Математический анализ

Ермилов Антон, Никифоровская Анна

24 января 2017 г.

Содержание

1. Введение.

1.1. Множества.

***Определение* 1.1.** Множество — набор уникальных элементов.

$A \subset B$ (A — подмножество B, $\forall\, a \in A \Rightarrow a \in B$).

$A \subset B \iff B \supset A$

$A = B \iff A \subset B$ and $B \subset A$

***Определение* 1.2.** Операции с множествами:

1. $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ (объединение множеств)
2. $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ (пересечение множеств)
3. $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$ (разность множеств)
4. $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (симметрическая разность)

Замечание. $\cup, \cap, \vartriangle$ — коммутативны, ассоциативны.

Теорема 1.1. Правила де Моргана:

1. $A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$
2. $A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha)$. Получаем, что $x \in A$ и $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \iff x \in A$ и $x \notin B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff$ $\iff x \in A \setminus B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$. Доказано. $\square$

Теорема 1.2.

1. $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
2. $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) \iff x \in A$ или $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \iff x \in A$ или $x \in B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff$ $\iff x \in A \cup B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$. Доказано. $\square$

1.2. Отношения.

***Определение* 1.3.** Упорядоченная пара $\langle a,\, b\rangle$ — пара "пронумерованных" элементов.

$$\langle a_1,\, a_2\rangle = \langle b_2,\, b_2\rangle \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

***Определение* 1.4.** Кортеж — упорядоченный набор из нескольких элементов.

$\langle a_1,\, a_2,\, a_3,\, ...,\, a_n\rangle$

***Определение* 1.5.** Декартово произведение множеств.

$A \times B = \{\langle a,\, b\rangle : a \in A,\ b \in B\}$

***Определение* 1.6.** Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств ($R \subset A \times B$).

Элементы $x \in A$ и $y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x,\, y\rangle \in R$ (то же, что xRy).

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$.

Пример.

Отношение равенства на некотором множестве A.

$R = \{\langle x,\, x\rangle : x \in A\}$

$\forall\, x,\, y \in A : xRy \iff x = y$

***Определение* 1.7.** Область определения. Область значений.

$\delta_R = \{x \in A : \exists\, y \in B,\ \text{т.ч. } \langle x,\, y\rangle \in R\}$ (область определения)

$\rho_R = \{y \in B : \exists\, x \in A,\ \text{т.ч. } \langle x,\, y\rangle \in R\}$ (область значений)

$\delta_{R^{-1}} = \rho_R,\ \rho_{R^{-1}} = \delta_R$

***Определение* 1.8.** Композиция отношений.

$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$

$R_1 \circ R_2 = \{\langle x,\, z\rangle : x \in A,\, z \in C \text{ и } \exists\, y \in B : \langle x,\, y\rangle \in R_1,\ \langle y,\, z\rangle \in R_2\}$.

Пример.

$A = B$

$\langle x,\, y\rangle \in R$, если x — отец y.

$\langle x,\, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y.

$\langle x,\, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y.

δ_R — все, у кого есть сыновья.

ρ_R — философский вопрос :)

***Определение* 1.9.** Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx\ \ \forall\, x$.
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$.
- Транзитивным, если $xRy,\ yRz \implies xRz$.
- Иррефлексивным, если $\neg\, xRx\ \ \forall\, x$.
- Антисимметричным, если $xRy,\ yRx \implies x = y$.

***Определение* 1.10.** R является отношением:

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall\, x,\, y$ либо xRy, либо yRx.
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно.
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall\, x,\, y$ либо xRy, либо yRx.

Пример.

1. $x \equiv y \pmod m$ — отношение эквивалентности.
2. X — множество, 2^X — множество всех его подмножеств.
   $\forall\, x,\, y \in 2^X : \langle x,\, y\rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка.
3. Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка.

1.3. Вещественные числа

1.3.1. Понятие вещественных чисел

***Определение* 1.11.** Вещественные числа — алгебраическая структура, над которой определены операции сложения «+» и умножения «·» ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

***Определение* 1.12.** Аксиомы вещественных чисел.

A1. Ассоциативность сложения
$x + (y + z) = (x + y) + z$

A2. Коммутативность сложения
$x + y = y + x$

A3. Существование нуля
$\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall\, x \in R \;\; x + 0 = x$

A4. Существование обратного элемента по сложению
$\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

M1. Ассоциативность умножения
$x(yz) = (xy)z$

M2. Коммутативность умножения
$xy = yx$

M3. Существование единицы
$\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R} \;\; x \cdot 1 = x$

M4. Существование обратного элемента по умножению
$\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$

AM. Дистрибутивность
$(x+y)z = xz + yz$

O1. $x \leqslant x \ \forall x$

O2. $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \implies x = y$

O3. $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \implies x \leqslant z$

O4. $\forall x,\, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ или $y \leqslant x$

O5. $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z \ \forall z$

O6. $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y \implies 0 \leqslant xy$

Объекты, отвечающие аксиомам A1-A4, M1-M4 и AM, образуют поле.

Аксиомы O1-O6 называются аксиомами порядка и задают порядок на множестве вещественных чисел.

***Определение* 1.13.** Аксиома полноты.

$A,\, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leqslant b$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$.

Замечание. Для $\mathbb{Q}$ аксиома полноты не выполняется:

$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q} : b \geqslant 0,\ b^2 > 2\}$

Тогда не существует $c \in \mathbb{Q} : a \leqslant c \leqslant b$, т.к. $c^2 = 2$.

1.3.2. Принцип математической индукции

Принцип математической индукции.

Положим P_n — последовательность утверждений.

1. P_1 — верно

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}.

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1.3. В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент.

Доказательство.

Будем доказывать это утверждение по индукции. Докажем для минимума (для максимума аналогично).

База: $n = 1$ — очевидно.

Переход: $n \to n + 1$.

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$. Пусть мы уже знаем, что минимумом в нём является элемент x_k. Тогда рассмотрим то же множество с добавленным в него элементом x_{n+1}. Заметим, что:

1. $x_k \leqslant x_{n+1} \implies x_k$ — минимум

2. $x_k > x_{n+1} \implies$ минимумом является новый добавленный элемент x_{n+1}.

Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. $\square$

1.3.3. Принцип Архимеда

Согласно принципу Архимеда, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ и $\forall\, y > 0 \in \mathbb{R}\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} : x < ny$.

Доказательство.

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} : a < ny\},\ A \neq \varnothing,$ т.к. $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \neq \varnothing$. Покажем, что $a \leqslant b$, если $a \in A,\ b \in B$.

От противного. Пусть $b < a < ny \implies b < ny \implies b \in A \implies$ противоречие.

Таким образом, по аксиоме полноты существует $c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \ \forall a \in A\ \ \forall b \in B$.

Пусть $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies c + y < (n+1)y \implies c + y \in A \implies c + y \leqslant c \implies y \leqslant 0$. Пришли к противоречию.

Пусть $c \in B$. Возьмём $c - y < c \implies c - y \in A \implies c - y < ny \implies c < (n+1)y \implies c \in A$. Снова противоречие.

Таким образом, мы получили, что такое c не существует $\implies B = \varnothing \implies A = \mathbb{R}$. $\square$

Следствие.

1. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

   Доказательство.
   $x = 1,\ y = \varepsilon \implies \exists\, n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$. $\square$

2. Если $x,\, y \in \mathbb{R},\ x < y$, то $\exists\, r \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

   Доказательство.
   Пусть $x < 0,\, y > 0$. Тогда $\exists\, r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

   Пусть $x \geqslant 0,\ \varepsilon = y - x$. Тогда $\exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

   По принципу Архимеда найдётся такое число m, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$.

   Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < y \leqslant \frac{m}{n}$. Однако тогда получаем, что $\frac{1}{n} \geqslant y - x = \varepsilon$. Получили противоречие.

   Следовательно, $\exists\, m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$.

   Случай $y \leqslant 0$ аналогичен предыдущему. $\square$

3. Если $x,\, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$, то $\exists$ иррациональное число $r : x < r < y$.

   Доказательство.
   $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists\, r \in (x - \sqrt{2},\, y - \sqrt{2}) \implies x < r + \sqrt{2} < y \implies r$ — иррациональное. $\square$

4. Если $x \geqslant 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leqslant x$

1.4. Верхняя и нижняя границы

***Определение* 1.14.** $A \subset \mathbb{R}$

a — верхняя граница множества A, если $\forall x \in A : x \leqslant a$.

b — нижняя граница множества A, если $\forall x \in A : b \leqslant x$.

Множество ограничено сверху, если $\exists$ какая-нибудь верхняя граница.

Множество ограничено снизу, если $\exists$ какая-нибудь нижняя граница.

***Определение* 1.15.** Пусть A — ограниченное сверху множество. Тогда $\sup A$ (супремум) — наименьшая из его верхних границ.

***Определение* 1.16.** Пусть A — ограниченное снизу множество. Тогда $\inf A$ (инфимум) — наибольшая из его нижних границ.

Пример.

1. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху (принцип Архимеда).

   Пусть это не так. Тогда $\exists\, a \in \mathbb{R} : n \leqslant a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Однако $\exists\, y = 1,\ x = a : x < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies$ противоречие.

2. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \implies \sup = 1$

   Нижняя граница — любое число $\leqslant 0 \implies \inf = 0$.

Теорема 1.4.
1. Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено снизу, то $\exists!\inf A$.
2. Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху, то $\exists!\sup A$.

Доказательство.
Докажем п. 2.

Пусть B — множество всех верхних границ A, т.е. $\forall\, a \in A \ \ \forall\, b \in B : a \leqslant b$.

Тогда по аксиоме полноты получаем, что $\exists\, c : \forall\, a \in A \ \ \forall\, b \in B \ \ a \leqslant c \leqslant b$.

Следовательно, c — $\sup A$ (по определению).

Покажем, что c единственно. Пусть это не так и c_1, c_2 — $\sup A$. Тогда рассмотрим два случая:

1. $c_1 < c_2 \implies c_2$ не является супремумом $\implies$ противоречие.

2. $c_2 < c_1 \implies c_1$ не является супремумом $\implies$ противоречие.

Следовательно, $c_1 = c_2 \implies \sup A$ — единственный. □

Следствие.
1. $B \subset A$, $B \neq \varnothing$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geqslant \inf A$.
2. $B \subset A$, $B \neq \varnothing$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leqslant \sup A$.

Доказательство.
Докажем п. 1.

Пусть $a = \inf A$. Тогда a — нижняя граница $A \implies \forall\, x \in A : a \leqslant x \implies \forall\, x \in B : a \leqslant x \implies$ a — нижняя граница $B \implies a \leqslant \inf B$. □

Замечание. Теорема неверна без аксиомы полноты:

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет sup.

Теорема 1.5.

1. $a = \inf A \iff \begin{cases} a \leqslant x \ \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$

2. $b = \sup A \iff \begin{cases} x \leqslant b \ \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Докажем п. 1.

$a = \inf A \iff a$ — наибольшая из всех нижних границ A

$$\iff \begin{cases} a \text{ — нижняя граница} \\ \text{число} > a \text{ не является нижней границей} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \leqslant x \ \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$ □

Замечание.

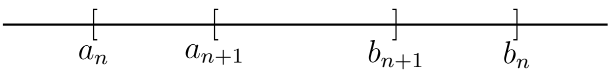
Если A не ограничено сверху, то $\sup A = +\infty$.

Если A не ограничено снизу, то $\inf A = -\infty$.

1.5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 1.6. $[a_1,\, b_1] \supset [a_2,\, b_2] \supset [a_3,\, b_3] \supset ...$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n,\, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.



Доказательство.

$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$

A лежит левее B, т.е. $a_i \leqslant b_j \ \ \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}$.

При этом $\forall\, i \leqslant j : a_i \leqslant a_j \leqslant b_j$, $\forall\, i \geqslant j : a_i \leqslant b_i \leqslant b_j$.

По аксиоме полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} : a_i \leqslant c \leqslant b_j \ \ \forall\, i,\, j \in \mathbb{N} \implies a_i \leqslant c \leqslant b_i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. □

Замечание.

1. Для интервалов и полуинтервалов неверно.

   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0;\ \frac{1}{n}] = \varnothing$.

2. Для лучей также неверно.

   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [n;\ +\infty) = \varnothing$.

3. Без аксиомы полноты также неверно.

   Пример: $\pi = 3,1415926535...$

   $[3;\ 4] \supset [3,1;\ 3,2] \supset [3,14;\ 3,15] \supset ...$

   В пересечении нет рациональных чисел.

2. Последовательности вещественных чисел

2.1. §3 Число e

Лемма (Неравенство Бернулли). Если $x > -1, n \in \mathbb{N}$, то $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Доказательство. по индукции.

База $n = 1$ – очевидно.

Инд. переход. $n \to n+1$

Знаем, что $(1+x)^n \geqslant 1+nx \Longrightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$.

Что и требовалось. □

Замечание.

- Равенство лишь когда $n = 1$ или $x = 0$.
- Неравенство верно и для $n \in \mathbb{R}$ $n \geqslant 1$ или $n \leqslant 0$. При $0 \leqslant n \leqslant 1$ неравенство верно с обратным знаком.

Пример 1.

$|\,a\,| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Докажем для $|\,a\,|$, что $\frac{1}{|\,a\,|} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{|\,a\,|} = 1 + x$, где $x > 0$

$(\frac{1}{|\,a\,|})^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx > nx$

$|\,a\,|^n \leqslant \frac{1}{nx} \to 0 \Longrightarrow |\,a\,|^n \to 0$

Пример 2.

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ Покажем, что y_n монотонно убывает.

$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}}{\frac{n^n}{(n-1)^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} = \frac{n+1}{n}(\frac{n^2-1}{n^2})^n$

$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n}{n+1}(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geqslant \frac{n}{n+1}(1+\frac{n}{n^2-1}) = \frac{n}{n+1}(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$

Д-м, что x_n монотонно возрастает.

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n^2})^n > \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n}) = 1$

$2 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < y_n < y_{n-1} < y_{n-2} < ... < y_1 = 4$

А значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

***Определение* 2.1.** $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

Свойства.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$ по произведению пределов
2. $\forall n$ $x_n < e < y_n$

Доказательство. $x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < ...$

$x_{n+1} < x_k$ при $k \geqslant n+2 \implies x_{n+1} \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} x_k = e \implies x_n < x_{n+1} \leqslant e$ □

3. $2 < e < 3$, т.к. $x_1 = 2$, а $e < y_{10} < 3$.

4. $e \approx 2.718281828459045235360287$

   $y_n - x_n = (1+\frac{1}{n}-1)(1+\frac{1}{n})^n < \frac{e}{n}$

Теорема 2.1. $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Доказательство.

$l = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k}$. Пусть $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Тогда найдется N, т.ч. $\forall k \geqslant N \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} - l \right| < \varepsilon$

Значит $\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{1+l}{2}$.

Тогда $x_k = x_N \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot ... \cdot \frac{x_k}{x_{k-1}} < x_N (\frac{1+l}{2})^{k-N} \to 0$ □

***Следствие 1.*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, если $a > 1$.

Доказательство.

$x_n = \frac{n^k}{a^n}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n} = (\frac{n+1}{n})^k \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$ □

***Следствие 2.*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Доказательство. Можно считать, что $a > 0$.

$x_n = \frac{a^n}{n!}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{(n)!} = a\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$. □

***Следствие 3.*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство.

$x_n = \frac{n!}{n^n}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$ □

Теорема 2.2 (Теорема Штольца)**.**

x_n, y_n

y_n строго монотонно возрастает. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$.

   $\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$

   $n > m \geqslant N$

   $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{m+1} - x_m) = \varepsilon_n(y_n - y_{n-1}) + ... + \varepsilon_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$

$|\, x_n - x_m \,| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |\, \varepsilon_k \,| \, (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum\limits_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_n - y_m)$

Поскольку $y_n \to +\infty$ $y_n > 0$ начиная с какого-то номера. Можно считать, что с номера N.

$|\, x_n - x_m \,| < \varepsilon(y_n - y_m) < \varepsilon y_n$

$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_m}{y_n} \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon + \frac{|\, x_m \,|}{y_n} < 2\varepsilon$

Выберем такой номер N_1, что $y_n > \frac{|\, x_m \,|}{\varepsilon_n}$

Следовательно, если $n \geqslant \max{(N, N_1)}$, то $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < 2\varepsilon$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2. $l \in \mathbb{R}$ $\widetilde{x}_n = x_n - l y_n$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l = l - l = 0$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - l y_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} - l = 0 \quad \implies \quad \frac{x_n}{y_n} = l$

3. $l = +\infty$

   Проверим, что x_n строго монотонно возрастает начиная с некоторого места.

   $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$

   Значит, начиная с некоторого номера N $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$.

   Значит $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n$ строго возрастает.

   $x_n - x_N = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{N+1} - x_N) > (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \to +\infty$

   А значит $x_n \to +\infty$

   $\implies$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

4. $l = -\infty$

   Аналогично с пунктом 3.

□

Пример. к теореме Штольца:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$, $m \in \mathbb{N}$

$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^n, y_n = n^{m+1}, y_n \to +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^m}{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - (1 - \frac{1}{n})^{m+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(m+1)\frac{1}{n} + ... \frac{1}{n^2} + ... \frac{1}{n^3} + ...} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(m+1) + ... \frac{1}{n} + ... \frac{1}{n^2} + ...} = \frac{1}{m+1}$

Тогда по теореме Штольца:

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$

Теорема 2.3 (Теорема Штольца-2).

y_n – строго монотонная последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$

   $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$

   Тогда $\exists N \;\; \forall k \geqslant N \quad |\, \varepsilon_k \,| < \varepsilon$

   Рассмотрим $n > m \geqslant N$

   $x_n - x_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1})$

   Тогда $|\, x_n - x_m \,| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |\, \varepsilon_k \,| \, (y_k - y_{k-1}) < \sum\limits_{k=m+1}^{n} \varepsilon (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m)$

   Тогда устремим $n \to \infty$

   $|\, x_n - x_m \,| \to |\, x_m \,|, \varepsilon(y_n - y_m) \to \varepsilon(-y_m)$.

   А теперь по теореме о двух миллиционерах $x_n \leqslant -\varepsilon y_m = \varepsilon \,|\, y_m \,|$, т.к. $y_m < 0$

   $\implies$

   $|\, x_n \,| \leqslant \varepsilon \,|\, y_m \,| \implies \left| \frac{x_n}{y_m} \right| \leqslant \varepsilon$, и это верное $\forall m \geqslant N \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

2. $l \in \mathbb{R}$

   $\tilde{x}_n = x_n - l y_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

3. $l = +\infty$

   Проверим, что x_n строго монотонно(начиная с некоторого места)

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \implies$ при $n \geqslant N \;\; \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \implies x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n$ строго монотонно возрастает при $n \geqslant N$

   Значит, можно поменять x и y

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

   Т.к. $x_n \nearrow, y_n \nearrow \implies x_n < 0, y_n < 0 \implies \frac{x_n}{y_n}$ – положительно.

4. $l = -\infty$

   Вместо x_n напишем $\tilde{x}_n = -x_n$, получим предыдущий пункт.

$\square$

2.2. §4. Подпоследовательности

***Определение* 2.2.**

$x_1, x_2, x_3, \ldots$

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, причем все $n_i \in N$

Тогда <u>подпоследовательность</u> исходной последовательности:

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$

Пример.

$1, 2, 3, 4, 5, ...$

1. $2, 4, 6, 8, ...$ – подпоследовательность
2. $1, 4, 9, 16, 25, ...$ – подпоследовательность
3. $1, 1, 2, 3, 5, ..$ – не подпоследовательность

Свойства.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел любой подпоследовательности тоже равен l.

   Доказательство. Если снаружи интервала было лишь конечное число членов последовательности, то и у подпоследовательности было конечное число членов снаружи этого интервала.(подпоследовательность – стерли некоторые члены последовательности) ☐

2. Если $n_1, n_2, n_3, ...$ это последовательность $\{n_k\}$

   и $m_1, m_2, m_3, ...$ это последовательность $\{m_l\}$

   и в объединении это все натуральные числа, то:

   Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{l\to\infty} x_{m_l} = a \in \overline{\mathbb{R}}$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   Доказательство. Есть интервал. Вне его конечное число x_{n_k} и вне интервала конечное число x_{m_l}. Поскольку все x либо там, либо там, то снаружи просто конечное число членов x_n. ☐

Теорема 2.4 (О стягивающихся отрезках)**.**

Есть много отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Тогда существует единственное $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках, это пересечение не пусто. Надо проверить, что там нет двух точек.

Пусть там лежат точки $c < d$

Тогда $d - c \leqslant b_n - a_n$.

Перейдем в неравенстве к пределу:

$d - c \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Получили противоречие. Осталось проверить лишь пределы концов отрезка.

$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n \to 0 \implies c - a_n \to 0$, а это тоже самое, что $a_n \to c$

Аналогично $0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0 \implies b_n - c \to 0$, а это тоже самое, что $b_n \to c$ ☐

Теорема 2.5 (Теорема Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую конечный предел.

Доказательство.

Пусть a – нижняя граница, b – верхняя граница для всех x_n.

Значит, $x_n \in [a, b] \ \ \forall n$

Хотя бы в одну половинку от этого отрезка попало бесконечное число членов последовательности. Пусть эта новая половинка – $[a_1, b_1]$.

В хотя бы одной половинке этого отрезка снова бесконечное число членов последовательности. Эта половинка $[a_2, b_2]$.

Действуем так и дальше.

Заметим, что $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

Следовательно, по теореме о стягивающихся отрезках, есть ровно одна общая точка. $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Теперь строим подпоследовательность.

Пусть x_{n_1} – произвольный элемент последовательности из отрезка $[a_1, b_1]$

x_{n_2} – такой элемент из $[a_2, b_2]$, что $n_2 > n_1$. (найдется в силу бесконечности членов, содержащихся в данном отрезке)

x_{n_3} – такой элемент последовательности из $[a_3, b_3]$, что $n_3 > n_2$.

Продолжаем.

Получим:

$n_1 < n_2 < n_3 < ...$

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} ...$ – подпоследовательность, причем $x_{n_k} \in [a_n, b_n]$.

$a_n \leqslant x_{n_k} \leqslant b_n$, причем $a_n \to c, b_n \to c \implies x_{n_k} \to c$. Что нам и требовалось.

□

Лемма.

1. Пусть x_n – монотонно возрастающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

2. Пусть x_n – монотонно убывающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim x_n = -\infty$

Доказательство.

Докажем только первый пункт, второй точно такой же.

Взяли какое-то E. Тогда E не является верхней границей для $\{x_n\}$. Тогда $\exists N \ \ x_N > E$. Но т.к. последовательность возрастает, то все большие тоже больше E.

Получаем, что $\forall n > N \ \ x_n > x_N > E \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ по определению. □

Следствие.

1. Из любой неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$

2. Из любой неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

1. Выберем монотонно возрастающую неограниченную подпоследовательность. Тогда автоматически ее предел будет $+\infty$

   1 не является верхней границей последовательности. $\implies \exists x_{n_1} > 1$.

   $\max\{x_1, x_2, ...x_{n_1}, 2\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_2}$, больший этого max.

   Во-первых, тогда $x_{n_2} > 2$ и $n_1 < n_2$.

   $\max\{x_1, x_2, ...x_{n_2}, 3\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_3}$, больший этого max. Заметим, что тогда $x_{n_3} > 3$ и $n_3 > n_2$.

   И так далее.

   Получаем:

   $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < ...$, причем $x_{n_k} > k$, причем $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < ....$

   Получаем, что это монотонно возрастающая и неограниченная подпоследовательность.

   $\implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

□

Следствие. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Доказательство.
Если ограничена, то это теорема Больцано-Вейерштрасса. Если не ограничена, то это предыдущее следствие. □

Определение 2.3. x_n называется фундаментальной(сходящейся в себе или последовательностью Коши), если $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall m, n \geqslant N \implies |\, x_n - x_m \,| < \varepsilon$.

Свойства.

1. Фундаментальная последовательность ограничена.

   Доказательство. Подставим $\varepsilon = 1$ тогда $\exists N\ \ \forall m, n \geqslant N\ \ \ |\, x_m - x_n \,| < \varepsilon$.

   Возьмем $M = \max\{|\, x_1 \,|, |\, x_2 \,|, |\, x_3 \,|, ..., |\, x_N \,|\} + 1$.

   Покажем, что $|\, x_n \,| \leqslant M$.

   Если $n < N$, то очевидно.

   Если $n \geqslant N \implies |\, x_n - x_N \,| < 1,\ \ |\, x_n - x_N \,| + |\, x_N \,| \geqslant |\, x_n \,|$ (по сумме модулей) $\implies |\, x_n \,| < M$

   □

2. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность сходится.

   Доказательство. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

   $\{x_{n_k}\}$ – сходящаяся подпоследовательность, т.е. $\lim x_{n_k} = l \in \mathbb{R}$.

   Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

   Зафиксируем $\varepsilon > 0$

$\exists N \;\; \forall m, n \geqslant N \;\; |\, x_m - x_n \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists K \;\; \forall k \geqslant K \;\; |\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{N} = \max\,(N, n_K)$

Пусть $n \geqslant \tilde{N}$ тогда $|\, x_n - x_m \,| < \frac{\varepsilon}{2}$, если $m \geqslant \tilde{N}$.

В качестве m возьмем n_k, т.ч. $k \geqslant K$ и $n_k \geqslant N$.

$|\, x_n - x_{n_k} \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|\, x_n - l \,| \leqslant |\, x_n - x_{n_k} \,| + |\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Теорема 2.6 (Критерий Коши)**.**
Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел $\iff$ $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Доказательство.
“ $\Longrightarrow$ ”:

Пусть $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$\exists N \;\; \forall n \geqslant N \,|\, x_n - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m \geqslant N \,|\, x_m - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow \; |\, x_n - x_m \,| \leqslant |\, x_n - l \,| + |\, l - x_m \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Док-во в другую сторону:

$\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда она ограничена. А по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющая конечный предел. Тогда по свойству 2 фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ имеет конечный предел. □

***Определение* 2.4.** Частичные пределы.

$\{x_n\}$ – последовательность. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ – частичный предел, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

Теорема 2.7. l – частичный предел $\iff$ в любой окрестности l есть бесконечно много членов последовательности.

Доказательство.
Стрелочка “ $\Longrightarrow$ ” очевидна.

Докажем в другую сторону.

$\forall \varepsilon > 0$ в интервале $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ бесконечно много членов последовательности.

Посмотрим на интервал $(l-1; l+1)$. Там бесконечно много членов последовательности. Возьмем один из них. Он x_{n_1}

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. В $(l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_1. Он x_{n_2}.

$\varepsilon = \frac{1}{3}$. В $(l - \frac{1}{3}; l + \frac{1}{3})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_2. Он x_{n_3}.

И так далее.

В итоге получается набор индексов, который строго растет.

$n_1 < n_2 < n_3 < ...$

Еще знаем, что $x_{n_k} \in (l - \frac{1}{k}; l + \frac{1}{k})$.

$x_{n_k} - l \in (-\frac{1}{k}; +\frac{1}{k})$

Заметим, что т.к. обе границы интервала стремятся к 0, то $x_{n_k} - l \to 0 \implies x_{n_k} \to l$.

Если $l = +\infty$

$E = 1 \qquad (1; +\infty) \qquad x_{n_1}$

$E = 2 \qquad (2; +\infty) \qquad x_{n_2} \;\; n_2 > n_1$

$E = 3 \qquad (3; +\infty) \qquad x_{n_3} \;\; n_3 > n_2$

Ну отсюда и получим, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. □

***Определение* 2.5.** $\{x_n\}$ – последовательность.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$

Еще обозначается как $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Определим нижний предел.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$.

Еще обозначается $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

Теорема 2.8. Верхний и нижний предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\lim} \leqslant \overline{\lim}$.

Доказательство.

$y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k, \quad z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$

$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\} = y_n \leqslant y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\}$

$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\} = z_n \geqslant z_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\}$.

Т.е. $y_n \nearrow$, $z_n \searrow$. Но монотонные последовательности всегда имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

$y_n \leqslant z_n$

$\implies \underline{\lim} \leqslant \overline{\lim}$.

□

Замечание.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf\limits_{n} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$

Теорема 2.9.

1. Верхний предел – наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел – наименьший из всех частичных пределов.
3. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Доказательство.

1. Докажем, что верхний передел – это частичный предел.

   $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. z_n убывает.

   Пусть $a \in \mathbb{R}$. $a \leqslant z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$.

Тогда при любом j найдется какой-то x_k, т.ч. $k \geqslant n \quad x_k > a - \frac{1}{j}$.

Выберем n_1 так, что $x_{n_1} > a - 1$.

$n_2 > n_1$ так, что $x_{n_2} > a - \frac{1}{2}$

$n_3 > n_2$ так, что $x_{n_3} > a - \frac{1}{3}$

$n_k > n_{k-1}$ так, что $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$

Во-первых $n_1 < n_2 < n_3 <$ ..., значит выбрали подпоследовательность. Осталось проверить предел.

$a - \frac{2}{k} < x_{n_k} \leqslant z_{n_k}$

Обе части неравенства стремятся к a. Тогда $x_{n_k} \to a$.

Пусть $a = +\infty$. Тогда $z_n = +\infty \implies x_n$ – неограниченная сверху последовательность. Тогда у нее есть подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$

Пусть $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$.

$-\infty \leqslant x_n \leqslant z_n \to -\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Почему же он наибольший из всех?

Докажем, что $\overline{\lim} \quad \geqslant \quad$ любого частичного предела.

Пусть $l = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда

$x_{n_k} \leqslant z_{n_k}$

$l = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2. $x_n \rightsquigarrow -\infty$

3. Пусть $l = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$. А так как $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

□

Теорема 2.10.

1. $b = \overline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geqslant N \ \ x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \geqslant N \ \ x_n > b - \varepsilon \end{cases}$

2. $a = \underline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geqslant N \ \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \geqslant N \ \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

Доказательство.

2. $(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geqslant N \ \ x_n > a - \varepsilon) \implies \inf\limits_{n \geqslant N} x_n \geqslant a - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ y_n > a - \varepsilon$

$(\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \geqslant N \ \ x_n < a + \varepsilon) \implies$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \inf x_n < a + \varepsilon \iff y_N < a + \varepsilon$. □

Теорема 2.11.

Если $x_n \leqslant y_n$, то $\underline{\lim} x_n \leqslant \underline{\lim} y_n$, $\overline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} y_n$.

Доказательство.

$x_n \leqslant y_n$.

$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leqslant \inf\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$

$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leqslant \sup\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$

И пишем lim. □

Замечание. Арифметические операции не сохраняются.

2.3. §5 Ряды.

***Определение* 2.6.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичная сумма ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если этот предел конечный, то ряд сходится.

Если предел бесконечный или не существует, то ряд расходится.

Теорема 2.12 (Необходимое условие сходимости ряда.)**.** Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$\sum a_n$ – сходится $\implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. □

Пример.

1. Геометрическая прогрессия.

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

   $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1})$.

   Если $|\,q\,| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

   $S_{2n} = 0$

   $S_{2n-1} = 1$

   А значит, предел не существует, ряд расходится.

3. Гармонический ряд.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ – гармонические числа.

Поймем, что $H_n \to +\infty$.

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

Если влезло m блоков, т.е. $n \geqslant 2^m$, тогда

$H_n > 1 + \frac{m}{2} \qquad H_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$

Получаем, что ряд расходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$

   Ряд сходится и его сумма 1.

Свойства.

1. Сумма ряда единственна. (ибо предел последовательности частичных сумм, а он единственен, если есть)

2. Расстановка скобок.

   $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + ...$ S его сумма.

   $(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + ...$

   Сумма такого ряда тоже S.

   $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6\ S_7...$

   Мы по сути берем подпоследовательность:

   $S_2\ S_3\ S_6\ S_8...$

   А значит, предел остается прежним, ежели был.

   Замечание. Мы могли расставить скобки так, чтобы предел ПОЯВИЛСЯ.

   $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$

3. Добавление/выкидывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но может поменять сумму.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$

   $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad \tilde{S}_n = a_m + a_{m+1} + ... + a_{n+m-1}$

   $\tilde{S}_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}$.

   А S_{m-1} – это фиксированное число.

4. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся.

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится и ее значение равно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

   Доказательство.

   $A_n = \sum a_k, B_n = \sum b_k$

   $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $\sum(a_n + b_n)$

$S_n = \sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k = A_n + B_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} Sn = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n + \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A + B.$

$\square$

5. Пусть $\sum a_n$ сходится и $c \in \mathbb{R}$.

   Тогда $\sum ca_n$ сходится и по сумме равна $c\sum a_n$

   Доказательство. $S_n = \sum ca_n = c\sum a_n = cA_n \to cA.$ $\square$

3. Предел и непрерывность функций

3.1. §1 Предел функций.

***Определение* 3.1.**

Окрестность точки a будем обозначать $U_\varepsilon = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ при некотором ε.

Проколотая окрестность точки a – это $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon \backslash \{a\}$

Окрестность $+\infty$ – луч $(E, +\infty)$

Окрестность $-\infty$ – луч $(-\infty, E)$

***Определение* 3.2.** $X \subset \mathbb{R}$. a – предельная точка X, если $\forall$ проколотой окрестности точки a пересечение ее с X не пусто.

***Определение* 3.3.** Если $a \in X$ не является предельной, то a – изолированная точка.

Теорема 3.1.

Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества X
2. В любой окрестности точки a существует бесконечно много точек множества X.
3. Существует такая последовательность точек $x_n \in X$, т.ч. $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Замечание. Последовательность из пункта 3 можно выбрать так, что $|\,x_n - a\,|$ строго монотонно убывает.

Доказательство.

3. $\implies$ 1., 2. – очевидно.

$\lim x_n = a \implies$ все члены последовательности с какого-то номера лежат в $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

2. $\implies$ 1..

В окрестности бесконечно много точек из $X \implies$ хотя бы одна точка отличается от a.

А значит, в проколотой окрестности есть точка из X.

1. $\implies$ 3.

a – предельная точка X.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_1.

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, |\,x_1 - a\,|\}$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_2.

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{3}, |\,x_2 - a\,|\}$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_3.

Делаем так дальше.

$|\,a - x_k\,| < \frac{1}{k}$

$a - \frac{1}{k} < x_k < a + \frac{1}{k}$.

Две штуки стремятся к a, значит $x_k \to a$.

□

Пример предельных точек.

1. (a, b)

   Множество предельных точек этого интервала – $[a, b]$ Ясно, что любая точка, принадлежащая интервалу – предельная. Точки на концах – тоже(любой интервал будет пересекать).

2. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$.

   Множество предельных точек тоже $[a, b]$. (Т.к. в любой окрестности любой точки есть вещественные числа)

***Определение* 3.4** (предел функции в точке)**.**

$E \subset \mathbb{R}$

$f : E \to \mathbb{R}$, a– предельная точка множества E.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (предел функции f в точке a), если

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; \wedge 0 < |\, a - x \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

   (определение по Коши)

2. Для любой окрестности U_A точки A найдется проколотая окрестность $\dot{U}_a$ точки a, т.ч. $f(E \cap \dot{U}_a) \in U_A$.

   (определение на языке окрестностей)

3. Для любой последовательности $\{x_n\}$, т.ч. $a \neq x_n \in E \wedge \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

   (определение по Гейну)

Утверждение 3.2. Определения по Коши и на языке окрестностей равносильны.

Доказательство. равносильности первых двух определений.

Заметим, что 1). $\iff$ 2)..

$\dot{U}_a = (a - \delta; a + \delta) \backslash \{a\}$

$x \in \dot{U}_a \iff 0 < |\, x - a \,| < \delta$

$x \in E \wedge 0 < |\, x - a \,| < \delta \iff x \in E \cap \dot{U}_a$

$U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

$y \in U_A \iff |\, y - A \,| < \varepsilon$

$\forall x \in E \cap \dot{U}_a \implies f(x) \in U_A$

Итого это расшифровывается как:

$\forall x \in E \;\; 0 < |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Т.е. эти два определение утверждают ровно одно и то же. □

Замечание.

Можем обобщить определение:

$A = +\infty \quad U_A = (p; +\infty)$

$A = -\infty \quad U_A = (-\infty; p)$

Свойства.

1. Предел – локальное свойство.

Т.е. если есть две функции, совпадающие в некоторой окрестности точки, то пределы в этой точки у них одинаковые.

Если f и $g : E \to \mathbb{R}$ и $f(x) = g(x)$ в некоторой $\dot{U}_a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если один из них существует, или оба предела не существуют.

2. Значение функции в самой точке a не участвует в определении (нам все равно, какое оно).

3. Локальная ограниченность.

   Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

   Тогда $\exists\, U_a$, в которой f ограничена.

   Доказательство. Воспользуемся определением по Коши.

   $\varepsilon = 1 \exists\delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |\, x - a\,| < \delta \quad |\, f(x) - A\,| < 1 \implies |\, f(x)\,| \leqslant |\, A\,| + |\, f(x) - A\,| < |\, A\,| + 1$.

   Если $x \in E \cap U_a$, где $U_a = (a - \delta, a + \delta)$.

   Итого $|\, f(x)\,| \leqslant \max\{|\, A\,| + 1, |\, f(a)\,|\}$ □

   Замечание. А вот глобальной ограниченности может не быть.

   $f(x) = \frac{1}{x} \quad E = (0; +\infty)$

   $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$, но глобальной ограниченности нет. Близко походим к нулю – $\frac{1}{x}$ становится очень большой.

4. Для того, чтобы в определении по Гейне существовал предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ достаточно, чтобы для любой последовательности $a \neq x_n \in E \;:\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ существовал $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. (совпадение этих пределов для разных последовательностей требовать не обязательно.)

   Доказательство. Предположим, что есть две последовательности, у которых получаются разные пределы.

   Пусть $a \neq x_n \in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

   $a \neq y_n \in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$

   Покажем, что тогда $A = B$.

   $\{z_n\} : \quad x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...$

   Заметим, что $a \neq z_n \in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = C$

   Тогда $f(x_n)$– просто подпоследовательность для последовательности $f(z_n) \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =$

   $= C \implies A = C$.

   Аналогично $B = C$.

   А значит, $A = B$. □

Теорема 3.3. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Более того, в определении по Гейне можно ограничиться лишь монотонными последовательностями $\{x_n\}$.

Доказательство.

Коши $\implies$ Гейне.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \wedge 0 < |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - A\,| < \varepsilon$

Рассмотрим произвольную последовательность $a \neq x_n \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и докажем для нее, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему возьмем $\delta > 0$ из определения по Коши.

$\exists N \;\; \forall n \geqslant N \quad |\, x_n - a\,| < \delta$.

Покажем, что при $n \geqslant N \quad |\, f(x_n) - A\,| < \varepsilon$.

Если $n \geqslant N \quad |\, x_n - a\,| < \delta \quad a \neq x_n \in E$

$\implies x_n \in E \wedge 0 < |\, x_n - a\,| < \delta$

$\implies |\, f(x_n) - A\,| < \varepsilon$.

А это мы и хотели.

Теперь покажем, что Гейне $\implies$ Коши.

Ограничимся, кстати, только монотонными последовательностями.

Предположим, что определение по Коши не выполняется, т.е.

$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in E \wedge 0 < |\, x - a\,| < \delta$ и т.ч. $|\, f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$.

Зафиксируем это ε.

Подставим $\delta = 1$. Тогда $\exists x \in E \;\; x \neq a \quad |\, x - a\,| < 1 \wedge |\, f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_1.

Подставим $\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, |\, x_1 - a\,|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E \quad x \neq a \quad |\, x - a\,| < \delta_2 \wedge |\, f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_2. Тогда заметим, что $|\, x_2 - a\,| < |\, x_1 - a\,| \wedge |\, x_2 - a\,| < \frac{1}{2}$.

$\delta_3 = \min\{\frac{1}{3}, |\, x_2 - a\,|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E \;\; x \neq a \quad |\, x - a\,| < \delta_3 \wedge |\, f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_3. Тогда заметим, что $|\, x_3 - a\,| < |\, x_2 - a\,| \wedge |\, x_3 - a\,| < \frac{1}{3}$.

Продолжим так дальше. Что же получилось?

$|\, f(x_n) - A\,| \geqslant \varepsilon$ при всех n.

$|\, x_n - a\,| < \delta_n \leqslant \frac{1}{n} \implies x_n \to a$

$|\, x_1 - a\,| > |\, x_2 - a\,| > |\, x_3 - a\,| > ...$

Заметим, что вообще-то уже получили противоречие с определением по Гейне. Но мы еще обещали монотонность!

У нас точки приближаются к a, но по разные стороны. Хотя бы с одной стороны членов бесконечное количество. Выкинем все остальное.

Тогда $x_{n_k} \to a$ и x_{n_k} будет монотонна. $\square$

Упражнение. Понять, что определения по Гейне и на языке окрестностей для $A = \pm\infty$ и/или $a = \pm\infty$ равносильны.

Свойства пределов.

1. Предел единственен в $\overline{\mathbb{R}}$

   Доказательство. От противного.

   Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

   Поскольку a– предельная точка E, то существуют $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B.$

По единственности предела последовательностей получаем, что $A = B$. $\square$

2. Стабилизация знака.

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$

   Тогда $\exists \dot{U}_a$, т.ч. при $x \in \dot{U}_a \cap E$ у чисел $f(x)$ и A одинаковый знак.

   Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, $U_A = (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$(от 1 до $+\infty$, если А – бесконечность) $\exists \dot{U}_a$, т.ч. $f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$.

   А в U_A лежит A и все числа одного знака.

   $\implies \forall x \in \dot{U}_a \cap E \quad f(x)$ и A одного знака. $\square$

Теорема 3.4 (об арифметических действиях с пределами)**.**
$f, g : E \to \mathbb{R}$, a– предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

Тогда

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim f(x)g(x) = AB$
3. $\lim cf(x) = cA$
4. Если $B \neq 0$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($\frac{f(x)}{g(x)}$ определено лишь в некоторой окрестности точки a).

Доказательство.

1. Берем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim x_n = a$.

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B.$

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$

   $\implies \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$

   Все остальное аналогично.

2. Поскольку $B \neq 0$, $g(x)$ имеет тот же знак, что и B в некоторой окрестности точки a. А значит, $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a. И далее как в пункте 1) с определением по Гейне.

$\square$

Оговорка – все эти свойства можем писать и для бесконечностей в тех же случаях, что и с последовательностями.

Теорема 3.5 (Предельный переход в неравенстве.)**.** $f, g : E \to \mathbb{R}, a$– предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E$.

Тогда $A \leqslant B$.

Доказательство.

Берем $a \neq x_n \in E$,т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B \quad f(x_n) \leqslant g(x_n)$

Тогда по теореме из последовательностей $A \leqslant B$. □

Замечание. Достаточно выполнения неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E \cap \dot{U}_a$.

Теорема 3.6 (о двух милиционерах)**.**

$f, g, h : E \to \mathbb{R}, a-$ предельная точка E.

$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ при $x \in E$.

и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$a-$ предельная точка из $E \implies$ найдется $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем любую такую последовательность.

Тогда $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$.

Еще мы знаем, что $f(x_n), h(x_n) \to A$.

Пользуясь теоремами про последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \implies \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. □

***Определение* 3.5.** Односторонние пределы.

$f : E \to \mathbb{R} \quad a$

$E_1 = (-\infty, a) \cap E \quad f_1 = f|_{E_1}-$ сужение на множество. Пусть a – предельная точка для E_1.

Если $A = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, то $A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ (левый предел)

$E_2 = (a, +\infty) \cap E \quad f_2 = f|_{E_2}-$ сужение на множество. Пусть a – предельная точка для E_2.

Если $B = \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ (правый предел)

Пример.

$f(x) = [x]$ – целая часть.

$\lim\limits_{x\to n+} [x] = n$

$\lim\limits_{x\to n-} [x] = n - 1$

Попереписываем всякие определения: Перепишем определение левого предела с помощью $\varepsilon - \delta$.

$A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E_1 \ : 0 < |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Это означает:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ : a - \delta < x < a \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Аналогично $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ : a < x < a + \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Осознаем, как будет выглядеть определение по Гейне.

$A = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

$\forall$ последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно возрастает, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

$B = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

$\forall$ последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно убывает, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$.

***Определение* 3.6.**

$f : E \to \mathbb{R}$

f монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$

f строго монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) < f(y)$

f монотонно убывает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) \geqslant f(y)$

f строго монотонно убывает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) > f(y)$

Замечание. Если $E = \mathbb{N}$, то это определение монотонности для последовательности $x_n = f(n)$.

Теорема 3.7.

$f : E \to \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E \cap (-\infty, a)$.

1. Если f монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
2. Если f монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
3. Если f монотонно возрастает и не ограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$.
4. Если f монотонно убывает и не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающую последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   Тогда $f(x_n)$ – монотонно возрастающая последовательность. (т.к. $x_n \leqslant x_{n+1}$, а функция монотонно возрастающая)

   Если f ограничена сверху, то $\forall x \in E \;\; f(x) \leqslant M \implies f(x_n) \leqslant M \;\; \forall n$.

   А значит, $f(x_n)$– монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность. $\implies$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

   Тогда все эти пределы равны между собой.

   Упражнение. Почему для монотонных последовательностей в Гейне факт "достаточно лишь, чтобы предел был" тоже верен.

3. $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   $\implies f(x_n)$ монотонно возрастает.

   $\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ конечный или бесконечный.

   $\implies$ все пределы равны.

   Предъявим теперь последовательность такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$.

f неограничена сверху на $E \cap (-\infty, a)$

$\implies \exists x_1 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_1) > 1$.

$\max\{2, f(x_1)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_2 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_2) > \max\{2, f(x_1)\}$

Заметим, что тогда $x_2 > x_1$

$\max\{3, f(x_2)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_3 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_3) > \max\{3, f(x_2)\}$

Заметим, что тогда $x_3 > x_2$

В результате получили последовательность $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ и $f(x_k) > k \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$

Объяснение, почему $\{x_n\}$ стремится к a:

Существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то если это $b < a$, то $f(x_n) \leqslant f(b) \implies$ ограничена.

$\square$

Теорема 3.8 (Критерий Коши для предела функций.)**.** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in E : 0 < |\,x - a\,| < \delta, 0 < |\,y - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$.

Доказательство.

Докажем "$\implies$".

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Напишем определение:

$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\ \forall x \in E\ \ : 0 < |\,x - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - A\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall y \in E\ \ : 0 < |\,y - a\,| < \delta \implies |\,f(y) - A\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\forall x, y \in E\ \ : 0 < |\,x - a\,| < \delta, 0 < |\,y - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - f(y)\,| \leqslant |\,f(x) - A\,| + |\,f(y) - A\,| < \varepsilon$. Что нам и требовалось.

Докажем в обратную сторону. Будем проверять по определению Гейне.

Возьмем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\forall\delta > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ 0 < |\,x_n - a\,| < \delta$

$\implies$ найдется N, начиная с которого верно $x_n \in E \wedge 0 < |\,x_n - a\,| < \delta$.

$\implies \forall m, n \geqslant N\ \ |\,f(x_n) - f(x_m)\,| < \varepsilon$

Получили определение фундаментальной последовательности. Значит, у нее есть конечный предел. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Получаем, что по Гейне есть предел у функции в точке.

Критерий Коши доказан. $\square$

3.2. §2 Непрерывные функции.

***Определение* 3.7.**

$f : E \to \mathbb{R}\quad a \in E$.

f непрерывна в точке a, если:

1. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E$ и $|\,x - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$

2. $\forall U_{f(a)}$– окрестность точки a $\exists U_a$– окрестность точки a, т.ч. $f(U_0 \cap E) \subset U_{f(a)}$

3. Если a– предельная точка множества E, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

   Если a– не предельная точка, то всегда непрерывна в точке.

4. Для любой последовательности $x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Утверждение 3.9. Все 4 определения равносильны.

Доказательство.

Очевидно, что 1. и 2. – одно и то же(см. выше)

Покажем, что 2. и 3. – одно и то же.

Если a– предельная точка E $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall U_{f(a)}$ $\exists \dot{U}_a$ $f(E \cap \dot{U}_a) \subset U_{f(a)}$

Заметим, что $f(a) \in U_{f(a)}$, а значит проколотость ни на что не влияет.

Если a– не предельная (.) E.

$\implies \exists \dot{U}_a$, т.ч. $\dot{U}_a \cap E = \varnothing$ $U_a \cap E = \{a\}$

$\{f(a)\} = f(a) = f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

Покажем, что 3. и 4. – одно и тоже.

Если точка не предельная, то говорим о пустых множествах, неинтересно.

Если точка предельная $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \iff$ определение по Гейне.

$\forall x_n \in E$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Заметим, что если втыкать в последовательность члены, равные пределу, то предел не испортится. □

Пример.

1. $f(x) = c$.

   $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a)\,| = 0 < \varepsilon$.

   Подходит любое δ.

2. $f(x) = x$

   $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$.

   Подходит $\delta = \varepsilon$.

3. $f(x) = [x]$

   $a \in \mathbb{Z}$

   Поймем, что тут нет непрерывности.

   Какую бы не взяли окрестность точки a, есть x такой, что $f(x) = a-1$. Тогда $|\, f(x) - f(a)\,| = |\, a - (a-1)\,| = 1$.

   Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ определение не выполнено.

Упражнение. $f(x) = \left|\, \{x\} - \frac{1}{2} \,\right|$ понять все про непрерывность.

Теорема 3.10 (об арифметический действиях с непрерывными функциями)**.** $f, g : E \to \mathbb{R} \quad a \in E$.

f, g непрерывны в (.) a. Тогда:

1. $f \pm g$ непрерывна в (.) a
2. fg непрерывна в (.) a
3. cf непрерывна в (.) a
4. $|\, f\, |$ непрерывна в (.) a
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в (.) a

Доказательство.

Если a– предельная точка E, то все утверждения – это утверждения про пределы функций.

Если a– не предельная, то надо проверить про 1 точку. □

Следствие.

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции (отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в 0.

Доказательство.

1. $f(x) = x$– непрерывна во всех точках.

   $x^k = x \cdot x \cdot x ...$– непрерывны во всех точках.

   $a_k x^k$ – непрерывны во всех точках.

   $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ – непрерывна во всех точках.

2. $P(x), Q(x)$– многочлены, непрерывны во всех точках.

   Если $Q(x) \neq 0$, то по пункту 5 $\frac{P}{Q}$ непрерывны во всех не 0.

□

Теорема 3.11 (О стабилизации знака)**.**

$f : E \to \mathbb{R}, \;\; a \in E, \;\; f$ – непрерывна в (.) a и $f(a) \neq 0$. Тогда найдется окрестность U точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap E \;\; f(x)$ и $f(a)$ одного знака.

Доказательство.

Пусть $f(a) > 0 \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) > 0$.

$\varepsilon = \frac{f(a)}{2} \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in E \;\; |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$.

$\implies f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ в $U = (a - \delta, a + \delta)$. □

Теорема 3.12 (Непрерывность композиции)**.**

$f : E \to \mathbb{R}, \;\; g : D \to \mathbb{R}, \;\; f(E) \subset D$

$a \in E$

f – непрерывна в (.) a, g непрерывна в (.) $f(a)$

Тогда $g \circ f(x) = g(f(x))$ – непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a – не предельная точка, то говорить не о чем.

Если a – предельная точка, то

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a))$.

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall y \in D$ и $|\,y - f(a)\,| < \delta \implies |\,g(y) - g(f(a))\,| < \varepsilon$.

$\forall\delta > 0\ \ \exists\gamma > 0\ \ \forall x \in E\quad |\,x - a\,| < \gamma \implies |\,f(x) - f(a)\,| < \delta$.

$y = f(x) \in D\quad |\,y - f(a)\,| < \delta$

$\implies |\,g(f(x)) - g(f(a))\,| < \varepsilon$ (т.к. $\ g(f(x)) = g(y)$).

Получаем, что

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\gamma > 0\ \ \forall x \in E\quad |\,x - a\,| < \gamma \implies |\,g(f(x)) - g(f(a))\,| < \varepsilon$.

А это и есть непрерывность $g \circ f$ в точке a. □

Замечание.

Для пределов утверждение неверно. (Чтобы было верно, нужна непрерывность внешней функции)

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0 \\ 1 & \text{при } y \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$

НО.

$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ не существует, ибо есть две последовательности с разными пределами:

$x_n = \frac{1}{\pi n} \implies g(f(x_n)) = 0$

$x_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \implies g(f(x_n)) = 1$

Если же g непрерывна в точке b, а $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

Доказательство.

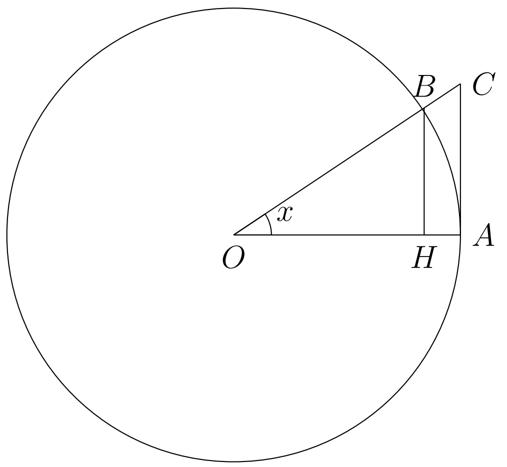
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}.$$

Тогда $g \circ \tilde{f}(x)$ непрерывна в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(a)) = g(b)$ □

Теорема 3.13.
Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство.



Пусть окружность радиуса 1.
$\sin x = BH$
$\operatorname{tg} x = AC$
$S(\triangle OBA) = \frac{1}{2}BH \cdot OA = \frac{\sin x}{2}$
$S(\triangle OCA) = \frac{1}{2}CA \cdot OA = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$
$S(\text{сектора } OBA) = \frac{x}{2}$
$S(\triangle OBA) < S(\text{сектора } OBA) < S(\triangle OCA)$
$\implies \sin x < x < \operatorname{tg} x$

□

Следствие.

1. $|\sin x| < |x| \quad \forall x \neq 0$

   Доказательство.
   $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \implies 0 < \sin x < x \implies |\sin x| < |x|$
   $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \quad |\sin x| = \sin(-x) < -x = |x|$
   $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} \implies |\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$ □

2. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$
   $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$

   Доказательство.
   $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right|\left|\cos \frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$
   С косинусами – аналогично:
   $|\cos x - \cos y| = 2\left|\sin \frac{x+y}{2}\right|\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$ □

Теорема 3.14.

1. sin и cos непрерывны на $\mathbb{R}$.
2. tg и ctg непрерывны на всем множестве определения.

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \varepsilon \;\; \forall |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| \leqslant |x - a| < \delta = \varepsilon$.
2. По теореме об отношении непрерывных функций.

□

Теорема 3.15 (Вейерштрасса)**.**
$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и f непрерывна во всех точках $[a, b]$. Тогда

1. f ограниченная функция
2. f принимает наименьшее и наибольшее значение

Доказательство.

1. Предположим противное.

   Тогда.

   $\exists x_1 \in [a, b] \quad | f(x_1) | > 1$

   $\exists x_2 \in [a, b] \quad | f(x_2) | > 2$

   ...

   $\exists x_n \in [a, b] \quad | f(x_n) | > n$

   Выберем по теореме Больцано-Вейерштрасса сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$.

   $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b \implies a \leqslant c \leqslant b$.

   $\implies c \in [a, b] \implies f$ непрерывна в точке c.

   $\implies \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$

   Значит,

   $f(x_{n_k})$ – ограниченная последовательность.

   Но мы знаем, что $| f(x_{n_k}) | > n_k \geqslant k \implies | f(x_n) | \to \infty$.

2. $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) < +\infty$ по пункту 1.

   Допустим, что максимум не достигается.

   Тогда $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, т.к. знаменатель не обращается в ноль.

   Применяем первый пункт теоремы к функции g.

   $\implies g$ ограничена сверху. $\implies$ найдется такое число M_1, что $\frac{1}{M - f(x)} = g(x) \leqslant M_1$ при $\forall x \in [a, b]$.

   $\implies \frac{1}{M_1} \leqslant M - f(x) \implies f(x) \leqslant M - \frac{1}{M_1} < M$. Заметим, что получили новую верхнюю границу, меньшую M. Получили противоречие. Значит, максимум достигается.

$\square$

Пример.

1. Существенно, что функция задана на отрезке.

   $f(x) = \frac{1}{x}$ $f : (0; 1] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, но неограниченная сверху.

2. Непрерывность на всем отрезке тоже существенна.

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \in (0; 1] \end{cases}$$

   Тогда $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ – непрерывна во всех точках кроме 0. Но не ограничена сверху.

Теорема 3.16 (Больцано-Коши)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f непрерывна во всех точках $[a, b]$.

1. Если $f(a)$ и $f(b)$ противоположных знаков, то существует $c \in (a, b)$, т.ч. $f(c) = 0$.

2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует $c \in [a, b]$, т.ч. $f(c) = C$.

Доказательство.

1. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

   Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то нужное c найдено.

   Если $\neq 0$.

   Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$

   Если $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, то $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$.

   Проделаем эту процедуру снова.

   Получится вложенная последовательность отрезков.

   $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

   $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

   $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

   Воспользуемся теоремой о стягивающихся отрезках.

   По ней найдется такая c, т.ч. $c \in [a_n, b_n]$ при всех n.

   Причем $a_n \to c \ \ b_n \to c$.

   Вспомним, что f непрерывна в (.) c.

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

   $f(a_n) < 0 \ \ f(a_n) \to f(c) \implies f(c) \leqslant 0$.

   $0 < f(b_n) \to f(c) \implies f(c) \geqslant 0$.

   А значит, $f(c) = 0 \implies$ нужная точка найдена.

2. $g(x) = f(x) - C$, тогда значения функции g на концах отрезка $[a, b]$ противоположных знаков.

   $\implies \exists c \ \ g(c) = 0 \ \ g(c) = f(c) - C \implies f(c) = C$.

$\square$

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1; 0) \end{cases}$$

Непрерывна во всех точках, кроме 0. Для нее Больцано-Коши не работает.

Теорема 3.17.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех (.)

Тогда $f([a, b])$ – отрезок (возможно, вырожденный в точку)

Доказательство. По теореме Вейерштрасса

$\exists p, q \in [a, b]$, т.ч. $f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q) \ \ \forall x \in [a, b]$.

Тогда $f([a, b]) \subset [f(p), f(q)]$.

Поймем, что имеет место равенство.

Возьмем $y \in (f(p), f(q))$. Тогда по второй части теоремы Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$ найдется $c \in (p, q) \ \ f(c) = y$.

Заметим, что $c \in [a, b]$. Тогда $y \in f([a, b])$.

□

Теорема 3.18.

Непрерывный образ промежутка – промежуток (возможно, другого типа).

$[a, b] \ \ (a, b) \ \ [a, b) \ \ (a, b]$

Будем обозначать $\langle a, b\rangle$, если неважно, какой именно промежуток.

Доказательство.

$m = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \ \ M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$

$\implies m \leqslant f(x) \leqslant M \ \ \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Докажем, что если $y \in (m, M)$, то $y = f(c)$ для некоторой $c \in \langle a, b\rangle$.

$m < f(p) < y < f(q) < M$. Такие p и q найдутся, т.к. иначе мы неправильно выбрали инфимум или супремум.

Тогда применим снова теорему Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$.

$\implies \exists c \in (p, q) \ \ f(c) = y$

$\implies c \in \langle a, b\rangle \implies y \in f(\langle a, b\rangle)$

$\implies (m, M) \subset f(\langle a, b\rangle) \subset [m, M]$.

А значит, $f(\langle a, b\rangle)$ промежуток. □

Упражнение. Придумать примеры всех возможных типов.

***Определение* 3.8.**

$f : X \to Y$ – биекция.

Тогда $f^{-1} : Y \to X \ \ f^{-1}(f(x)) = x \ \ \forall x \in X$ – функция, обратная к f.

Замечание. $f(f^{-1}(y)) = y \ \ \forall y \in Y$

Теорема 3.19.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонная.

$m := \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \ \ M := \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$

Тогда $\exists f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \mathbb{R}$, обратная к f. И обладает следующими свойствами:

1. f^{-1} обратная к $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$
2. f^{-1} строго монотонная
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M\rangle$

Доказательство.

Пусть для определенности $f \quad \uparrow$

$f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – значения функции на $\langle a, b\rangle$

1. Если $x < y$, то $f(x) < f(y) \implies f$ – инъективна

   $\implies f$ – биекция между $\langle a, b\rangle$ и $\langle m, M\rangle$

   $\implies$ существует обратная к $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$

2. $x < y \implies f(x) < f(y)$

   $x = y \implies f(x) = f(y)$

   $x > y \implies f(x) > f(y)$

   А значит, $x < y \iff f(x) < f(y)$

   $f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \iff f(f^{-1}(x)) < f(f^{-1}(y)) \iff x < y$

   $\implies$ обратная функция строго монотонна.

3. Возьмем $y_0 \in \langle m, M\rangle$ и докажем, что f^{-1} непрерывна в (.) y_0

   $A := \sup\limits_{y<y_0} f^{-1}(y) = \lim\limits_{y\to y_0-} f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) \leqslant \lim\limits_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = \inf\limits_{y>y_0} f^{-1}(y) =: B$

   $f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$

   Надо доказать, что $A = B = f^{-1}(y_0)$

   Пусть $A < B$.

   Посмотрим на $f^{-1}(\langle m, M\rangle) = f^{-1}(\langle m, y_0)) \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup f^{-1}((y_0, M\rangle)$

   $\implies f^{-1}(\langle m, M\rangle) \subset (-\infty, A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B, +\infty)$

   Однако, если $A < B$, то получаем, что есть промежутки, на которых f^{-1} не определена. Однако мы знаем, как она там устроена.

   Получили противоречие, значит $A = B$, значит все пределы равны значению функции в точке, т.е. функция непрерывна.

□

Замечание.

Чтобы получить график обратной функции, достаточно отразить его относительно прямой $y = x$.

Следствие.

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \uparrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \ \downarrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty) \uparrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\mathrm{arctg} : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty) \downarrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\operatorname{arcctg} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$

Теорема 3.20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ из-за четности функций есть при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

$\cos 0 = 1$. Еще нам уже известна непрерывность косинуса.

$\implies$ (по теореме о двух милиционерах) $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

□

3.3. §3. Элементарные функции

3.3.1. Определение показательной и степенной функции.

***Определение* 3.9.** Степенная функция для рационального показателя.

$x^n, n \in \mathbb{N}$ – перемножили n раз x.

$x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и непрерывна.

Если n – нечетно, то $x^n \uparrow$ на $\mathbb{R}$

Если n – четно, то $x^n \uparrow$ на $[0, +\infty)$

$\implies$ Существует обратные функции $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $n \not\vdots\, 2$

$\sqrt[n]{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, если $n \vdots 2$

И эта функция строго монотонно возрастает и непрерывна.

$x^{\frac{p}{q}} := (\sqrt[q]{x})^p$,($p/q$ не сократима) если q – нечетно, то $x^{p/q}$ задана на $\mathbb{R}$. Если q – четно, то $x^{p/q}$ задана на $[0, +\infty)$.

$x^{-r} := \frac{1}{x^r}$ – непрерывна на всей области определения ($\mathbb{R}\backslash\{0\}$ или $(0, +\infty)$).

Хотим определить показательную функцию $a > 0$.

a^x. Уже умеем определять в рациональных степенях.

Свойства. $r, s \in \mathbb{Q}$

- $r < s$ $a^r < a^s$ при $a > 1$ и наоборот при $a < 1$.
- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

Научимся переходить от рационального показателя в вещественный...

Лемма. Если $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$

Доказательство.

$b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ – хотим показать.

$a^{\frac{1}{n}} = b_n + 1$

$\implies a = (1 + b_n)^n \geqslant 1 + nb_n > nb_n$

$\implies b_n < \frac{a}{n}$

Пусть $a > 1$, тогда $b_n > 0$.

Тогда $0 < b_n < \frac{a}{n} \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Пусть $a < 1$, тогда $a^{1/n} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{1/n}}$. По доказанному, $(\frac{1}{a})^{1/n} \to 1$

Тогда и $a^{1/n} \to 1$. □

Теорема 3.21. Пусть $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

Если $x_n \in \mathbb{Q}$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то последовательность a^{x_n} имеет конечный предел, зависящий лишь от x, но не от $\{x_n\}$.

Доказательство.

Шаг 1. Существование предела.

Проверим, что последовательность a^{x_n} – фундаментальна.

$x_n \to x \implies x_n$ – ограничена $\implies |\, x_n \,| \leqslant M$

$\implies 0 < a^{x_n} \leqslant \max\{a^M, (\frac{1}{a})^M\} \;\; a^{x_n} \in (0, c]$.

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| = a^{x_m} \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,|$

Пусть $x_n > x_m$

Подставим $\varepsilon > 0$ в лемму $\exists N \;\; \forall k > N \;\; \left| a^{1/k} - 1 \right| < \varepsilon$.

Пусть $a > 1$. Т.к. x_n – сходящаяся последовательность, то она фундаментальная, то $\exists N_1 \;\; \forall m, n > N_1 \;\; |\, x_n - x_m \,| < \frac{1}{k}$

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| = C(a^{x_n - x_m} - 1) \leqslant C(a^{1/k} - 1) < C\varepsilon$

Пусть $a < 1$. Т.к. x_n – сходящаяся последовательность, то она фундаментальная, то $\exists N_1 \;\; \forall m, n > N_1 \;\; |\, x_n - x_m \,| < \frac{1}{k}$

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| = C((\frac{1}{a})^{x_m - x_n} - 1) \leqslant C((\frac{1}{a})^{1/k} - 1) < C\varepsilon$

Итак. Поняли, что предел существует.

Шаг 2. Единственность. Пусть $x_n \to x, y_n \to x$ $(x_n, y_n \in \mathbb{Q})$.

Пусть $a^{x_n} \to A, a^{y_n} \to B$. Покажем, что $A = B$.

Тогда $x_1, y_1, x_2, y_2, ... \to x \implies a^{x_1}, a^{y_1}, ...$ имеет предел C.

Но т.к. x_n подпоследовательность, то $A = C$.

Но т.к. y_n подпоследовательность, то $B = C$.

$\implies A = B$.

□

***Определение* 3.10.** Получившийся в теореме предел есть a^x.

Поймем, что все свойства из рациональных показателей сохраняются.

Свойства.

1. $x < y$ $a^x < a^y$ при $a > 1$, иначе наоборот.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $(a^x)^y = a^x y$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

Доказательство.

1. $x < y$

   Пусть $u, v \in \mathbb{Q}$ такие, что $x < u < v < y$.

   $u > x_n \to x$ $v < y_n \to y$.

   Пусть $a > 1$ $a^{x_n} < a^u < a^v < a^{y_n}$

   Перейдя к пределу, получаем $a^x \leqslant a^u < a^v \leqslant a^y$.

2. Пусть $x_n \to x, y_n \to y$. Тогда $a^{x_n} a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$.

   Дальше по теореме об арифметических действиях $x_n + y_n \to x + y$

   $\implies a^x a^y = a^{x+y}$.

3. Пусть $y \in \mathbb{Q}$ и $x_n \to x$ $x_n y \to xy$

   $(a^{x_n})^y = a^{x_n y}$

   $(a^x_n)^y \to (a^x)^y, a^{x_n y} \to a^x y$ по непрерывности степенной функции с рациональным показателем.

   Если $x \in \mathbb{Q}$, то равенство так же есть.

   Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ $y_n \in \mathbb{Q}$ $y_n \to y$

   $(a^x)^{y_n} = a^{x y_n}$

   Заметим, что с левой частью равенства все хорошо. Пока что воспользуемся непрерывностью, которую вскоре докажем.

4. $x_n \to x$ $a^{x_n} \to a^x, b^{x_n} \to b^x, (ab)^{x_n} \to (ab)^x$.

□

Лемма. $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Доказательство. Покажем для $a > 1$.

Если $|\,x\,| < \frac{1}{n}$, то $(\frac{1}{a})^{1/n} = a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}$

$0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

По ε выбираем n, для которого $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

И тогда $\forall x$: $|\,x\,| < \frac{1}{n}$ $0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

Для $a < 1$ через отношение $\frac{1}{a}$. □

Теорема 3.22. $a > 0 \implies a^x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$

Доказательство. Надо доказать, что если $x \to x_0$, то $a^x \to a^{x_0}$.

$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$.

Второй множитель стремится к нулю по лемме, а первый – просто константа. □

***Определение* 3.11.**

$\log_a y : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ – обратная функция к a^x

a^x непрерывна и строго монотонна $\quad : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$

***Определение* 3.12.**

$x^p := e^{p \ln x} \quad : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$

Теорема 3.23.

$\log_a x$ и x^p непрерывны на своей области определения.

Доказательство.

$\log_a x$ непрерывен по теореме об обратном.

x^p непрерывен как композиция непрерывных. □

3.3.2. Замечательные пределы.

Теорема 3.24. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

Доказательство.

Проверяем определение по Гейне. Берем последовательность x_n, т.ч. $x_n \to +\infty$ и монотонна.

$k_n = [x_n]$

$(1 + \frac{1}{k_n+1})^{k_n+1} : (1 + \frac{1}{k_n+1}) = (1 + \frac{1}{k_n+1})^{k_n} \leqslant (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \leqslant (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n+1} = (1 + \frac{1}{k_n})^{k_n}(1 + \frac{1}{k_n})$

И левое и правое стремится к e, значит и по середке все тоже стремится к e.

□

Следствие.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

Доказательство.

Берем последовательность $x_n \to -\infty$. $y_n := -x_n \to +\infty$.

$(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = (1 - \frac{1}{y_n})^{-y_n} = (\frac{y_n - 1}{y_n})^{-y_n} = (\frac{y_n}{y_n - 1})^{y_n} = (1 + \frac{1}{y_n - 1})^{y_n} = (1 + \frac{1}{y_n - 1})^{y_n - 1}(1 + \frac{1}{y_n - 1}) \to e$ □

Следствие.

$\lim\limits_{x \to 0} = (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство.

$x_n \to 0$ монотонно $\implies$ x_n знакопостоянен $\to 0$.

$x_n = \frac{1}{y_n} \implies y_n \to +\infty$ или $y_n \to -\infty$

$(1 + x_n)^{1/x_n} = (1 + \frac{1}{y_n})^{y_n} \to e$ □

Теорема 3.25.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство.

ln – непрерывна в точке e.

$1 = \ln e = \ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ □

Теорема 3.26.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Доказательство.

Возьмем $x_n \to 0$ и $y_n := a^{x_n} - 1 \to 0$

$a^{x_n} = y_n + 1 \implies x_n = \log_a(y_n+1) = \frac{\ln(y_n+1)}{\ln a}$

$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n \ln a}{\ln(y_n+1)} \to \ln a$ □

Теорема 3.27.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$

Доказательство.

Возьмем $x_n \to 0$ и положим $y_n := (1+x_n)^p - 1 \to 0$

$\frac{(1+x_n)^p-1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \frac{p\ln(1+x_n)}{x_n} \to p$ □

3.4. §4 Сравнение функций.

***Определение* 3.13.**

$f, g : D \to \mathbb{R}$ x_0 – предельная точка D.

Пусть существует окрестность точки x_0 $\dot{U}$ и функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$, т.ч. $f = \varphi g$ в $\dot{U} \cap D$.

1. $\varphi(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то $f = o(g)$.
2. $\varphi(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то $f \sim g$.
3. $\varphi(x)$ ограниченная функция при $x \to x_0$, то $f = O(g)$.

Замечание.

Если g не обращается в 0 в $\dot{U}$. Тогда $\varphi = \frac{f}{g}$.

$f = o(g) \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f \sim g \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Замечание.

Если g не обращается в 0 в $\dot{U}$. Тогда $\varphi = \frac{f}{g}$.

$|\,\varphi(x)\,| \leqslant C$ при $x \in \dot{U}$ $|\,f(x)\,| = |\,\varphi(x)g(x)\,| \leqslant C\,|\,g(x)\,|$

$f = O(g) \iff |\,f(x)\,| \leqslant C\,|\,g(x)\,|$ при $x \in \dot{U} \cap D$

***Определение* 3.14.**

$f = O(g)$ на D

Означает неравенство $|\,f(x)\,| \leqslant C\,|\,g(x)\,|$ $\forall x \in D$

***Определение* 3.15.**

$f = O(g)$ $f \prec g$ или $g \succ f$ – другие обозначения.

Если $f \prec g$ и $g \prec f$ обозначается $f \asymp g$.

Свойства.

1. "$\sim$" при $x \to x_0$ – отношение эквивалентности.

   Доказательство.
   $f \sim f \quad \varphi \equiv 1$

   $f \sim g \implies g \sim f$

   Если $f \sim g$, то $f = \varphi g$ в некоторое окрестности x_0.

   И $\varphi(x) \to 1 \implies \varphi > 0$ в неокторой окрестности (.) x_0.

   $\implies g = \frac{1}{\varphi} f$ и $\frac{1}{\varphi(x)} \to 1$

   $f \sim g$ и $g \sim h \implies f \sim h$

   $f \sim g \implies f = \varphi g$ и $\varphi(x) \to 1$

   $g \sim h \implies g = \psi h$ и $\psi(x) \to 1$

   $\implies f = \varphi \psi h \implies f \sim h$ □

2. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to x_0$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

   Доказательство.
   $f_i \sim g_i \implies f_i = \varphi_i g_i$ и $\varphi_i(x) \to 1$

   $\implies f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 \cdot g_1 g_2$ и $\varphi_1(x)\varphi_2(x) \to 1$ □

3. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to x_0$ и f_2 не обращается в 0 в этой окрестности, тогда $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

   Доказательство.
   $f_i = \varphi_i g_i$

   $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{g_1}{g_2}$ □

4. $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$

   Доказательство.
   $f \sim g \iff f = \varphi g$ и $\varphi(x) \to 1 \iff f = g + (\varphi - 1)g$ и $\varphi(x) - 1 \to 0$

   $f \sim g \iff g \sim f \iff g = f + o(f) \iff f = g + o(f)$ □

5. $f = o(g) \implies f = O(g)$

   $f \sim g \implies f = O(g)$

   Доказательство.
   $f = \varphi g$, где φ стремится либо к 0, либо к 1.

   $\implies \varphi$ ограничена в окрестности точки. □

6. $f \cdot o(g) = o(fg) \quad fO(g) = O(fg)$

   Доказательство.
   $h = fo(g) \iff h = f\varphi g$, где $\varphi \to 0$

   $h = f\varphi g \iff h = o(fg)$ □

7. $o(f) + o(f) = o(f) \quad O(f) + O(f) = O(f)$

   Доказательство.
   $g = o(f) \;\; h = o(f) \implies g + h = o(f)$
   $g = o(f) \implies g = \varphi f$, где $\varphi \to 0$
   $h = o(f) \implies h = \psi f$, где $\psi \to 0$
   $\implies g + h = (\varphi + \psi)f$, где $(\varphi + \psi) \to 0$ □

Про замечательные пределы.
$\sin x \sim x$ при $x \to 0$
$\ln(1 + x)x \sim x$ при $x \to 0$
$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$ при $x \to 0$
$(1 + x)^p - 1 \sim px$ при $x \to 0$
Можно все это переписать в виде $f = g + o(x)$

4. Дифференциальное исчисление

4.1. §1. Дифференцируемость и производная

***Определение* 4.1.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

f дифференцируема в точке x_0, если существует такое $k \in \mathbb{R}$, что $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Запишем по-другому:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$ при $h \to 0$, где $h := x - x_0$.

***Определение* 4.2.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

Тогда производная $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Можем записать по-другому:

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Теорема 4.1 (Критерий дифференцируемости)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

Тогда следующие условия равносильны:

1. f диффренцируема в точке x_0
2. f имеет конечную производную в этой точке
3. Существует $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0.

И в случае, когда эти условия верны

$k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доказательство.

1. $\implies$ 2.

$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to k$

$\implies$ существует $f'(x_0) = k$.

2. $\implies$ 3.

$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$

Непрерывна φ в точке x_0.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = f'(x_0)$

3. $\implies$ 1.

$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0.

$\varphi(x) \to \varphi(x_0) \implies \varphi(x) - \varphi(x_0) \to 0$

$f(x) - f(x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)$

$f(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)$

и $k = \varphi(x_0)$ □

Производная может быть бесконечной

Пример.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$

***Определение* 4.3.**

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – правая производная.

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – левая производная.

Замечание.

f имеет производную в точке $\iff$ существует $f'_\pm(x_0)$, и они равны между собой.

Пример.

1. $f(x) = |\,x\,|$

   $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{|\,x\,|}{x} = 1$

   $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{|\,x\,|}{x} = -1$

   И функция не имеет производной в точке 0.

2. $f(x) = \{x\}$ – дробная часть, $n \in \mathbb{Z}$.

   $f'_+(n) = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(n+h)-f(n)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1$

   $f'_-(n) = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(n+h)-f(n)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{1-|\,h\,|}{h} = -\infty$

Пример Уравнение касательной.

$y = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u) + f(u)$

При $v \to u$ получаем такое уравнение:

$y = f'(u)(x-u) + f(u)$ – это и есть уравнение касательной в точке u.

Производная – угловой коэффициент касательной.

***Определение* 4.4** (Дифференциал)**.**

$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underline{kh} + o(h)$ при $h \to 0$.

Дифференциал – это линейное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. (Подчеркнуто).

Утверждение 4.2.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$ при $h \to 0$

$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ – это определение непрерывности в точке x_0. □

Замечание.

Обратное неверно.

$f(x) = |x|$. В точке 0 непрерывна, но не дифференцируема.

Теорема 4.3 (Арифметические действия с производной)**.**

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда.

1. $f \pm g$ дифференцируема в этой точке и $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
2. fg дифференцируема в этой точке и $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема и $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

В частности $(cf)' = cf'$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Доказательство.

1. $(f+g)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} f(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. Покажем, что если $g(x_0) \neq 0$, то $(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$

   $(\frac{1}{g})'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x_0)-g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} = -\frac{1}{g(x_0)} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

   Теперь

   $(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f'\frac{1}{g} + f(\frac{1}{g})' = f'\frac{1}{g} + f\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

□

Теорема 4.4 (о дифференцируемости композиции)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

$g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$

f дифференцируема в точке x_0, g дифференцируема в точке $f(x_0)$.

Тогда $h = g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Доказательство.

f дифференцируема в точке $x_0 \implies f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ для непрерывной $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ в точке x_0.

g дифференцируема в точке $f(x_0) \implies g(y) - g(f(x_0)) = \psi(y)(y - f(x_0))$ для непрерывной $\psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ в точке $f(x_0)$.

Подставим $y = f(x)$.

$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0)$

Нужно проверить, что непрерывна в точке x_0.

φ непрерывна в точке x_0, $\psi \circ f$ непрерывна в точке x_0 по теореме о непрерывности композиции функций.

$h'(x_0) = \psi(f(x_0))\varphi(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ □

Теорема 4.5 (о дифференцируемости обратной функции)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна.

$x_0 \in \langle a, b\rangle$, f дифференцируема в точке x_0 и производная там не равна нулю.

f^{-1} – функция, обратная к f.

Тогда f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$ и $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство.

$g := f^{-1}$

f дифференцируема в точке $x_0 \implies f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0.

$y := f(x), y_0 = f(x_0)$

$g(y) = x, g(y_0) = x_0$

Подставим новые обозначения.

$y - y_0 = \varphi(g(y))(g(y) - g(y_0))$

При $y \neq y_0$ $\varphi(g(y)) \neq 0$

$\varphi(g(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ по условию.

А значит, $\varphi(g(y_0)) \neq 0$ никогда, т.е. можно на это делить.

$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))}(y - y_0)$

Надо проверить, что $\frac{1}{\varphi(g(y_0))}$ непрерывна.

φ непрерывна в точке x_0, g непрерывна в точке y_0 и $g(y_0) = x_0$.

Значит, $\varphi(g(y_0))$ непрерывна. Еще знаем, что не обращается в 0.

Т.е. $\frac{1}{\varphi(g(y_0))}$ непрерывна.

$\implies g$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$

Формула для производной

$g'(f(x_0)) = g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ □

Следствие.

В условии теоремы $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Теорема 4.6 (Таблица производных)**.**

1. $(c)' = 0$
2. $(x^p)' = px^{p-1}$
3. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
   В частности $(e^x)' = e^x$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ при $x > 0$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |\, x \,| < 1$

10. $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |\, x \,| < 1$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказательство.

2. $(x^p)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}x} = x^p \frac{p}{x} = px^{p-1}$

3. $(a^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{h+x} - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$

4. $(\ln x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}x} = \frac{1}{x}$

5. $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$

□

4.2. §2 Теоремы о среднем

Теорема 4.7 (Ферма)**.**
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$. И если $f(x_0) = \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ или если $f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.
Пусть $f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, для минимума доказывается аналогично.

Т.е. у нас есть $f(x_0) \geqslant f(x) \ \ \forall x$

Рассмотрим случай $x_0 > x$.

Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, а значит $f'_-(x_0) \geqslant 0$

Рассмотрим случай $x_0 < x$.

Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, а значит $f'_+(x_0) \leqslant 0$

Но, т.к. функция в этой точке дифференцируема, то левая и правая производная равны.

Т.е. $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$

Что нам и требовалось доказать. □

Теорема 4.8 (Ролля)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a,b) \ \ f'(c) = 0$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса у непрерывной функции, заданной на отрезке, найдутся минимум и максимум.

Т.е. $\exists p, q$:

$f(p) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

$f(q) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Если обе эти точки на концах отрезка, то $f(p) = f(q) \implies f(x) = const$. Тогда мы можем взять любую точку на интервале, у нее производная будет ноль.

Иначе хотя бы одна из этих точек лежит на интервале, и тогда по теореме Ферма производная в ней равняется нулю. □

Теорема 4.9 (Лагранжа)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство.

Пусть $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$

Тогда $g(a) = g(b) = f(a)$.

Тогда по теореме Ролля найдется такая $c \in (a, b)$, что $g'(c) = 0$.

$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$, что мы и хотели.

□

Теорема 4.10 (Коши)**.**

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство.

Пусть $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$

Тогда $h(a) = h(b) = f(a)$.

Тогда по теореме Ролля найдется такая $c \in (a, b)$, что $h'(c) = 0$.

$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$

$\implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, что мы и хотели.

□

Следствия теоремы Лагранжа.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b).

1. Если $|\, f'(x) \,| \leqslant M$ при всех $x \in (a, b)$, то $|\, f(x) - f(y) \,| \leqslant M \,|\, x - y \,| \quad \forall x, y \in [a, b]$

   Доказательство.

   $[x, y] \in [a, b] \implies$ по теореме Лагранжа для $[x, y]$ $\exists c \in (x, y)$, т.ч. $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$
   $\implies |\, f(y) - f(x) \,| = |\, f'(c) \,| \,|\, y - x \,| \leqslant M \,|\, y - x \,|$ □

2. Если $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$, то f – постоянная

Доказательство.
Пишем следствие пункта 1 с $M = 0$.
$|\, f(x) - f(y) \,| \leqslant 0 \;\; \forall x, y \in \langle a, b\rangle \implies f(x) = f(y) \implies$ все значения одинаковы. □

3. Если $f'(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, то f (нестрого) монотонно возрастает.

   Доказательство.
   $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geqslant 0$
   $\implies$ если $y > x$, то $f(y) \geqslant f(x)$, т.к. $f'(c) \geqslant 0$. □

4. Если $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, то f строго монотонно возрастает.

   Доказательство.
   $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geqslant 0$
   $\implies$ если $y > x$, то $f(y) > f(x)$, т.к. $f'(c) > 0$. □

5. Если $f'(x) \leqslant 0$, то f нестрого монотонно убывает.

6. Если $f'(x) < 0$, то f строго монотонно убывает.

7. Если $f'(x) \geqslant 0 \;\; \forall x, y \in (a, b)$ и обращается в 0 лишь в конечном числе точек, то f строго монотонно возрастает.

   Доказательство.
   $d_1 < d_2 < ... < d_n$ – точки, в которых $f' = 0$
   $\langle a, d_1]$ удовлетворяет условию следствия 4. (строгая монотонность)
   $[d_1, d_2]$ – аналогично.
   И т.д.
   Значит, на каждом таком отрезке f строго монотонно возрастает.
   Почему можно склеить все эти отрезки?
   Знаем про монотонность на каждом отрезке, проверим монотонность на объединении:
   $x \in \langle a, d_1) \quad y \in (d_1, d_2]$
   $f(x) < f(d_1) \qquad f(d_1) < f(y)$
   Значит, f действительно строго монотонно возрастает. □

8. Предыдущее для другого знака монотонности.

***Определение* 4.5.**
$f : \langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$ и $\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad |\, f(x) - f(y) \,| \leqslant M \,|\, x - y \,|$
f – липшицева функция (с константной M)

Замечание.
Липшицевость $\implies$ непрерывность.

Теорема 4.11 (Дарбу)**.**
$f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f$ дифференцируема на $[a, b]$.
Если C лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$, то существует $c \in (a, b)$, то $f'(c) = C$.

Доказательство.

Разберем случай $C = 0$.

Тогда производные на концах – одна положительна, другая отрицательна. Не умаляя общности $f'(a) < 0 < f'(b)$.

По теореме Вейерштрасса существует наименьшее значение точки на отрезке. Т.е. $c \in [a, b]$, т.ч. $f(c) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in [a, b]$

Поймем, что $c \neq a, c \neq b$.

Пусть так оказалось, что $c = a$. Тогда $f(a) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in [a, b]$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Заметим, что дробь больше либо равна нуля. А значит, предел тоже не отрицателен. Но по условию он меньше нуля. Противоречие.

Пусть $c = b$.

$\implies f(b) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in [a, b]$.

$f'(b) = \lim\limits_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$

Эта дробь меньше или равна нуля, тогда предел не положителен. Но это противоречит тому, что $f'(b) > 0$.

Итак. Значит, есть точка минимума, и она не совпадает ни с левым, ни с правым концом.

$c \in (a, b) \implies$ применяем теорему Ферма, получаем $f'(c) = 0$.

То, что нам было и нужно.

А если хотим $C \neq 0$?

Тогда рассмотрим $g(x) = f(x) - Cx$. Эта функция дифференцируема на $[a, b]$ и ее производна $g'(x) = f'(x) - C$.

А раз так, то можно воспользоваться предыдущим пунктом. Т.е. $\exists c \ \ g'(c) = 0$. Т.е. $f'(c) = g'(c) + C = C$.

Что мы и хотели. □

Следствие.

Если $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R} \ \ f$ дифференцируема на (a, b) и непрерывна на $\langle a, b \rangle$

Если $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то f строго монотонна.

Доказательство.

Покажем, что f' знакопостоянна.

Действительно. Пусть это не так. Тогда существует u, v из отрезка разных знаков. Но тогда между ними по предыдущей теореме есть момент, когда производна равна нулю, что невозможно по условию.

А раз производна знакопостоянна, то либо $f' > 0$ и f строго монотонно возрастает, либо $f' < 0$ и функция строго монотонно убывает. □

Теорема 4.12 (правило Лопиталя)**.**

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ и f, g дифференцируема на (a, b)

$g' \neq 0$

Пусть $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

Если $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

Теорема 4.13 (правило Лопиталя-2)**.**

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ и f, g дифференцируема на (a, b)

$g' \neq 0$

Пусть $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$

Если $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство.

Докажем правило Лопиталя-1.

Хотим доказать, что $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Покажем это по Гейне.

Возьмем монотонно убывающую последовательность $x_n \to a$.

Надо понять, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$.

$a_n = f(x_n), b_n = g(x_n)$. Проверим их для теоремы Штольца.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$.

Проверим монотонность b_n. $b_n - b_{n+1} = g(x_n) - g(x_{n+1})$. Знаем, что $x_{n+1} < x_n$. Т.е. надо лишь проверить монотонность g. А это следует из следствия теоремы Дарбу.

$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$

Последнее равенство – по теореме Коши.

$x_{n+1} < c_n < x_n \implies c_n \to a$.

Тогда $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to l$.

И по теореме Штольца $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$.

$\square$

Пример.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}$

   Где $p > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$

   Функции дифференцируемы и $(x^p)' = px^{p-1} > 0$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}$

   $x^x = e^{\ln(x^x)} = x^{x\ln x}$

   Посчитаем $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

   $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

   Удовлетворяет правилу Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

И тогда $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^p}{a^x}$

   $p \in \mathbb{R}, a > 1$.

   При $p \leqslant 0$ числитель ограничен, знаменатель идет в бесконечность, а значит $\frac{x^p}{a^x} \to 0$

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a} = 0$ при $p \leqslant 1$.

   Значит, и исходный предел стремится к 0 при $p \leqslant 1$.

   Будем делать до нашего p. Т.е. для любого p все можем свести к этому.

4.3. §3 Производные высших порядков

***Определение* 4.6.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\ \ x_0 \in (a, b)$

Пусть f дифференцируема в окрестности точки x_0(т.е. f' определена в x_0)

Если f' дифференцируема в точке x_0, то f дважды дифференцируема в точке x_0.

$f''(x_0) = (f')'(x_0)$

***Определение* 4.7** (Обозначения.)**.**

$C(\langle a, b\rangle)$ – множество непрерывных функций на $\langle a, b\rangle$

$C^1(\langle a, b\rangle)$ – множество функций, которые дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, и их производная непрерывна.

$C^2(\langle a, b\rangle)$ – мн-во функций, которые дважды дифференцируемы и этот результат непрерывен.

И т.д.

$C^\infty(\langle a, b\rangle) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} C^n(\langle a, b\rangle)$

Пример.

$f_n(x) = x^n \sqrt[3]{x} = x^{n+\frac{1}{3}}$

$f_n'(x) = (n + \frac{1}{3})x^{n-\frac{2}{3}}$

$f_n''(x) = (n + \frac{1}{3})(n - \frac{2}{3})x^{n-\frac{5}{3}}$

$f_n^{(n)}(x) = (n + \frac{1}{3})(n - \frac{2}{3})...(1 + \frac{1}{3})x^{\frac{1}{3}}$

Посмотрим на следующую производную в нуле.

$\frac{f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(0)}{x-0} = \frac{a_n x^{1/3} - 0}{x-0} = \frac{a_n x^{\frac{1}{3}}}{x} \to +\infty$

Т.е. n раз дифференцируема, а $n+1$ – нет.

Из примера вывод:

$C(\langle a, b\rangle) \supsetneqq C^1(\langle a, b\rangle) \supsetneqq C^2(\langle a, b\rangle) \supsetneqq ...$

Теорема 4.14 (арифметические действия с n-ми производными)**.**

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\ \ c \in \langle a, b\rangle\ \ \ f, g\ \ n$ раз дифференцируемы в точке c.

Тогда

1. $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(c) = \alpha f^{(n)}(c) + \beta g^{(n)}(c)$
2. $(fg)^{(n)}(c) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k)}(c)$
3. Если $h(x) = f(\alpha x + \beta)$, то
   $h^{(n)}(x) = \alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$, если в этой точке f n раз дифференцируема.

Доказательство.
Везде по индукции

1. База $n = 1$ уже была.
   Переход $n \to n + 1$.
   $(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(n)})' = (\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)})' = \alpha (f^{(n)})' + \beta (g^{(n)})' = \alpha f^{(n+1)} + \beta g^{(n+1)}$
2. База $n = 1$ была.
   Переход $n \to n + 1$
   $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = (\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((f^{(k)})' g^{(n-k)} + f^{(k)} (g^{(n-k)})') =$
   $= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} +$
   $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$
3. База $n = 1$ знаем.
   $(f(\alpha x + \beta))' = f'(\alpha x + \beta)(\alpha x + \beta)' = \alpha f'(\alpha x + \beta)$
   Переход $n \to n + 1$.
   $(f(\alpha x + \beta))^{(n+1)} = ((f(\alpha x + \beta))^{(n)})' = (\alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta))' = \alpha^n (f^{(n)}(\alpha x + \beta))' =$
   $= \alpha^n \cdot \alpha \cdot f^{(n+1)}(\alpha x + \beta) = \alpha^{n+1} f^{(n+1)}(\alpha x + \beta)$

$\square$

Пример.

1. $(x^p)^{(n)} = p(p-1)...(p-n+1)x^{p-n}$
   Докажем по индукции, база уже была, сразу переход:
   $(x^p)^{(n+1)} = ((x^p)^{(n)})' = (p(p-1)...(p-n+1)x^{p-n})' = p(p-1)(p-2)...(p-n+1)(p-n)x^{p-n-1}$
2. $(\ln x)^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = (x^{-1})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
3. $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
   База $n = 1$.
   $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
   Переход $n \to n + 1$
   $(\sin x)^{(n+1)} = ((\sin x)^{(n)})' = (\sin(x + \frac{\pi n}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi n}{2}) = \sin(x + \frac{\pi(n+1)}{2})$
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$

Лемма.

$f(x) = (x - x_0)^n$. Тогда $f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} n! & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

Доказательство.

$f^{(k)}(x) = (n)(n-1)...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$

Если $n > k$, то $f^{(k)}(x_0) = 0$

Если $n = k$, то $f^{(k)} = n(n-1)...1 = n!$

Если $n < k$, то $f^{(k)}(x_0) = 0$ □

Теорема 4.15 (Формула Тейлора для многочлена)**.**

Пусть T – многочлен степени $\leqslant n$.

Тогда $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Доказательство.

$T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$

$T^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k((x-x_0)^k)^{(m)}$

Подставим $x = x_0$.

$T^{(m)}(x_0) = c_m \cdot m! \implies c_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$ □

***Определение* 4.8.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \;\; x \in (a, b)$

f n раз дифференцируема в точке x_0.

n-ый многочлен Тейлора для функции f в точке x_0.

$T_{n,x_0}f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Замечание.

Предыдущая теорема утверждает, что если $\deg T = n$, то он является собственным многочленом Тейлора степени n.

***Определение* 4.9.**

Формула Тейлора.

Если f n раз дифференцируема в точке x_0.

$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$

Лемма.

g n раз дифференцируема в точке x_0, причем $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0$

Тогда $g(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство.

Надо доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = ... = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$

Воспользуемся определением дифференцируемости в точке x_0.

$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)$, т.к. по условию много нулей.

А значит, последний предел равен 0. И получаем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ □

Теорема 4.16 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)**.**

f n раз дифференцируема в точке x_0

Тогда $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x-x_0)^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

Доказательство.

$g(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$0 \leqslant m \leqslant n$

$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k)^{(m)}\Big|_{x-x_0} = f^{(m)}(x_0) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}((x-x_0)^k)^{(m)}\Big|_{x-x_0} = f^{(m)}(x_0) - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}m! = 0$

Значит, g удовлетворяет условию леммы $\implies g(x) = o((x-x_0)^n)$ □

Следствие.

Если P – многочлен степени n, т.ч. $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, то $P(x) = T_{n,x_0}f(x)$

Доказательство.

$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n) = T_{n,x_0}f(x) + o((x-x_0)^n)$.

Тогда

$Q(x) = P(x) - T_{n,x_0}f(x) = o((x-x_0)^n)$

Q – многочлен степени $\leqslant n$.

$Q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + ... + q_n(x-x_0)^n =$

Возьмем наименьшее k, для которого $q_k \neq 0$

$= q_k(x-x_0)^k + q_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + ... + q_n(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n)$

Поделим на $(x-x_0)^k$.

$q_k + q_{k+1}(x-x_0) + ... + q_n(x-x_0)^{n-k} = o((x-x_0)^{n-k})$

Левая часть стремится к q_k, правая к 0.

Значит, $q_k = 0$.

$\implies$ все $q_k = 0$.

Т.е. $Q \equiv 0$. □

Теорема 4.17 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ $n+1$ раз дифференцируема на $\langle a, b\rangle$

и $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда существует $c \in (x_0, x)$, т.ч.

$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Доказательство.

$g(t) = f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$

$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M(x-x_0)^{n+1}$

Хотим доказать, что $M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого $c \in (x, x_0)$.

$g^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) - (T_{n,x_0}f(t))^{(m)} - M((t-x_0)^{n+1})^{(m)}$

$0 \leqslant m \leqslant n$ подставим $t = x_0$

$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - f^{(m)}(x_0) + 0 = 0$

$g(x_0) = g'(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0$

$g(x) = 0$, т.к. подобрали M для этого равенства.

Раз $g(x_0) = g(x) \implies \exists c_1 \in (x_0, x) \;\; g'(c_1) = 0$ по теореме Ролля.

Тогда $g'(x_0) = g'(c_1) \implies \exists c_2 \in (x_0, c_1) \;\; g''(c_2) = 0$

...

$g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(c_n) \implies \exists c_{n+1} \in (x_0, c_n) \;\; g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$

Получаем, что

$0 = g^{(n+1)}(c_{n+1}) = f^{(n+1)}(c_{n+1}) - M(n+1)!$

Т.е. $M = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$

Таким образом, c_{n+1} – искомая точка.

□

Следствие.

1. Если $\left| f^{(n+1)}(t) \right| \leqslant M \;\; \forall t \in \langle a, b \rangle$,

   то $|\, R_{n,x_0}f(x) \,| \leqslant \frac{M|\, x-x_0 \,|^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-x_0)^{n+1})$

   Доказательство.
   $|\, R_{n,x_0}f(x) \,| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M|\, x-x_0 \,|^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-x_0)^{n+1})$ □

2. Если $\left| f^{(n)}(t) \right| \leqslant M \;\; \forall t \in \langle a, b \rangle \;\; \forall n$, тогда

   $T_{n,x_0}f(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$

   Вспомним, что $T_{n,x_0}f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

   Тогда условие следствия можно переписать как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x)$

   Эта сумма – ряд Тейлора.

   Доказательство.
   $|\, T_{n,x_0}f(x) - f(x) \,| = |\, R_{n,x_0}f(x) \,| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \frac{|\, x-x_0 \,|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ □

Пример Формулы Тейлора для элементарных функций.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

3. $\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

4. $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

5. $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{p(p-1)(p-2)...(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Доказательство.
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$

1. $f(x) = e^x \;\; f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = e^0 = 1$
2. $f(x) = \cos x \;\; f^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}k) \;\; f^{(k)}(0) = \cos(\frac{\pi k}{2})$
   $1 \; 0 \; -1 \; 0 \; 1 \; 0 \; -1$
3. Аналогично предыдущему.
4. $f(x) = \ln(1+x) \;\; f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}(k-1)!$
   $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \;\; \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
5. $f(x) = (1+x)^p \;\; f^{(k)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(1+x)^{p-n}$
   $f^{(k)}(0) = p(p-1)...(p-n+1)$

□

Пример 3 формулы в рядах Тейлора.

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

Причем все формулы $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
Для синуса и косинуса:

$|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$.

Значит, выполняется то следствие.

Для e^x.

Рассмотрим на $[-a, a]$.

$\left| f^{(n)}(t) \right| = e^t \leqslant e^a$

По следствию 2 на $[-a, a]$ $\; e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Но любая точка $x \in [-a, a]$ для некоторого a. □

Теорема 4.18.
e – иррационально.

Доказательство.

Уже знаем, что $e \in (2,3)$, т.е. уже знаем, что не является целым.

Предположим, что $e = \frac{m}{n}$.

$\frac{m}{n} = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ для некоторого $c \in (0,1)$

$m(n-1)! = n!(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}) + \frac{e^c}{n+1}$

Заметим, что число слева от знака равенства и первой слагаемое – натуральные.

Но тогда $\frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{Z}$

$0 < e^c < e^1 < 3$

$0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leqslant 1$

Т.е. целым оно являться не может. Противоречие. □

4.4. §4 Экстремумы функций

***Определение* 4.10.**

$f : E \to \mathbb{R}\ \ x_0 \in E$

1. x_0 – точка локального минимума, если
   $\exists$ окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E\ \ f(x) \geqslant f(x_0)$
2. x_0 – точка локального максимума, если
   $\exists$ окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E\ \ f(x) \leqslant f(x_0)$
3. x_0 – точка строгого локального минимума, если
   $\exists$ окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E\ \ x \neq x_0\ \ f(x) > f(x_0)$
4. x_0 – точка строгого локального максимума, если
   $\exists$ окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E\ \ x \neq x_0\ \ f(x) < f(x_0)$
5. Точка экстремума – это точка локального максимума или точка локального минимума

Теорема 4.19 (Необходимое условие экстремума)**.**

$f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}\ \ x_0 \in (a,b)$ – точка экстремума.

Тогда, если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$

Замечание.

Теорема утверждает, что точки экстремума могут быть либо в точках, где производная равна нулю, либо в точках, где f не дифференцируема.

Доказательство.

Пусть x_0 – локальный максимум.

Тогда $\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.ч. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \langle a,b \rangle \implies f(x) \leqslant f(x_0)$

Уменьшим δ так, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$

$\implies \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \ f(x) \leqslant f(x_0)$

Теперь применим теорему Ферма и получим, что $f'(x_0) = 0$.

□

Замечание.

1. Обратное неверно. $f(x) = x^3 \;\; f'(x) = 3x^2 \;\; f'(0) = 0$

   Но 0 точка не экстремума...

2. Точка экстремума может оказаться в точке не дифференцируемой.

   $f(x) = |\,x\,|$.

   В точке 0 она не дифференцируема.

***Определение* 4.11.**

Точки, подозрительные на экстремум – это точки, в которых либо производная равна нулю, либо функция не дифференцируема.

Теорема 4.20 (достаточное условие экстремума в терминах первой производной)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \;\; x_0 \in (a, b)$

и f дифференцируема на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ и в точке x_0 функция непрерывна.

1. Если $f' < 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f' > 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 строгий минимум.

2. Если $f' > 0$ на $(x - \delta, x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 строгий максимум.

3. Если $f' \leqslant 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f' \geqslant 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 нестрогий минимум.

4. Если $f' \geqslant 0$ на $(x - \delta, x_0)$ и $f' \leqslant 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 нестрогий максимум.

Замечание.

Если f' не меняет знак в x_0, то в x_0 нет экстремума.

Доказательство.

1. $f' < 0$ на $(x_0 - \delta, x_0)$ и f непрерывна на $(x_0 - \delta, x_0]$

   $\implies f$ строго убывает на $(x_0 - \delta, x_0]$

   $\implies f(x) > f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

   Знаем, что $f' > 0$ на $(x_0, x_0 + \delta)$ и f непрерывна $[x_0, x_0 + \delta)$

   $\implies f$ строго возрастает на $[x_0, x_0 + \delta)$

   $\implies f(x_0) < f(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

   $\implies f(x_0) < f(x)$ при $x_0 \neq x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies x_0$ – точка строгого локального минимума.

Аналогично показываются остальные пунктики и замечание. □

Теорема 4.21 (достаточное условие экстремума в терминах второй производной)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \;\; x_0 \in (a, b)$

f дважды дифференцируема в точке x_0.

$f'(x_0) = 0$

1. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – строгий локальный максимум.

2. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – строгий локальный минимум.

3. Если $f''(x_0) = 0$, то может быть по-разному.

Теорема 4.22 (Достаточное условие в терминах n-ой производной)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\ \ x_0 \in (a, b)$

$f\ \ n$ раз дифференцируема в точке x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

1. Если n четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – строгий локальный максимум.
2. Если n четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – строгий локальный минимум.
3. Если n нечетное и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то x_0 не точка экстремума.

Доказательство.

По формуле Тейлора.

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

По условию первые слагаемые нули, последнее не ноль.

$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1))$

1. $f^{(n)}(x_0) < 0$ и n четное, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$. Второй множитель отрицателен в некоторой окрестности.

   Получаем, что и все произведение отрицательно.

   А значит, $f(x) - f(x_0) < 0$ в некоторой окрестности x_0. А значит, x_0 – точка строго локального максимума.

2. $f^{(n)}(x_0) > 0$ и n четное, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$. Второй множитель положителен в некоторой окрестности.

   Получаем, что и все произведение положительно.

   А значит, $f(x) - f(x_0) > 0$ в некоторой окрестности x_0. А значит, x_0 – точка строго локального минимума.

3. n – нечетное. Тогда $(x - x_0)^n > 0$ при $x > x_0$, и < 0 иначе.

   $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$

   $\implies$ знакопостоянна в некоторой окрестности точки x_0.

   $\implies$ $f(x) - f(x_0)$ одного знака справа от x_0 и другого слева.

   $\implies$ это не точка экстремума.

$\square$

4.5. §5 Выпуклые функции

***Определение* 4.12.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

f – выпуклая (выпуклая вниз), если $\forall x, y \in \langle a, b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0, 1)\ \ (\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Если знак строгий, то f строго выпуклая.

f – вогнутая (выпуклая вверх), если $\forall x, y \in \langle a, b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0, 1)\ \ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Если знак строгий, то f строго вогнутая.

Замечание.

Пусть $x < y$. Тогда

$x = \lambda x + (1-\lambda)x < \lambda x + (1-\lambda)y < \lambda y + (1-\lambda)y = y$

Покажем, что любая точка из интервала представима в таком виде.

$z \in (x, y) \quad \lambda = \frac{y-z}{y-x} \in (0, 1)$

$z = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y$

На основе этого замечания можно переформулировать определение.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – выпуклая $\iff \forall x < z < y \;\; f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y)$

Это графически выглядит как то, что любой отрезок выше функции. (Любая точка лежит не ниже)

Пример.

$f(x) = x^2$ – выпуклая.

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$

$\lambda^2x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2y^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$

$2\lambda(1-\lambda)xy \leqslant (1-\lambda^2)x^2 + ((1-\lambda) - (1-\lambda)^2)y^2$

$2\lambda(1-\lambda)xy \leqslant \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2)$

$2xy \leqslant x^2 + y^2$ – а это верно.

Замечание.

Еще переформулировка определения

$(y-z)f(z) + (z-x)f(z) = (y-x)f(z) \leqslant (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$

$(y-z)(f(z) - f(x)) \leqslant (z-x)(f(y) - f(z))$

$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$

Графически: две хорды от точки смотрят в разные стороны.

Свойства Выпуклых функций.

1. $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и выпуклые, то $f + g$ тоже выпуклая.
2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая и $\alpha > 0 \implies \alpha f$ выпуклая
3. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, то $-f$ вогнутая.

Доказательство.

1. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
   $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$
   и складываем.
2. Умножаем то же неравенство на что-то положительное, неравенство сохранится.

$\square$

Лемма (о трех хордах)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и f – выпуклая.

Тогда

Если $u < v < w$, то

$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$

Любое из трех неравенств, если оно выполняется $\forall u < v < w$ гарантирует выпуклость f.

Доказательство.

Выпуклость равносильна (1) $\leqslant$ (2)

$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u}$

$(w-u)(f(v)-f(u)) \leqslant (v-u)(f(w)-f(u))$

$(w-u)f(v) \leqslant ((w-u)-(v-u))f(u)+(v-u)f(w)$

$(w-u)f(v) \leqslant (w-v)f(u)+(v-u)f(w)$

Такое неравенство уже было во всяких переформулировках выпуклости.

Выпуклость равносильна (2) $\leqslant$ (3)

$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$

$(f(w)-f(u))(w-v) \leqslant (f(w)-f(v))(w-u)$

$(w-u)f(v) \leqslant (w-v)f(u)+((w-u)-(w-v))(f(w))$

$(w-u)f(v) \leqslant (w-v)f(u)+(v-u)f(w)$ □

Замечание.

Для строгой выпуклости все знаки строгие.

Теорема 4.23.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и выпуклая.

Тогда $\forall x \in (a,b)$ $\exists f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$

Причем $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$

Доказательство.

$u < x_0 < v < w$

$\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \leqslant \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0} \leqslant \frac{f(w)-f(x_0)}{w-x_0}$

Если $w \searrow x_0$, то $\frac{f(w)-f(x_0)}{w-x_0}$ уменьшается.

Кроме того, $\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \leqslant \frac{f(w)-f(x_0)}{w-x_0}$

$\frac{f(w)-f(x_0)}{w-x_0}$ убывает и ограничена снизу, значит существует $\lim\limits_{w\to x_0+} \frac{f(w)-f(x_0)}{w-x_0} =: f'_+(x_0)$

$t < u < x_0$

$\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \leqslant \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \leqslant f'_+(x_0)$

$\implies \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ монотонно возрастает и ограничена сверху

$\implies$ существует $\lim\limits_{t\to x_0-} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} =: f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ □

Следствие.

Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, то f непрерывна на (a,b)

Доказательство.

$\exists f'_-(x_0) \implies f$ непрерывна слева в точке x_0

$\exists f'_+(x_0) \implies f$ непрерывна справа в точке x_0

Значит, f непрерывна в точке x_0. □

Замечание.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и выпуклая, то производной на $[a, b]$ может не быть.

Пример.

Производные f'_+ и f'_- могут быть неравными.

$f(x) = |\,x\,|$

$f'_+(0) = 1 \;\; f'_-(0) = -1$

Теорема 4.24.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и f дифференцируема на (a, b)

Тогда f выпукла на $(a, b) \iff f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \;\; \forall x, x_0 \in (a, b)$

Замечание.

Геометрический смысл – в какой бы точке не провели касательную, график лежит над касательной $\iff$ функция выпукла.

Доказательство.

“$\implies$”

При $x < x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'_+(x_0) = f'(x_0)$

$\implies f(x) - f(x_0) \geqslant (x - x_0)f'(x_0)$

При $x > x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'_-(x_0) = f'(x_0)$

$\implies f(x) - f(x_0) \geqslant (x - x_0)f'(x_0)$

“$\impliedby$”

$x < x_0 < y$

По лемме о трех хордах достаточно проверить, что

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$

По условию $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(y) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0)$

Домножим первое на $(y - x_0)$, второе на $(x_0 - x)$ и сложим:

$f(x)(y-x_0)+(x_0-x)f(y) \geqslant (y-x_0)f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)(y-x_0)+(x_0-x)f(x_0)+f'(x_0)(y-x_0)(x_0-x)$

$(f(x) - f(x_0))(y - x_0) \geqslant (f(y) - f(x_0))(x - x_0)$

Осталось поделить на $(x - x_0)(y - x_0) < 0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$ □

Теорема 4.25. (**Критерий выпуклости**)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b)

Тогда f – выпукла $\iff f'$ монотонно возрастает.

(f – строго выпукла $\iff f'$ строго монотонно возрастает.)

Доказательство.

"$\Longleftarrow$"

$u < v < w$ Надо доказать, что $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} < \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$

По теореме Лагранжа

$\exists c \in (u, v)$ и $d \in (v, w)$ $f'(c) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ $f'(d) = \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$

Но $c < d \implies f'(c) < f'(d)$

"$\implies$"

$t < u < v < w$

Тогда $\frac{f(t)-f(u)}{t-u} \leqslant \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$

При $t \to u-$

$\frac{f(t)-f(u)}{t-u} \to f'(u)$

При $w \to v+$

$\frac{f(v)-f(w)}{v-w} \to f'(v)$

Получили, что

$f'(u) \leqslant \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leqslant f'(v)$

$\implies f'$ монотонно возрастает.

Чтобы была строгая монотонность нужно добавить еще одну точку между u и v.

$u < s < v$

$f'(u) \leqslant \frac{f(u)-f(s)}{u-s} < \frac{f(v)-f(s)}{v-s} \leqslant f'(v)$ ☐

Следствие. (***Критерий выпуклости в терминах второй производной***)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и f дважды дифференцируема на (a, b)

Тогда f выпукла $\iff f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in (a, b)$

И если $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a, b) \implies f$ строго выпуклая (а наоборот неверно)

Доказательство.

f выпукла $\iff f'$ монотонно возрастает $\iff f'' \geqslant 0$

f строго выпукла $\iff f'$ строго монотонно возрастает $\Longleftarrow$ $f'' > 0$ ☐

Пример.

$f(x) = x^4$ строго выпукла.

Но $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$

Пример.

1. $f(x) = a^x$ $a \neq 1$

   $f''(x) = (\ln a)^2 a^x > 0 \implies f$ строго выпукла.

2. $f(x) = \ln x$

   $f''(x) = (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} < 0 \implies f$ строго вогнутая.

3. $f(x) = x^p$ $x > 0$

   $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$

   Эта штука > 0 при $p > 1$

Эта штука > 0 при $p < 0$

Эта штука < 0 при $p \in (0, 1)$

Тогда x^p строго выпукла при $p > 1$ или при $p < 0$, и она строго вогнута при $p \in (0, 1)$

Теорема 4.26. (**Неравенство Йенсена**)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая

$x_1, x_2, ..., x_n \in \langle a, b\rangle$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0, 1] \quad \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$

Тогда $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$

Доказательство.

База $n = 2, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

$f\big(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2\big) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2)$ – определение выпуклости.

Индукционный переход $n \to n + 1$.

$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\big((1 - \lambda_{n+1})\frac{\lambda_1 x_1}{(1-\lambda_{n+1})} + \ldots + (1 - \lambda_{n+1})\frac{\lambda_n x_n}{(1-\lambda_{n+1})} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\big) \leqslant$

Вспомним, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$

$\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) f\big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$

$\leqslant (1 - \lambda_{n+1})\big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$

$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$ □

Теорема 4.27. (**Неравенство о средних**)

$x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$

Тогда $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

Доказательство.

Если $x_k = 0$, то все очевидно.

Считаем, что $x_1, ..., x_n > 0$

$\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n} = \ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}) \leqslant \ln(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n})$

Это неравенство Йенсена для $f(x) = \ln x$ и $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ □

***Определение* 4.13.**

Среднее степенное порядка $p, \ \ x_1, ..., x_n > 0$

$M_p := (\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$

$p = 1$ – среднее арифметическое

$p = 2$ – среднее квадратичное

$p = -1$ – среднее гармоническое

$M_0 := \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$

Теорема 4.28. (**Неравенство между средними степенными**)

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n > 0, \ \ p < q$.

Тогда $M_p \leqslant M_q$.

Доказательство.

Случай $0 < p < q$.

$f(x) = x^{\frac{q}{p}}$ – выпуклая функция

$x_1 = a_1^p, ..., x_n = a_n^p \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$

$(\frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{n})^{\frac{q}{p}} = f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) \leqslant \frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n} = \frac{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}{n}$

И извлекаем корень q-ой степени. Получаем:

$(\frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}} \leqslant (\frac{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}{n})^{\frac{1}{q}}$

Случай $p < q < 0$ аналогичен.

Случай $p = 0 < q$

$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leqslant (\frac{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}{n})^{\frac{1}{q}}$

$\sqrt[n]{a_1^q a_2^q ... a_n^q} \leqslant (\frac{a_1^q+a_2^q+...+a_n^q}{n})$ – неравенство о средних для a_i^q.

Случай $p < q = 0$

$(\frac{a_1^p+...+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \iff \frac{a_1^p+...+a_n^p}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1^p a_2^p ... a_n^p}$

Случай $p < 0 < q$

$(\frac{a_1^p+...+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leqslant (\frac{a_1^q+...+a_n^q}{n})^{\frac{1}{q}}$ □

Упражнение.

Доказать, что $\lim\limits_{p \to 0} M_p = M_0$

Теорема 4.29. (**Неравенство Гельдера**)

$a_1, ..., a_n, b_1, ... b_n \geqslant 0$

и $p, q > 1, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Тогда

$(a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant a_1 b_1 + ... + a_n b_n$

Доказательство.

$B^q := b_1^q + ... + b_n^q$

$f(x) = x^p$ – выпуклая

$x_k := \frac{a_k}{b_k^{q/p}} \;\; \lambda_k := \frac{b_k^q}{B^q} \implies \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$

$(\frac{b_1^q}{B^q} \cdot \frac{a_1}{b_1^{q/p}} + ... + \frac{b_n^q}{B^q} \cdot \frac{a_n}{b_n^{q/p}})^p = f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n) = \frac{b_1^q}{B^q} \cdot \frac{a_1^p}{b_1^q} + ... + \frac{b_n^q}{B^q} \cdot \frac{a_n^p}{b_n^q}$

$\frac{b_i^q}{B^q} \cdot \frac{a_i}{b_i^{q/p}} = \frac{b_i^{q-q/p} a_i}{B^q} = \frac{b_i^{q(1-1/p)} a_i}{B^q} = \frac{b_i a_i}{B^q}$

$(\frac{a_1 b_1 + ... + a_n b_n}{B^q})^p \leqslant \frac{a_1^p + ... + a_n^p}{B^q}$

$\implies a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leqslant B^q \cdot \frac{1}{B^{q/p}} (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} = B(a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ □

Следствие 1.

$a_1, ... a_n, b_1, ... b_n \in \mathbb{R}$

$p, q > 1, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\implies (|\, a_1 \,|^p + ... + |\, a_n \,|^p)^{\frac{1}{p}} (|\, b_1 \,|^q + ... + |\, b_n \,|^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant |\, a_1 b_1 + ... + a_n b_n \,|$

Доказательство.

$(|\, a_1 \,|^p + ... + |\, a_n \,|^p)^{\frac{1}{p}} (|\, b_1 \,|^q + ... + |\, b_n \,|^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant |\, a_1 b_1 \,| + \ldots + |\, a_n b_n \,| \geqslant |\, a_1 b_1 + ... + a_n b_n \,|$ □

Следствие 2. (**Неравенство Коши-Буняковского**)

$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2$

Доказательство.

$p = q = 2$

Далее по следствию 1. $\square$

Упражнение.

Доказать, что если $a < p < 1$ и $q < 0$, то в неравенстве Гельдера знак поменяется на противоположный.

Теорема 4.30. (**Неравенство Минковского**)

$a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \geqslant 0$

$p \geqslant 1$

Тогда $\big((a_1 + b_1)^p + ... + (a_n + b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + ... + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство.

Положим $q := \frac{p}{p-1} \implies (p-1)q = p, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k + b_k)^{p-1} \underset{\text{Неравенство Гельдера}}{\leqslant}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \big((a_k + b_k)^{p-1}\big)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \big((a_k + b_k)^{p-1}\big)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\big)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее сократим на последний множитель. Останется нужное неравенство. $\square$

Следствие.

$p \geqslant 1$. Тогда

$(|\, a_1 + b_1\,|^p + ... + |\, a_n + b_n\,|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (|\, a_1\,|^p + ... + |\, a_n\,|^p)^{\frac{1}{p}} + (|\, b_1\,|^p + ... + |\, b_n\,|^p)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство.

$(|\, a_1\,|^p + \ldots + |\, a_n\,|^p)^{\frac{1}{p}} + (|\, b_1\,|^p + \ldots + |\, b_n\,|^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant$

$\big((|\, a_1\,| + |\, b_1\,|)^p + \ldots + (|\, a_n\,| + |\, b_n\,|)^p\big)^{\frac{1}{p}} \geqslant$

$(|\, a_1 + b_1\,|^p + \ldots + |\, a_n + b_n\,|^p)^{\frac{1}{p}}$ $\square$

Упражнение.

Если $0 < p < 1$, то неравенство меняет знак.

5. Интегральное исчисление функций от одной переменной

5.1. §1. Первообразная и неопределенные интеграл

***Определение* 5.1.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

F – первообразная функции f, если $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $F' = f$.

Пример.

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

У функции f нет первообразной. Покажем это от противного.

$F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in (-1, 1)$

Рассмотрим F' на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и применим теорему Дарбу.

$F'(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = 0$

$F'(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 1$

Должна существовать $c \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})\ \ f(c) = F'(c) = \frac{1}{2}$

Но f не принимает такого значения.

Значит, у нее нет первообразной.

Теорема 5.1.

У любой непрерывной функции есть первообразная.

Доказательство этой теоремы будет чуть позже.

Теорема 5.2.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и F – ее первообразная.

1. $F + C$ тоже первообразная f.
2. Если Φ – это еще одна первообразная f, то $\Phi = F + C$

Доказательство.

1. $(F + C)' = F' + C' = F' = f$
2. $g := \Phi - F$

   $g' = \Phi' - F' = f - f = 0$

   Тогда по следствию из теоремы Лагранжа $g \cong const$

□

***Определение* 5.2.**

Множество всех первообразных функции f называется неопределенным интегралом.

$\int f(x)dx$

Замечание.

Если F – первообразная, то

$\int f(x)dx = \{F(x)+C\} = F(x)+C$

Для доказательства этого равенства достаточно проверить, что $F' = f$.

Теорема 5.3 (Таблица интегралов)**.**

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \ \ p \neq 1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ a \neq 1$
   $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C$
11. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{x-1}{x+1}\,\right| + C$

Доказательство.

10. $(\ln(x+\sqrt{x^2\pm 1}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}(x+\sqrt{x^2\pm1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}(1+\frac{1}{2}(\sqrt{x^2\pm 1}^{-\frac{1}{2}}2x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$
11. $(\frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{x-1}{x+1}\,\right|)' = \frac{1}{2}((\ln|\,x-1\,|)' - (\ln|\,x+1\,|)') = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) = \frac{1}{x^2-1}$

$\square$

Теорема 5.4 (арифметические действия с неопределенными интегралами)**.**

$f, g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и f, g имеют первообразные.

Тогда.

1. $f+g$ имеет первообразную и $\int(f+g)dx = \int f dx + \int g dx$
2. αf имеет первообразную и $\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$, если $\alpha \neq 0$.

Доказательство.

1. $F' = f,\ G' = g \implies (F+G)' = F' + G' = f + g$
2. $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$.
   $\alpha \int f dx = \alpha\{F+C\} = \{\alpha F + \alpha C\}$
   $\int \alpha f dx = \{\alpha F + C\}$

□

Следствие Линейность интеграла.

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразную

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (не оба нули)

Тогда $\alpha f + \beta g$ имеют первообразную и

$\int(\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$

Доказательство.

$\int(\alpha f + \beta g)dx = \int \alpha f dx + \int \beta g dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$

□

Теорема 5.5 (замена переменной в неопределенном интеграле)**.**

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ F – ее первообразная.

$\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ и φ дифференцируема на $\langle c, d\rangle$.

Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство.

$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

□

Следствие.

F – первообразная для f.

Тогда

$\int f(\alpha t + \beta)dt = \frac{F(\alpha t+\beta)}{\alpha} + C$

Доказательство.

$\varphi(t) = \alpha t + \beta$ и подставляем в теорему. □

Пример.

$\int \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt = \int \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi^2(t)}dt =$

$\varphi(t) = \sin t$

$\varphi'(t) = \cos t$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$= \operatorname{arctg}(\varphi(t)) + C = \operatorname{arctg}(\sin t) + C$

Теорема 5.6 (Формула интегрирования по частям)**.**

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемые

и fg' имеет первообразную.

Тогда $f'g$ имеет первообразную и

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Доказательство.

H – первообразная для fg'.

Хотим доказать, что $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - H(x) + C$

$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$

□

Пример.

$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$

$f(x) = x$

$g(x) = \ln x \;\; g'(x) = \frac{1}{x}$

5.2. §2. Определенный интеграл

$\mathcal{F}$ – всевозможные ограниченные подмножества плоскости. (т.е. помещается в круг какого-то радиуса)

$\sigma : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$ – функция площади

1. Если $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ непересекающиеся множества

   $\sigma(E_1 \cup E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

2. $E = [a, b] \times [c, d] \;\; \sigma(E) = (b - a)(d - c)$

Следствие.

$E_1 \subset E_2 \implies \sigma(E_1) \leqslant \sigma(E_2)$

Доказательство.

$E_2 = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)$

$\sigma(E_2) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2 \backslash E_1) \geqslant \sigma(E_1)$ □

Ослабим первое условие.

1. $E_1 \subset E_2 \implies \sigma(E_1) \leqslant \sigma(E_2)$

2. Будем резать фигурки лишь вертикальными прямыми.

   Для E все точки, левее l, попадают в E_-, а все правее попадают в E_+, остальные неважно

   Тогда $E = E_+ \cup E_- \;\; E_+ \cap E_- = \varnothing$

   $\sigma(E) = \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$

   Аналогично для горизонтальных прямых.

3. $E = [a, b] \times [c, d] \;\; \sigma(E) = (b - a)(d - c)$

***Определение* 5.3.**

Псевдоплощадь – $\sigma : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, которая удовлетворяет 1-3.

Свойства σ.

1. Любое подмножество горизонтального или вертикального отрезка имеет нулевую площадь.

   Доказательство.

   Отрезок – прямоугольник, одна из сторон которого равна 0 $\implies$ и его площадь равна 0.

   $\implies 0 \leqslant \sigma(e) \leqslant \sigma(segment) = 0$

   где e – подмножество отрезка

   $\implies \sigma(e) = 0.$ □

2. Если $E_+ \cap E_- \subset l$, то тогда $\sigma(E) = \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$

   Доказательство.
   $e = E_1 \cap E_2 \subset l \;\; \sigma(e) = 0$ по предыдущему пункту.
   $\sigma(E_+) = \sigma(E_+ \backslash e) + \sigma(e) = \sigma(E_+ \backslash e)$
   $E = E_- \cup (E_+ \backslash e)$ – непересекающиеся множества
   $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \backslash e) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ □

Пример.

Далее, т.к. прямоугольники умеем считать из определения, $S(P)$ – площадь прямоугольника P.

1. $\sigma_1(E) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k\}$
   Где P_k – прямоугольник со сторонами, параллельными осям.
2. $\sigma_2(E) := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} S(P_k) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

Замечание.

$\sigma_1 \geqslant \sigma_2$
(Т.к. второе множество включает в себя первое, дозаполненное нулями)

Упражнение. $E = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$
Доказать, что $\sigma_1(E) = 1 \quad \sigma_2(E) = 0$

Теорема 5.7.

1. σ_1 – псевдоплощадь.
2. σ_1 не меняется при параллельном переносе. (фигуры)

Доказательство.

1. (a) $\sigma_1(E) = \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+)$
   "$\geqslant$"
   Возьмем какое-нибудь покрытие множества $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.
   Будем разрезать каждое P_k на P_k^+ и P_k^-.
   (по той самой вертикальной линии)
   Тогда $S(P_k) = S(P_k^+) + S(P_k^-)$
   $\sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (S(P_k^+) + S(P_k^-)) \geqslant \sigma_1(E_+) + \sigma_1(E_-)$
   Т.к. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k^+ \supset E_+ \quad \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k^- \supset E_-$
   $\sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k) \geqslant \sigma_1(E_+) + \sigma_1(E_-)$
   $\implies \sigma_1(E) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k)\} \geqslant \sigma_1(E_+) + \sigma_1(E_-)$
   "$\leqslant$"

$$\bigcup_{k=1}^{n} P_k \supset E_- \quad \sum_{k=1}^{n} S(P_k) < \sigma_1(E_-) + \varepsilon$$
$$\bigcup_{k=1}^{m} Q_k \supset E_+ \quad \sum_{k=1}^{m} S(Q_k) < \sigma_1(E_+) + \varepsilon$$
$$\implies \bigcup_{k=1}^{n} P_k \cup \bigcup_{k=1}^{m} Q_k \supset E$$
$$\implies \sigma_1(E) \leqslant \sum_{k=1}^{n} S(P_k) + \sum_{k=1}^{m} S(Q_k) < \sigma_1(E_+) + \sigma_1(E_-) + 2\varepsilon$$
$$\implies \sigma_1(E) < \sigma_1(E_-) + \sigma_1(E_+) + 2\varepsilon$$

(b) $\tilde{E} \subset E$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset E \supset \tilde{E}$

$$\sigma_1(\tilde{E}) = \inf\{\sum_{k=1}^{n} S(P_k) \ : \ \bigcup P_k \supset \tilde{E}\} \leqslant \sigma_1(E)$$

(c) $\sigma_1(P) = S(P)$

"$\leqslant$" Берем P в качестве покрытия себя.

"$\geqslant$" Площадь большого – сумма площадей маленьких.

Рассмотрим покрытие $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset P$

Разрезаем все по всевозможным прямым, ограничивающим каждый прямоугольник в покрытии.

Каждый прямоугольник разрежется на маленькие прямоугольники.

Посмотрим на те кусочки, из которых составляется P.

Каждый из них отправим в свое P_k.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} S(P_k) \geqslant \sum S(parts) = S(P)$$

2. $\tilde{E}$ – параллельный перенос E на вектор v.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \supset E$ – покрытие. Возьмем $\tilde{P}_k$ – перенос P_k на вектор v.

$$\implies \bigcup_{k=1}^{n} \tilde{P}_k \supset \tilde{E} \text{ и } \sum_{k=1}^{n} S(\tilde{P}_k) = \sum_{k=1}^{n} S(P_k) \implies \sigma_1(\tilde{E}) = \sigma_1(E)$$

$\square$

Упражнение. Доказать аналогичную теорему для σ_2.

***Определение* 5.4.**

Положительные и отрицательные составляющие функции.

$f \ : \ E \to \mathbb{R}$

$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$

$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$

Свойства.

1. $f_\pm \geqslant 0$

2. $f = f_+ - f_-$

3. $|f| = f_+ + f_-$
4. $f_+ = \frac{f+|f|}{2} \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}$
5. Если f непрерывна, то $f_+,\ f_-$ тоже непрерывны.

   Доказательство. Если функция непрерывна, то и ее модуль непрерывен, то и их полусумма и полуразность непрерывны. □

***Определение* 5.5.**

$f : E \to \mathbb{R} \quad f \geqslant 0$

Подграфик $\mathcal{P}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \ : \ x \in E,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Замечание.

Если $f \in C[a, b] \ \ f \geqslant 0$, то $\mathcal{P}_f$ – ограниченное множество.

Т.к. по теореме Вейерштрасса, если функция непрерывная на отрезке, то она на нем ограничена. И тогда $\mathcal{P}_f \subset [a, b] \times [0, C]$

Зафиксируем некоторую псевдоплощадь σ.

***Определение* 5.6.**

$f \in C[a, b]$

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx := \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-})$

Свойства.

1. $\int\limits_a^a f = 0$
2. $\int\limits_a^b 0 = 0$
3. $\int\limits_a^b c = c(b - a)$
4. Если $f \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_f) \geqslant 0$
5. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
6. Если $f \geqslant 0$ и $\int\limits_a^b f = 0$, то $f = 0$.

Доказательство.

Свойства 1-2 очевидны. (площадь отрезка)

4. Если $f \geqslant 0$, то $f_+ = f \ \ f_- = 0 \implies \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = 0$

   и $\int\limits_a^b = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) \geqslant 0$

5. $(-f)_+ = f_-$ $(-f)_- = f_+$

   $\int\limits_a^b (-f) = \sigma(\mathcal{P}_{(-f)_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{(-f)_-}) = \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) = -\int\limits_a^b f$

3. Из-за пункта 5 достаточно рассмотреть $c > 0$.

   $\implies \mathcal{P}_c = [a,b] \times [0,c]$ $\int\limits_a^b c = \sigma(\mathcal{P}_c) = c(b-a)$

6. Здесь существенна непрерывность f.

   От противного. Пусть $f(x_0) > 0$ при $x_0 \in [a,b]$

   По непрерывности в точке x_0 $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$

   $\implies \exists \delta > 0 \ : \ \forall \,|\, x - x_0 \,|\, < \delta \ \ |\, f(x) - f(x_0) \,|\, < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$

   в частности $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$

   $\mathcal{P}_f \supset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]$

   $\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_f) \geqslant \sigma(\mathcal{P}) \geqslant \sigma([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]) > 0.$

   Пришли к противоречию.

□

5.3. §3. Свойства определенного интеграла

Теорема 5.8 (аддитивность интеграла)**.**
$f \in C[a,b]$ $c \in [a,b]$

Тогда $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Обозначение $\mathcal{P}_g(E) :=$ подграфик $g\big|_E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in E, \ 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}$

Доказательство.
$\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}([a,c])) + \sigma(\mathcal{P}_{f_+}([c,b])) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}([a,c])) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}([c,b])) = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$ □

Следствие.
$f \in C[a,b]$ $a \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant ... \leqslant c_n \leqslant b$

Тогда

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^{c_1} f + \int\limits_{c_1}^{c_2} f + ... + \int\limits_{c_n}^b f$

Доказательство.
Индукция по n. □

Теорема 5.9 (Монотонность интеграла)**.**
$f, g \in C[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

Доказательство.

$f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} = g_+$

$f_- = \max\{-f, 0\} \geqslant \max\{-g, 0\} = g_-$

$\implies \mathcal{P}_{f_+} \subset \mathcal{P}_{g_+} \quad \mathcal{P}_{f_-} \supset \mathcal{P}_{g_-}$

$\implies \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) \leqslant \sigma(\mathcal{P}_{g_+}) \quad \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \geqslant \sigma(\mathcal{P}_{g_-})$

$\int\limits_a^b f = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}) \leqslant \sigma(\mathcal{P}_{g_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{g_-}) = \int\limits_a^b g$ □

Следствие.

1. $f \in C[a, b] \;\; m \leqslant f \leqslant M \;\; \forall x \in [a, b]$

   Тогда $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant M(b-a)$

2. $\left| \int\limits_a^b f \right| \leqslant \int\limits_a^b |\, f\,|$

Доказательство.

1. $m \leqslant f \leqslant M$ и интегрируем

   $m(b-a) = \int\limits_a^b m \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b M = M(b-a)$

2. $-|\, f\,| \leqslant f \leqslant |\, f\,|$ и интегрируем:

   $-\int\limits_a^b |\, f\,| = \int\limits_a^b -|\, f\,| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |\, f\,| \implies \left| \int\limits_a^b f \right| \leqslant \int\limits_a^b |\, f\,|$

□

Теорема 5.10 (о среднем)**.**

$f \in C[a, b]$

Тогда $\exists c \in [a, b] \quad \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство.

Теорема Вейерштрасса.

$\exists p, q \in [a, b] \;\; f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q) \;\; \forall x \in [a, b]$

$\implies (b-a)f(p) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant (b-a)f(q) \implies f(p) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \leqslant f(q)$

По теореме Больцано-Коши:

$\implies \exists c \in [p, q] \;\; f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ □

***Определение* 5.7.**

$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ – среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$

***Определение* 5.8.**

Интеграл с переменным верхним пределом.

$\Phi(x) = \int\limits_a^x f \ \ x \in [a, b]$

Интеграл с переменным нижним пределом

$\Psi(x) = \int\limits_x^b f$

Замечание.

$\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$

Теорема 5.11 (Барроу)**.**

$f \in C[a, b]$, то Φ – первообразная функция f.

Доказательство.

Пусть $x < y$

$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f) = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = f(c_y)$

для некоторой точки $c_y \in [x, y]$

$\Phi'_+(x) = \lim\limits_{y\to x+} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+} f(c_y) = f(x)$

Т.к. при $y \to x \ \ c_y \to x$

Аналогично для случая $y < x$. $\square$

Следствие.

1. $\Psi'(x) = -f(x) \ \ \forall x \in [a, b]$
2. $f \in C\left\langle a, b\right\rangle$, то у f существует первообразная на $\left\langle a, b\right\rangle$

Доказательство.

1. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f$

   $\implies \Psi(x) = \int\limits_a^b f - \Phi(x) \implies \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$

2. $c \in \left\langle a, b\right\rangle$

   $F(x) = \begin{cases} \int\limits_c^x f & x \geqslant c \\ -\int\limits_x^c f & x \leqslant c \end{cases}$

   $F'(x) = (\int\limits_c^x f)' = f(x)$

   $F'(x) = (-\int\limits_x^c f)' = -(\int\limits_x^c f)' = -(-f(x)) = f(x)$

$\square$

Теорема 5.12 (формула Ньютона-Лейбница)**.**

$f \in C[a,b]$ и F – ее первообразная.

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство.

$\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ – первообразная.

$F(b) = \Phi(b) + C$

Тогда

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^a f = \int\limits_a^b f$$

□

***Определение* 5.9.**

$F\Big|_a^b := F(b) - F(a)$