбрать последовательность точек из E, что $f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0$, то f_n равномерно не сходится к f.

65. Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся последовательностей. Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

 f_n равномерно ограничена, если есть такое M, что $\forall n\ \forall x\ \ |f_n(x)| \le M$. Короче, везде ограничена одним M.

 Если f_n равномерно ограничена, а $g_n \rightrightarrows 0$, то $f_n g_n \rightrightarrows 0$. Элементарно следует из ~~божественного богического~~ критерия.

 Критерий Коши: f_n равномерно сходится к какой-то функции $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Впрочем, ничего нового.

 В одну сторону – вычесть f, к которому оно сходится, и взять $\frac{\varepsilon}{2}$.

 В другую – сначала взять f (поточечно сходится, так как последовательность фундаментальна и все такие дела), а потом доказывать из этого утверждения напрямую сходимость к этому f.

66. Пространство $\ell^\infty(E)$ и его полнота.

 Пространство – это пространство ограниченных функций из E в $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Норма – это супремум модуля. Можно показать неравенство треугольника.

 Так вот, $f_n \rightrightarrows f$ равносильно обычной сходимости в нормированном пространстве.

 И тогда $\ell^\infty(E)$ – полное, так как есть критерий Коши. Единственное, что хочется показать – то, что при $f_n \rightrightarrows f$ будет выполняться $f \in \ell^\infty$, то есть f – ограничена. Для этого достаточно рассмотреть определение $\varepsilon = 1$.

67. Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $C(K)$ и его полнота.

 Если f_n непрерывны в a и $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна в a. Доказывается какими-то манипуляциями с $\frac{\varepsilon}{3}$. И надо помнить, что не все точки предельны.

 Как следствие, есть теорема Стокса-Зайделя. Она о том, что $(f_n \in C(E)) \rightrightarrows f \Rightarrow f \in C(E)$.

 Тогда $C(K)$ – подпространство $\ell^\infty(K)$. Норму можно определить как максимум, поскольку живём на компакте.

 Теперь надо сказать, что замкнутое подпространтсво полного пространства полно. Для этого достаточно, чтобы оно содержало все пределы фундаментальных последовательностей внутри себя. Но эти пределы – предельные точки, а пространство замкнуто, так что таки да.

 И теперь осталось проверить замкнутость $C(K)$. Это очень кстати как раз теорема Стокса-Зайделя.

68. Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

    $u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

    $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд. У него определена частичная сумма. Если S_n поточечно сходится к S, то ряд поточечно сходится к S, то же про равномерную сходимость.

    Если S_n поточечно сходится к S, то $r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда. Равномерная сходимость равносильна равномерной сходимости r_n к нулю.

    Критерий Коши (для функциональных рядов): $u_n(x)$ равномерно сходится на E равносильно $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p\ \forall x\ \ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$. Доказывается через критерий Коши для равномерной сходимости.

    Из этого следует (необходимое условие) $\sum u_n(x)$ сходится $\Rightarrow u_n \rightrightarrows 0$. Взять $p = 1$.

69. Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствия. Примеры.

    Признак сравнения – всё о том же. $|u_n(x)| < v_n(x)$ и $\sum v_n(x)$ равномерно сходятся, следовательно, $\sum u_n(x)$ равномерно сходится. Проверять признак Коши.

    Следствие – признак Вейерштрасса: $\forall x\ \ |u_n(x)| \le c_n$ и $\sum c_n$ сходится, следовательно, $\sum u_n$ равномерно сходится. Вообще ни разу не надо доказывать.

    Следствие – из сходимости $\sum |u_n(x)|$ следует сходимость $\sum u_n(x)$.

    Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится, так как ограничивается $\frac{1}{n^2}$ и есть признак Вейерштрасса.

70. Признаки Дирихле и Лейбница. Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не равномерно абсолютно.

    <u>**Th**</u> (признак Дирихле). $a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

    (1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le K \quad \forall x \in E$.

    (2) $b_n \rightrightarrows 0$ на E.

    (3) $\forall x \in E\ \ b_n(x)$ монотонно по n.

    Тогда $a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E.

    Доказывается тем же преобразованием, что и в рядах: $S_n(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$. Первое слагаемое – произведение равномерно ограниченной на равномерно сходящуюся к нулю, второе сходится абсолютно – можно по модулю оценить как $K|b_{n-1} - b_1|$, что также равномерно сходится.

    <u>**Th**</u> (признак Лейбница). $b_n : E \to \mathbb{R}$.

    (1) $b_n(x)$ монотонна по n при фиксированном x.

    (2) $b_n \rightrightarrows 0$ на E.

    Тогда $\sum (-1)^n b_n$ равномерно сходится на E.

    Это прямое следствие признака Дирихле.

    Пример ряда: $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ на $(0;1)$. Сходится равномерно по признаку Дирихле, абсолютно сходится по признаку Коши, но не сходится равномерно абсолютно: по признаку Коши можно оценить снизу геометрической прогрессией при x близких к 1.

71. Признак Абеля

<u>Th</u> (признак Абеля). $a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно сходится.

(2) $|b(x)| \le K \quad \forall x \in E\ \forall n$.

(3) $b_n(x)$ монотонно по n при фиксированном x.

Тогда $\sum a_n b_n$ равномерно сходится.щ

Вопрос: Правда же, в первом признаке в сумме сверху ∞?

Доказывается расписыванием по признаку Коши и преобразованию Абеля внутри. Первое слагаемое там оценивается как K на модуль суммы каких-то a_n, равномерно сходящихся, откуда есть оценка $K\varepsilon$. Вторoе слагаемое забивается как ε на модуль разности каких-то b_i, откуда есть оценка $2K\varepsilon$.

72. Теоремы о перестановке пределов и перестановке предела и суммы.

Первая теорема такая: если $f_n \rightrightarrows f$ и a – предельная точка E, $b_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$.

Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f$ существуют и равны.

То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Доказывается так: пишем критерий Коши для f_n, получаем из него предельным переходом $|b_n - b_m| < \varepsilon$, откуда предел b_n существует. Дальше надо подставить в $f_n(a)$ числа b_n. Полученные функции непрерывны в точке a, сходятся на $E \cup \{a\}$, откуда g непрерывна в точке a, откуда $b = g(a)$, чего и хотелось.

Из этого есть тайное знание, что если $f_n \rightrightarrows$ на интервале, то $f_n \rightrightarrows$ и на отрезке.

Вторая такая: если $\sum u_n$ равномерно сходится и $b_n := \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $\sum_n \lim_x u_n(x) = \lim_x \sum_n u_n(x)$.

Доказывается применением предыдущей теоремы к частичным суммам.

Из этого следует, что если $\sum u_n(x)$ равномерно сходится и u_n непрерывна в a, то $\sum u_n(x)$ непрерывна в a.

73. Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

Теорема. Если $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$ и $c \in [a;b]$, то $\int\limits_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)dt$. В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(t) = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$.

Для доказатльства надо зажать как-то одним ε модуль разности интегралов f_n и f. Раскрыть интеграл по линейности и оценить его как $\varepsilon(b-a)$, воспользовавшись равномерной сходимостью.

Теорема. То же, но вместо предела сумма. Доказывается подстановкой частичных сумм в предыдущее выражение.

Существенность: рассмотрим $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. $f_n(x)$ поточечено сходится к нулю, но предел запросто берущихся интегралов равен $\frac{1}{2}$.

74. Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

Теорема. $f_n \in C_1[a;b]$, $f_n' \rightrightarrows g$. $c \in [a;b], f_n(c) \to A$. Тогда $f_n \to f$, причём $f' = g$. В частности, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Это по сути почти переформулировка теоремы из предыдущего билета.

Теорема. То же, но вместо предела сумма. Получится теорема для частичных сумм.

Существенность: $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, но сумма производных $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ расходится при $x = 2\pi k$.

Вопрос: Мы разве в теореме не требуем сходимость производных? Норм ли пример?..

75. Степенные ряды. Теорема о сходимости ряда при меньших аргументах. Радиус и круг сходимости.

    Степенной ряд – это сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при всех комплексных аргументах.

    Теорема. Если $\sum a_n z_0^n$ сходится (при z_0), то он сходится при $|z| < |z_0|$. Доказывается так: раз $\sum a_n z_0^n$ сходится, то оно ограничено. Раз ограничено, то $\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ можно по модулю ограничить $M \sum \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)\right|$ – геометрическая прогрессия, сумма сходится, откуда ряд сходится абсолютно.

    В частности, это значит, что верен перевёртыш: $\sum a_n z^n$ расходится при z_0, следовательно, расходится при $|z| > |z_0|$.

    Исходя из этого, можно определить радиус сходимости – такое $|z|$, что ряд сходится при меньшем модуле, а расходится при большем. Он, очевидно, существует, но почему-то это мы скажем только в ледующем билете.

76. Формула Коши–Адамара (с леммой). Существование радиуса сходимости. Примеры.

    Формула Коши-Адамара: радиус сходимости существует и равен

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

    Лемма: $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0; +\infty)$. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

    Доказательство: обозначим берёзы буквами A, B и C (надо показать, что $AB = C$). $\le$ понятно: выберем в y_n подпоследовательность, стремящуюся к верхнему пределу, тогда $\lim x_n y_{n_k} = AB \le C$ как частичный предел. $\ge$ доказывается в обратную сторону: выбираем $x_{n_k} y_{n_k}$, стремящуюся к C, делим её на A и получаем $\frac{C}{A} \le B$. Это, кстати, первое место, где мы воспользовались положительностью A.

    Эта лемма пригодится позже, пока же докажем формулу. Для этого применим признак Коши. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

    Ряд сходится, если $|z| <$ берёзы, и расходится, если $|z| >$ берёзы, чего и хотелось.

    Примеры: $\sum \frac{z^n}{n!} : R = +\infty$, $\sum n!\, z^n : R = 0$. Примеры скорее символические, чем интересные.

    Кстати, там был ещё признак Даламбера. И его можно сюда засунуть.

77. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда.

    Теорема: в круге $|z| \le r < R$ степенной ряд сходится равномерно. Доказаывается так: вспомним, что сходится абсолютно, ограничим последовательностью $|a_n| r^n$ и воспользуемся признаком Вейерштрасса.

    Как следствие, сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости. Ну так как ряд равномерно сходится в круге $|z| \le r < R$, то его сумма там непрерывна.

78. Теорема Абеля. Почленное интегрирование суммы степенного ряда (с леммой).

    Теорема Абеля: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и R – радиус сходимости. Тогда если ряд сходится при $z = R$, то он равномерно сходится на $[0; R]$. В частности, у него при стремлении к R снизу есть предел.

    Это теорема про действительные числа и не совпадает ни с одной предыдущей. Доказывается через признак Абеля для $a_n R^n$ и $\left(\frac{x}{R}\right)^n$.

    Почленное интегрирование: про то, что $\int \sum = \sum \int = \sum a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ внутри круга сходимости.

    Лемма там о том, что радиусы сходимости этих рядов (и ещё почленной производной) равны. Доказывается через Коши-Адамара.

    А теорема о почленном интегрировании теперь следует из равномерной сходимости.

79. Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

    Комплексная производная определена во внутренних точках ООФ как $\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Функция комплексно дифференцируема в a, если $\exists k$ такое, что $f(z)=f(a)+k(z-a)+o(z-a)$ при $z\to a$. o определено по модулю.

    Дифференцирование степенного ряда: m-тая производная степенного ряда внутри круга сходимости равна именно тому, что вы ожидаете. Доказывается индукцией по m, надо показать лишь для первой производной.

    Схема доказательства такая: расписать производную по определению и поделить разность n-тых степеней на просто разность. Потом надо будет поменять местами сумму и предел, то есть нужна будет равномерная сходимость. Ограничить модуль сверху каким-нибудь радиусом, там будет по уже доказанному сходиться равномерно, а значит, можно зафигачить признак Вейерштрасса.

80. Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

    Аналитические функции – это с рядом Тейлора.

    Теорема: пусть $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$ в круге $|z-z_0|<R$. Тогда $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Доказывается подстановкой в предыдущую формулу числа z_0.

    И эта формула называется невнезапно рядом Тейлора.

    Интересно, что бесконечно дифференцируемая функция не обязательно раскладывается в ряд Тейлора.

    Например, $f(x)=e^{-1/x^2}$ на положительных числах и 0 иначе. Так вот, она бесконечно дифференцируема (производная – произведение e^{-1/x^2} на рациональную функцию), но в нуле все производные ноль. Но функция-то не тождественный ноль, однако.

81. Определение e^z, $\sin z$, $\cos z$. Свойства.

    $e^z=\sum\frac{z^n}{n!}$. $\cos z=\sum\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$. $\sin z=\sum\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

    Свойства (*упражнения*): $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, $e^{z+w}=e^ze^w$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$.

82. Ряд Тейлора для $\ln(1+x)$ и для $\operatorname{arctg} x$.

    $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

    $\operatorname{arctg} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

    Доказываются внезапно разложением в бесконечный ряд и интегрированием $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1+x^2}$, соответсвенно.

83. Ряд Тейлора для $(1+x)^p$ и для $\arcsin x$.

    $(1+x)^p=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n$ при $x\in(-1,1)$.

    Радиус сходимости по Даламберовскому варианту Коши-Адамара равен единице.

    Объявим это выражение $S(x)$. Пусть $f(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^p}$. Тогда $f(0)=1$ и хочется показать, что $f'(x)\equiv 0$. Это доказывается, к сожалению, в лоб, а перебивать это сюда у меня желания нет. Но там просто сойдутся коэффициенты.

    $\arcsin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

    Разложим по предыдущему пункту ($p=-1/2$) функцию $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и проинтегрируем. Получим именно это.

Функции многих переменных

84. Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

    $f : (E \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$.

    f дифференцируема в a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что $f(a+h) = f(a) + Th + o(||h||)$.

    Здесь $g(h) = o(||h||)$ означает, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h)}{||h||} = 0$. В общем, как обычно.

    На самом деле, T тогда определён однозначно: $Th = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$.

    Примеры: у константы дифференциал равен нулю, а у линейного оператора – ему самому.

    Матрица отображения T называется матрицей Якоби.

    Если f дифференцируема в a, то она непрерывна в a (см. определение).

    Частный случай $m = 1$: тогда $\exists v \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + o(||h||)$. Вектор v тогда называется градиентом функции f в точке a ($\operatorname{grad} f$ или ∇f).

85. Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений.

    Примеры были в прошлом билете.

    Короче, дифференцируемость f равносильна дифференцируемости всех её проекций на координатные оси.

    Надо лишь расписать поматрично все функции, благо линейные функции хорошо раскладываются по координатам. Остаётся лишь расписать o-шки, в которых надо сообразить, что если корень из положительных берёз стремится к нулю, то все положительные берёзы стремятся к нулю.

    И заметить, что перезоды равносильны.

86. Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента.

    Пусть есть вектор h, при этом $||h|| = 1$. Тогда производная по направлению h определена так: $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$.

    Ну и да. $g(t) = f(a+th)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$.

    Теорема. Пусть a – внутренняя точка E, f дифференцируема в a, $||h|| = 1$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = (d_a f)(h) = \langle \operatorname{grad} f, h\rangle$.

    Доказательство (первого равенства, второе вообще-то очевидно) выглядит как расписывание того и другого по определению и переходом к пределу.

    Экстремальное свойство градиента: $-||\operatorname{grad}_a f|| \le \frac{\partial f}{\partial h}(a) \le ||\operatorname{grad}_a f||$. Доказывается применением неравенства Коши-Буняковского к предыдущей теореме.

    Причём равенство $\Leftrightarrow h = \pm \frac{\operatorname{grad}_a f}{||\operatorname{grad}_a f||}$.

87. Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

    Частная производная по k-той координате – это производная по направлению x_k. “Как бы считаем остальные координаты константами”.

    Так вот. По теореме из предыдущего билета $\operatorname{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

    А элементы матрицы Якоби:

    $$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

    Пример: $f(x,y) = x^y$. Там $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$.

88. Линейность диференциала. Дифференциал композиции.

    Линейность дифференциала в наше тяжёлое время даже в комментариях особо не нуждается. Написать чёртово определение и порадоваться.

    Дифференцирование композиции: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$. Тогда $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$.

    Доказательство выглядит берёзой проклятой. Мысль там простая: написать определение производной g в точке $f(a)$, внести дополнительную переменную внутрь и оценить как o все остатки. Вроде (я проверил!) это делается отдельно без конспекта и на бумажке. Для простоты рекомендуется остаток заранее поделить на $||h||$, то есть представить как $||h|| \cdot \alpha(h)$.

89. Две теоремы о дифференцируемость произведения функций.

    Первая – о векторе и о скаляре. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в a, то λf дифференцируема в a и $d_a(\lambda f) = d_a\lambda f(a) + \lambda(a) d_a f$. Доказывается банальным муторным расписыванием и оценкой всего оставшегося.

    Вторая – о дифференцировании скалярного произведения. $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в a. Тогда $F := \langle f, g\rangle$ дифференцируема в a. Более того, $d_aF(h) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$.

    Для доказательства надо расписать скалярное произведение и воспользоваться предыдущей теоремой и линейностью дифференциала.

90. Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

    Теорема такая: $f : [a; b] \to \mathbb{R}^m$, непрерывна на отрезке, дифференцируема на интервале. Тогда $\exists c \in (a, b)$ такое, что $||f(b) - f(a)|| \le ||f'(c)||(b - a)$.

    Идея доказательства в рассмотрении функции $\varphi(t) = \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$ и написании для неё одномерной теоремы Лагранжа (она действительнозначная). Там получится $\varphi'(t) \le ||f'(t)|| \cdot ||f(b) - f(a)||$ по неравенству Коши-Буняковского, и останется лишь сократить на $||f(b) - f(a)||$.

91. Связь частных производных и дифференцируемости.

    Если у f есть и непрерывны все частные производные в a, то у f есть производная в a.

    Снова берёза проклятая.

    НЛО улетело и забрало с собой билет 91.

92. Непрерывная дифференцируемость и равносильное ей свойство.

    f непрерывно дифференцируема в a, если d_xf непрерывна в a.

    Равносильное условие: все частные производные существуют в окрестности a и непрерывны в a.

    В сторону $\Rightarrow$ не очень сложно: надо оценить разность частных производных по каждой координате и получить оценку нормой разности d_xf и d_af.

    В обратную сторону тоже не представляет сложности после элементов матрицы Якоби.

93. Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$.

    Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ – как бы вторая производная.

    Если производные существуют и непрерывны (для функций от двух переменных, например), то дифференциалы можно переставлять.

    Вы таки не поверите, но берёзу опять прокляли.

    НЛО улетело и забрало с собой билет 93.

94. Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций. Пример, показывающий необходимость непрерывности производных.

    f – r раз непрерывно дифференцируема, если все её частные произодные до r-того порядка существуют (r-гладкая).

    Обозначается как $C^r(D)$.

    Теорема о том, что индексы можно переставлять. Доказывается из предыдущей теоремы (можно сделать транспозицию, значит, можно отсортить да хотя бы пузырьком).

    Вопрос: Пример?

95. Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

    Мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{N}_0$. Высота $|k| = \sum k_i$. $k! = \prod k_i!$. $h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow h^k = \prod h_i^{k_i}$. $f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}$.

    Мультиномиальный коэффициент $\binom{|k|}{k} = \frac{|k|!}{k!}$.

    Лемма такая: f – r-гладкая функция, $[x; x+h] \subset D$ – отрезок в многомерном пространстве. Тогда $F(t) = f(x+th)$ – r-гладкая и $F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k} f^{(k)}(x+th)h^k$.

    Доказывается по индукции тупым расписыванием.

96. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

    Говорят, что если $f \in C^{r+1}(D)$ и $[a; x] \subset D$, то $f(x) = \sum\limits_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

    Доказывается так: $h := x - a$, $F(t) = f(a+th)$, применить одномерного Тейлора и лемму из предыдущего билета.

    Частный случай: при $r = 0$ получается $f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad}_{a+\theta(x-a)} f, x-a \rangle$.

97. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

    В форме Пеано: $f(x) = \sum\limits_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(||x-a||^r)$.

    Доказывается занесением r-тых членов в формуле Лагранжа и оценкой остатка по каждому слагаемому.

    Следствие (полиномиальная формула): $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum\limits_{|k|=r} \binom{r}{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$.

    Доказывается расписыванием $(\sum x_i)^r$ в ряд Тейлора.