

# Экзамен по алгебре

Швецова Анна по конспектам от Саютина Дмитрия

16 января 2017 г.

## Содержание

<b>1. Билет 1</b>	<b>1</b>
1.1 Определения и основные понятия . . . . .	1
1.2 Свойства колец . . . . .	1
1.3 Гомоморфизм колец . . . . .	2
1.4 Подкольца и идеалы . . . . .	3
<b>2. Билет 2</b>	<b>5</b>
<b>3. Билет 3</b>	<b>7</b>
<b>4. Билет 4</b>	<b>8</b>
<b>5. Билет 5</b>	<b>10</b>
<b>6. Билет 6</b>	<b>12</b>
<b>7. Билет 7</b>	<b>14</b>
<b>8. Билет 8</b>	<b>16</b>
<b>9. Билет 9</b>	<b>18</b>
<b>10. Билет 10</b>	<b>19</b>
<b>11. Билет 11</b>	<b>20</b>
<b>12. Билет 12</b>	<b>21</b>
<b>13. Билет 13</b>	<b>22</b>
<b>14. Билет 14</b>	<b>24</b>
<b>15. Билет 15</b>	<b>25</b>

---

16. Билет 16	26
17. Билет 17	27
18. Билет 18	28
19. Билет 19	29
20. Билет 20	30
21. Билет 21	31
22. Билет 22	32
23. Билет 23	34
24. Билет 24	35
25. Билет 25	36
26. Билет 26	37
27. Билет 27	38
28. Билет 28	40
29. Билет 29	41
30. Билет 30	42
31. Билет 31	43
32. Билет 33	44

# 1. Билет 1

## 1.1. Определения и основные понятия

**Определение 1.1.** Множество  $R$  с операциями  $+$ ,  $\cdot$  на нём называется кольцом, если:

- $(R, +)$  — абелева группа.
- $\forall x, y, z \in R: \begin{matrix} (x + y)z = xz + yz \\ x(y + z) = xy + xz \end{matrix}$  (дистрибутивность)

**Определение 1.2.** Кольцо называется ассоциативным, если  $*$  — ассоциативна ( $x(yz) = (xy)z$ ).

**Определение 1.3.** Кольцо называется коммутативным, если  $*$  — коммутативна ( $xy = yx$ ).

**Определение 1.4.** Кольцо называется кольцом с единицей, если  $\exists 1: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \forall x \in R$ .

**Определение 1.5.** Ассоциативное кольцо с единицей, причём  $1 \neq 0$ , в котором всякий ненулевой элемент обратим [по умножению] называется телом.

**Определение 1.6.** Коммутативное тело называется полем.

**Пример.**

$2\mathbb{Z}$  — коммутативное, ассоциативное кольцо без 1

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$R[x]$  — кольцо многочленов с коэффициентами из  $R$

$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$  — кольцо формальных степенных рядов.

## 1.2. Свойства колец

**Лемма.** Пусть  $R$  — кольцо (ассоциативное),  $r \in R$ , тогда:

- $r * 0 = 0 * r = 0$
- Если  $R$  — кольцо с единицей, то  $(-1) * r = -r$ , где  $(-x)$  означает обратный элемент по сложению.
- Если  $|R| \neq 1$ , то  $0 \neq 1$ .

**Доказательство.**

- $r + 0 = r = 0 + r$ .
  - $r(r + 0) = r^2$
  - $r^2 + r * 0 = r^2$
  - $r * 0 = 0$ .
  - Аналогично доказывается правое равенство.

- Пользуемся **дистрибутивностью** кольца:

$$r * 0 = 0 \Rightarrow r(-1 + 1) = 0 \Rightarrow (-1)r + 1 * r = 0 \Rightarrow (-1)r + r = 0 \Rightarrow (-1) * r = (-r)$$

3. Пусть  $0 = 1$ . Тогда  $\forall r \in R: r = 1 * r = 0 * r = 0 \implies R = \{0\} \implies |R| = 1$ .  $\square$

**Определение 1.7.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Элемент  $r \in R \setminus \{0\}$  называется делителем нуля, если  $\exists s \in R \setminus \{0\}: rs = 0$ .

**Определение 1.8.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Элемент  $r \in R \setminus \{0\}$  называется нильпотентным, если  $\exists n \in \mathbb{N}: r^n = 0$

**Замечание 1.** В  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  есть делители нуля  $\iff n$  — составное.

- Если  $n = ml$  ( $m, l \geq 2$ ), то и  $m$  и  $l$  — делители нуля.
- Если есть делители нуля, то  $\exists m, l \geq 2, ml : n$ , что невозможно.

Так что в качестве примера можно привести какое-нибудь составное число и его делитель.

**Замечание 2.** В  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  нильпотенты  $\iff n$  делится на какой-то квадрат.

**TODO:** Нужно больше примеров

**Определение 1.9.** Коммутативное ассоциативное кольцо с 1 без делителей нуля называется областью целостности (целостным кольцом).

### 1.3. Гомоморфизм колец

**Определение 1.10.**  $f: A \rightarrow B$  называется гомоморфизмом колец, если:

- $A, B$  — кольца.
- $\forall a, b \in A: f(a + b) = f(a) + f(b)$ .
- $\forall a, b \in A: f(ab) = f(a)f(b)$ .

**Определение 1.11.**  $\text{Ker } f = f^{-1}(0) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$

**Определение 1.12.**  $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ .

**Замечание.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец, то:

1.  $f(0_A) = 0_B$
2.  $f(-r) = -f(r)$
3. Если  $f(a) = b$ , то  $f^{-1}(b) = a + \text{Ker } f$
4.  $f$  — инъективна  $\iff \text{Ker } f = \{0\}$

**Доказательство.**

1.  $f(0_A) = f(0_A * 0_A) = f(0_A) * f(0_A) \Rightarrow f(0_A) = 0_B$
2.  $0_B = f(0_A) = f(-r + r) = f(-r) + f(r) \Rightarrow f(-r) = -f(r)$
3. Если  $f(a) = b$ , то  $f^{-1}(b) = a + \text{Ker } f$

Докажем вложенность в обе стороны.

$a + \text{Ker } f \subset f^{-1}(b)$  т.к.  $\forall x \in \text{Ker } f f(a + x) = f(a) + f(x) = f(a) + 0 = f(a) = b$

В другую сторону: пусть есть элемент  $t \notin a + \text{Ker } f: f(t) = b$ , тогда  $0 = f(t) - f(a) = f(t - a) \Rightarrow t - a \in \text{Ker } f \Rightarrow t - a + a \in a + \text{Ker } f \Rightarrow t \in a + \text{Ker } f$  Противоречие

4.  $f$  — инъективна  $\Rightarrow \forall x \in B |f^{-1}(x)| \leq 1 \Rightarrow |\text{Ker } f| = |f^{-1}(0)| \leq 1$  Но там есть хотя бы 0, значит, строго 1. В обратную сторону очевидно. Если ядро нетривиально, значит, хотя бы прообраз нуля ломает инъективность.

$\square$

**Замечание.** Единица не всегда сохраняется, даже если она есть во втором кольце.

**Пример.**  $A$  — абелева группа, есть  $+$ ,  $0$ .  $x, y \in A$ :  $x \cdot y := 0$ .

**Определение 1.13.** Гомоморфизм нулевой, если он переводит все элементы в  $0$ .

**Утверждение 1.1.** Если  $f: A \rightarrow B$  ненулевой гомоморфизм колец.  $A$  — кольцо (ассоциативное, коммутативное) с  $1$ .  $B$  — область целостности, то  $f(1_A) = 1_B$ .

**Доказательство.**  $f(1_A) = f(1_A * 1_A) = f(1_A) * f(1_A)$

$$f(1_A) - f(1_A) * f(1_A) = 0_B$$

$$f(1_A)(1_B - f(1_A)) = 0_B.$$

Так как  $B$  — область целостности, то  $f(1_A) = 0$  или  $f(1_A) = 1_B$ .

Если  $f(1_A) = 0_B$ , то  $\forall a \in A$ :  $f(a) = f(1 * a) = f(1) f(a) = 0 f(a) = 0 \implies f$  — нулевой.

Следовательно  $f(1_A) = 1_B$ . □

**Замечание.** Далее гомоморфизм колец с единицей означает гомоморфизм колец, обладающий свойством выше ( $f(1_A) = 1_B$ ).

**Лемма.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец с единицей, то  $\forall x \in A^*$ :  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

**Доказательство.**

Если  $a$  обратим, то  $aa^{-1} = 1$ . Тогда  $1 = f(1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) \implies f(a)^{-1} = f(a^{-1})$  □

**Лемма.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец, то

$\text{Im } f$  — подкольцо  $B$ .

$\text{Ker } f$  — двусторонний идеал  $A$ .

**Доказательство.** Оставлено в качестве упражнения. □

## 1.4. Подкольца и идеалы

**Определение 1.14.** Непустое подмножество кольца  $R$  называется подкольцом, если

- $\forall a, b \in A$ :  $a + b, -a, ab \in A$

**Определение 1.15.** Аддитивная подгруппа  $I \subseteq R^+$  называется:

- Левым идеалом, если  $\forall r \in R, \forall s \in I$ :  $rs \in I$  (иначе говоря,  $RI \subseteq I$ )
- Правым идеалом, если  $\forall r \in R, \forall s \in I$ :  $sr \in I$  (иначе говоря,  $IR \subseteq I$ ).
- Двусторонним идеалом, если она и левый и правый идеал.

// Все примеры живут в конспекте так как в билете они не требуются. Итак он очень большой

**Определение 1.16.**  $R$  — кольцо,  $X \subseteq R$ . Идеалом (левым, правым, двусторонним), порождённым подмножеством  $X$  называется наименьший по включению идеал (левый, правый, двусторонний), содержащий  $X$ .

**Упражнение:** пересечение всех идеалов, содержащих данное множество  $X$  является идеалом, порождённым множеством  $X$ .

**Доказательство.**

Во-первых, пересечение идеалов – идеал. (Идеалы это подгруппы, пересечение подгрупп = подгруппа. Соблюдение свойства идеала проверяется так: возьмем элемент из пересечения, домножим на любое  $r$ . Полученный элемент лежал в обоих идеалах, значит и в пересечении тоже. Успех)

Во вторых, мы получим не меньше чем нужный идеал. Пусть не так. Тогда какие-то 2 идеала пересеклись и мы получили меньше чем нужный идеал. Но в результате пересечения мы получили идеал и он также содержал множество  $X$ . Значит, наименьший идеал не наименьший. Противоречие.

В-третьих, мы получим не больше, так как в пересечении уже лежит искомый идеал.  $\square$

*Замечание.* Для правых идеалов:

$$\bigcap_{\substack{I \supseteq X \\ I - \text{идеал } R}} I = \sum_{x \in X} xR$$

**Определение 1.17.**

- $(X)$  — идеал, порождённый множеством  $X$ , в зависимости от ситуации левый, правый или двусторонний.
- $(a)$  — идеал, порождённый элементом  $a$ , где  $a \in R$ , в зависимости от ситуации левый, правый или двусторонний.
- Идеал, порождённый одним элементом называется *Главным идеалом*.

*Замечание.* Для левых идеалов  $(a) = Ra$ .

**Лемма.** *Подкольцо*, порождённое множеством  $X$ , то есть наименьшее подкольцо, содержащее это множество, состоит из всех сумм из элементов  $\pm x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ , где  $x_i \in X$

**Доказательство.** $\square$

## 2. Билет 2

**Определение 2.1.** Пусть  $R$  — кольцо с 1, введём канонический гомоморфизм  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow R$ :

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \underbrace{1_R + 1_R + \dots + 1_R}_{n \text{ раз}} & n > 0 \\ -\phi(-n) & n < 0 \end{cases}$$

Действительно является гомоморфизмом (следствие дистрибутивности).

**Определение 2.2.** Если канонический гомоморфизм  $\phi$  — инъективен ( $\text{Ker } \phi = \{0\}$ ), то характеристика ноль ( $\text{Char } R := 0$ )

Иначе ядро нетривиально. Но в  $\mathbb{Z}$  любое нетривиальное ядро имеет вид  $n\mathbb{Z}$  (для некоторого  $n \geq 1$ , ибо ядро — это подгруппа), такое  $n$  и называется характеристикой кольца  $R$  ( $\text{Char } R = n$ ).

Любой идеал  $I$  по определению является подгруппой аддитивной подгруппы кольца и задаёт разбиение кольца на смежные классы или классы вычетов по модулю  $I$ , о чём пойдёт речь дальше.

**Определение 2.3.**  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $I$  ( $a \equiv b \pmod{I}$ ), если  $a - b = a + (-b) \in I$ ,

Где  $a, b \in R$ ,  $I$  — идеал  $R$  (левый, правый, или двусторонний).

**Лемма.** Если  $I$  — двусторонний идеал,  $a \equiv a' \pmod{I}$ ,  $b \equiv b' \pmod{I}$ , то

1.  $a + b \equiv a + b' \equiv a' + b' \pmod{I}$ .
2.  $ab \equiv ab' \equiv a'b' \pmod{I}$

**Доказательство.**

1.  $a + b - (a + b') = b - b' \in I \Rightarrow a + b \equiv a + b'$ . Остальное аналогично
2.  $ab - ab' = a(b - b') \in I$ . (так как  $b - b' \in I$ , и  $I$  — идеал) □

**Определение 2.4.** Пусть  $I$  — двусторонний идеал  $R$ .

- Фактор-кольцом по  $I$  называется множество смежных классов в сравнимости по модулю.
- Зададим сложение:  $R/I: (r_1 + I) + (r_2 + I) = r_1 + r_2 + I$ .
- Зададим умножение:  $R/I: (r_1 + I)(r_2 + I) = r_1 r_2 + I$ .
- Проверим дистрибутивность слева:  $(r_1 + I)(r_2 + I + r_3 + I) = (r_1 + I)(r_2 + r_3 + I) = r_1 r_2 + r_1 r_3 + I$ .
- Дистрибутивность справа.  $(r_2 + I + r_3 + I)(r_1 + I) = (r_2 + r_3 + I)(r_1 + I) = r_2 r_1 + r_3 r_1 + I$ .
- **Упражнение:** Доказать корректность (независимость результата сложения и умножения от выбора представителя). План доказательства: Взять 2 класса вычетов, из каждого взять по 2 элемента. Показать (сравнимостью), что неважно, какой из элементов из одного класса мы будем брать, мы всё равно попадем в один класс.

**Пример 1.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  теперь является не только фактор-группой, но и фактор-кольцом.

**Пример 2.**  $K[x]/(f(x))$   
 $K$  — поле,  $f \in K[x]$ .



### 3. Билет 3

**Теорема 3.1** (Теорема о гомоморфизме). Пусть  $f$  — гомоморфизм колец с 1. Тогда

$$A/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f.$$

**Доказательство.** Из теоремы о гомоморфизме групп у нас есть:  $\phi: A/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$

Нужно показать гомоморфизм умножения:  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .

А я тем временем напомним, что в теореме о гомоморфизме у нас было отображение  $\phi: a + I \rightarrow f(a)$ . Проверим, что предлагается проверить.  $\phi((a + I)(b + I)) = \phi(ab + I) = f(ab) = f(a)f(b) = \phi(a + I)\phi(b + I)$

□

**Определение 3.1.** Пусть  $R_1, R_2$  — кольца.

Определим  $R_1 \oplus R_2 = \{(r_1, r_2)\}$ , кольцо.

Зададим сложение:  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$

Зададим умножение:  $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$ .

**Замечание.** Аналогично вводится прямая сумма для большего числа слагаемых.

**Замечание.** Иногда преподаватели алгебры применяют обозначение  $\times$  вместо  $\oplus$  (смотрите далее).

**Замечание.** В данной конструкции много **делителей нуля**.

Действительно, любой элемент вида  $(r, 0)$  или  $(0, r)$  (в случае двух колец) является делителем нуля.

## 4. Билет 4

Здесь и далее в главе  $R$  означает коммутативное кольцо, а  $I, J$  – его идеалы.

**Лемма.**  $I \cap J$  идеал.

**Доказательство.** Доказано выше где-то здесь. (1.16). □

**Определение 4.1.** Определим  $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$  как все возможные суммы.

**Замечание.**  $I + J$  является идеалом, так как:

- $I + J$  несомненно образует подгруппу аддитивной группы кольца.
- $\forall a \in I, b \in J, a + b \in I + J. \forall r \in R, r(a + b) = ra + rb, ra \in I, rb \in J \Rightarrow ra + rb \in I + J$

**Замечание.**  $I + J$  наименьший идеал содержащий  $I$  и  $J$ . Иначе говоря,  $I + J = (I \cup J)$ , то есть идеал порождённый объединением.

**Определение 4.2.** Произведение идеалов  $IJ = (\{ab \mid a \in I, b \in J\})$  – это идеал порождённый всеми попарными произведениями.

**Замечание.**  $IJ \neq \{ab \mid a \in I, b \in J\}$ , так как полученное множество идеалом не является.

$$IJ = \left\{ \sum a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J \right\}. (ra)b, ra \in I$$

**Определение 4.3.** Идеалы  $I, J$  называются взаимно простыми, если  $I + J = R$ .

Здесь и далее все кольца имеют единицу.

**Лемма.** Если  $I, J$  взаимно просты, то  $IJ = I \cap J$

**Доказательство.**

- $IJ \subseteq I \cap J$ .

$\forall r \in IJ: r = \sum_{i=1}^N a_i b_i$ , где  $a_i b_i \in I \cap J$  но это значит, что и их сумма лежит в пересечении.

Мне тут было неочевидно, почему бы вдруг  $a_i b_i \in I \cup J$ . Так вот из определения идеала.  $a_i \in I \Rightarrow a_i b_i \in I$ , (если домножаем на любой элемент и в том числе на  $b_i$  – попадаем в то же кольцо). Аналогично для  $J$  (помним про наличие коммутативности).

- $IJ \supseteq I \cap J$ .

$I$  и  $J$  – взаимно просты  $\implies I + J = R \ni 1$ .

$\implies \exists a \in I, b \in J$  такие что  $a + b = 1$  (см 4.1)

$\forall x \in I \cap J: x = x * 1 = x * (a + b) = xa + xb$ .

$xa \in (I \cap J)I, xb \in (I \cap J)J$ . (Ну понятно для обоих произведений.  $I \cup J$  – это меньше, и чем  $I$ , и чем  $J$  и одновременно их подмножества)

$xa + xb \in IJ$ . □

**Замечание.** Обратите внимание, что  $IJ \subseteq I \cap J$  для всех идеалов  $I, J$ , так как в первой части леммы не пользуемся тем, что  $I, J$  – взаимно простые.

**Теорема 4.1.** Пусть  $R$  — коммутативное ассоциативное кольцо с 1, а  $I, J$  — взаимно простые идеалы.

Тогда  $R/IJ \cong R/I \oplus R/J$

*Замечание.* В частном случае мы уже знаем это утверждение, если  $(n, m) = 1$ , то:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

**Доказательство.**  $f: R \rightarrow R/I \oplus R/J$ .

Сопоставим объекту два его класса по модулям  $I, J$ :  $f(r) := (r \bmod I, r \bmod J)$ , где  $r \bmod I = r + I$ .

Каждая проекция является гомоморфизмом, значит  $f$  тоже гомоморфизм.

$$\text{Ker } f = \{r \in R \mid r \in I, r \in J\} = I \cap J = IJ$$

По теореме о гомоморфизме колец (см 3.1) получаем требуемое. Осталось доказать, что полученное — эпиморфизм. Т.к.  $I$  и  $J$  взаимно простые, то  $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$ , тогда  $\forall x, y \in R$   $xb + ya$  — прообраз  $(x + I, y + J)$ .

□

**Лемма.** Пусть  $R$  — ассоциативное коммутативное кольцо с 1.

Если идеал  $I$  взаимно прост с каждым из идеалов  $J_1, \dots, J_k$ , то  $I$  взаимно прост с их произведением  $J_1 J_2 \dots J_k$

**Доказательство.**  $R = I + J_1 = I + J_1 R = I + J_1(I + J_2) = I + J_1 I + J_1 J_2 \subset I + J_1 J_2$

И, видимо, так как  $I + J_1 J_2 \subset R$  как идеал кольца, то в последнем переходе можно поставить равенство.

И так далее до любого конечного  $k$ :

$$R = I + J_1 J_2 = I + J_1 J_2 R = I + J_1 J_2 (I + J_3) = \dots = I + J_1 J_2 J_3$$

Здесь мы пользуемся определением идеала (1.15), суммы идеалов (4.1), определением взаимной простоты (4.3). □

## 5. Билет 5

**Теорема 5.1** (Китайская Теорема об Остатках). Пусть  $I_1, I_2, \dots, I_n$  — попарно взаимнопростые идеалы в  $R$ .

$$\text{Тогда } R/I_1 I_2 \dots I_n \cong R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus \dots \oplus R/I_n$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы несложно получить из индукции, предыдущей леммы и теоремы 4.1.

Есть такое. Если неочевидно, то индукция такая:

База: тривиальный фактор. Тогда всё изоморфно само себе, говорить не о чем.

Переход: отщепим любой нетривиальный нужный нам идеал  $I$ , взаимнопростой с оставшимися. По теореме, получим изоморфизм по факторам  $I$  и  $J_1 J_2 \dots$ . Из леммы выше знаем, что если  $I$  взаимнопросто с оставшимися идеалами, то  $I$  и  $J_1 J_2 \dots$  тоже взаимнопросты. Применяем индукцию и радуемся  $\square$

**Замечание.** Если  $R$  — кольцо целых чисел, то теорему можно сформулировать следующим образом:

Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_k$  — попарно взаимнопростые целые числа,  $n := m_1 m_2 \dots m_k$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$

**Теорема 5.2** (Решение систем сравнений в целых числах).

Для любого набора остатков  $r_1 \dots r_k \exists x \in \mathbb{Z}$ , такой что:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv r_k \pmod{m_k} \end{cases} \quad (m_i, m_j) = 1 \text{ для } i \neq j.$$

Причём если  $x$  и  $y$  являются решениями этой системы, то  $x \equiv y \pmod{n}$ .

**Доказательство.**

Определим  $n := m_1 m_2 \dots m_k$ ,  $n_i := n/m_i$ .

Так как  $m_i$  и  $n_i$  взаимнопросты, то  $\exists x_i, y_i \in \mathbb{Z}: m_i x_i + n_i y_i = r_i$

С практической точки зрения их можно найти, например, с помощью алгоритма Евклида.

Заметим, что

- $n_i y_i \equiv r_i \pmod{m_i}$
- $n_i y_i \equiv 0 \pmod{m_j}$  для  $j \neq i$

Первое следует из  $m_i x_i + n_i y_i = r_i$ , второе из  $n_i = n/m_i = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_k$ .

Определим  $x := \sum_{i=1}^k n_i y_i$ .

Тогда  $\forall i: x \equiv n_i y_i \equiv r_i \pmod{m_i}$ .

Вторая часть доказательства проще:

Пусть  $x$  — решение системы.

- Если  $y$  — решение, то  $y - x \equiv 0 \pmod{m_i}$ , значит  $y - x \equiv 0 \pmod{n}$ .

- Если  $y$  таков, что  $y - x \div n$ , то  $y = x + nt$ , подставляем в систему,  $nt$  сокращается.

□

## 6. Билет 6

**Определение 6.1.** Элемент  $b$  делит элемент  $a$  (записывается как  $b \mid a$ ), если  $a = bc$  для некоторого  $c \in R$ .

**Утверждение 6.1.**

- $b \mid a \iff a \in bR \iff aR \subseteq bR$
- $a \in R^* \iff aR = R$

**Доказательство.**

- $a = bc \ c \in R \Rightarrow a \in bR \Rightarrow aR = b(cR) \subseteq bR$  так как  $cR \subseteq R$   
И в обратную:  $aR \subseteq bR \Rightarrow \forall x \in R \exists y \in R : ax = by \Rightarrow a * 1 = a \in bR \Rightarrow \exists c : a = bc \Rightarrow b \mid a$
- $\forall x \in Ra^{-1}x \in R \Rightarrow aa^{-1}x = x \in aR$   
 $\forall x \in R \exists y \in R : x = ay \Rightarrow \exists y : 1 = ay \Rightarrow a$  – обратим.

□

**Определение 6.2.** Пусть  $I$  – идеал, тогда  $I$  простой, если  $\forall a, b \in R : ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$ .

**Определение 6.3.**  $I$  – максимальный, если для любого идеала  $J : I \subsetneq J \subseteq R \implies J = R$ .

**Лемма.** Пусть  $I$  – идеал  $R$ , тогда  $\exists J$  – идеал,  $I \subseteq J \subseteq R$  и  $J$  максимальный.

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $X = \{K \mid K \text{ – идеал в } R, K \supseteq I, K \neq R\}$ , введём на нём частичный порядок включения ( $\subseteq$ ).

Покажем, что любое линейно упорядоченное подмножество  $X$  имеет верхнюю грань.

Пусть  $\{L_i\}$  – произвольное линейно упорядоченное подмножество,  $L := \bigcup L_i$ .

Рассмотрим произвольные  $a, b \in L$ , тогда  $a \in L_i, b \in L_j$  (для некоторых  $i, j$ ).

Но множество линейно упорядоченно, значит одно лежит в другом (совпадение тоже допускается), без потери общности давайте считать, что  $L_i \subseteq L_j$ .

Следовательно  $a, b \in L_j \implies a - b \in L_j \subseteq L$ .

Также  $\forall r \in R : ra \in L_j \subseteq L$ .

Итого мы получаем по определению (1.15), что  $L$  – идеал. Значит любое линейно упорядоченное подмножество  $X$  имеет верхнюю грань, значит (по лемме Цорна) в множестве  $X$  есть максимальный элемент.

Соответственно этот максимальный элемент и является максимальным идеалом. □

**Замечание.**  $R$  – область целостности  $\iff \{0\}$  – простой идеал.

Область целостности  $\iff ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ .

Идеал простой  $\iff ab \in \{0\} \implies a \in \{0\} \vee b \in \{0\}$ .

**Утверждение 6.2.** Пусть  $R$  – коммутативное ассоциативное кольцо с 1,  $I$  – идеал в  $R$ , тогда:

1.  $I$  – простой  $\iff R/I$  – область целостности.
2.  $I$  – максимальный  $\iff R/I$  – поле.
3. Если  $I$  – максимальный, то  $I$  – простой.

**Доказательство.**

“ $\rightarrow$ ”. (!) в  $R/I$  нет делителей нуля.

$$(a + I)(b + I) = I \implies a \in I \vee b \in I.$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

$$\text{“}\leftarrow\text{” } (a + I)(b + I) = I \implies a + I \in I \vee b + I = I \implies a \in I \vee b \in I$$

Тут было написано что-то не очень похожее на правду. Смотрите следствие 9 в конспекте лектора □

Далее  $R$  область целостности

**Утверждение 6.3.** В кольце главных идеалов  $R$  любой ненулевой простой идеал  $I$  является максимальным

**Доказательство.**  $I = pR$ , пусть  $I \subsetneq J \subseteq R$ ,  $J$  — идеал.

$$R \text{ — КГИ} \implies J = qR \quad pR \subseteq qR \subseteq R$$

$$p = qr, pR \text{ — простой} \implies (q \in pR \implies pR = qR) \vee (r \in pR \implies r = ps).$$

$$p = qr = qspp(1 - qs) = 0 \implies q \in R^* \iff qR = R.$$

Если не получилось, страница 32 конспекта лектора, там даже нет слова «очевидно» □

# 7. Билет 7

Пусть  $R$  — область целостности.

**Определение 7.1.**  $a, b \in R$ ,  $a$  и  $b$  ассоциированы, если  $aR = bR$ .

(или, эквивалентно,  $aR \subseteq bR, bR \subseteq aR \iff a|b, b|a$ ).

**Пример 1.** В  $\mathbb{Z}$   $n$  и  $m$  ассоциированы, если  $n = m$  или  $n = -m$ .

**Пример 2.** В  $K[x]$  (где  $K$  — поле)  $f$  и  $g$  ассоциированы, если  $f(x) = cg(x)$ ,  $c \in K[x] \setminus \{0\}$ .

Пусть  $a \sim b$ , если  $a$  ассоциирован с  $b$ .

**Определение 7.2.** Пусть  $a \in R \setminus R^*$ . Элемент  $a$  неприводим, если  $a = bc \implies a \sim b \vee a \sim c$ .

**Определение 7.3.** Пусть  $p \in R \setminus R^*$ . Элемент  $p$  называется простым, если  $p | ab \implies p | a \vee p | b$ .

*Замечание.* Ассоциированность является отношением эквивалентности.

**Лемма.** Пусть  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , тогда:

- $a \sim b \iff a = b\varepsilon$ , где  $\varepsilon \in R^*$ .
- $a$  — неприводим  $\iff (a = cd \implies c \in R^* \vee d \in R^*)$ .

**Доказательство.**

- “ $\implies$ ”

$$a \sim b \iff \begin{cases} b|a \implies a = b\varepsilon \implies a = a\delta\varepsilon \implies a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \implies \delta\varepsilon = 1 \implies \varepsilon \in R^* \\ a|b \implies b = a\delta \end{cases}$$

Пользуемся тем, что мы в области целостности, а также тем, что  $a \neq 0$ .

- “ $\impliedby$ ”

$a$  и  $b$  ассоциированы  $\iff a | b, b | a$ .

$a = b\varepsilon, b = a\varepsilon^{-1}$  (пользуемся коммутативностью, обратимостью  $\varepsilon$ ).

После этого делимость очевидна по определению (см 6.1)

- $a = bc \implies (a \sim b \vee a \sim c)$

Пусть б.п.о.  $a \sim b \implies a = b\varepsilon, \varepsilon \in R^* \implies b\varepsilon = bc \implies b(\varepsilon - c) = 0 \implies c = \varepsilon. a = bc$

□

**Определение 7.4.**  $R$  — область целостности.  $R$  — факториально, если любой элемент единственным образом раскладывается в произведение неприводимых.

Единственность вплоть до порядка и ассоциированности:

Если  $\varepsilon p_1 p_2 \dots p_n \sim \Theta q_1 q_2 \dots q_m$  (где  $p_i, q_j$  неприводимы,  $\varepsilon, \Theta \in R^*$ ), то  $n = m$  и  $\exists \sigma \in S_n: p_i \sim q_{\sigma(i)}$

**Теорема 7.1.** Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  факториально.

Доказательство состоит из нескольких лемм:

**Лемма (1).**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, c \in R, c$  — неприводим,  $\neg c|a \implies aR + cR = R$



**Доказательство.**  $R$  — кольцо главных идеалов  $\implies aR + cR = bR \implies c \in bR \implies c = bd$ .

Так как  $c$  неприводим, то  $c \sim b$  или  $b \in R^*$ .

Но  $c \sim b \iff cR = bR$ , но тогда  $a \in bR = cR$ , т.е.  $c|a$ , но это ложь.

$b \in R^* \iff bR = R$ , что мы и хотели. □

**Лемма (2).**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, b, c \in R$ ,  $c$  неприводим.

Тогда  $c|ab \implies c|a \vee c|b$

Иначе говоря,  $cR$  простой:  $ab \in cR \implies a \in cR \vee b \in cR$

**Доказательство.**  $c|ab$ , пусть  $\neg c|a$  и  $\neg c|b$ .

Тогда по предыдущей лемме  $cR + aR = R$  и  $cR + bR = R$ , из чего по какой-то лемме из китайской теоремы об остатках следует, что  $cR$  взаимно прост с  $(aR)(bR) = abR$ .

Итого:  $cR + abR = R$  и  $ab \in cR$ .

Но  $cR + abR = cR$  (так как  $c|ab$ ), следовательно  $cR = R$ , что возможно  $\iff$  обратим.

Но  $c$  неприводим, противоречие. □

**Определение 7.5.** Кольцо  $R$  называется нётеровым, если для любой последовательности идеалов  $I_n$  в  $R$ , такой что  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ , все идеалы начиная с некоторого места совпадают.

**Лемма (3).** Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  нётерово.

**Доказательство.** Так как  $R$  — кольцо главных идеалов, то каждый идеал  $I_k = r_k R$  для некоторого  $r_k$ .

Докажем, что  $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  идеал:

- $a, b \in I \implies a, b \in I_i \implies a - b \in I_i \implies a - b \in I$
- $a \in I \implies a \in I_i \implies \forall r: ra \in I_i \implies \forall r: ra \in I$

(Первое условие гарантирует, что  $I$  — является подгруппой аддитивной группы кольца, хотя это немного не очевидно сходу. Hint:  $a$  может быть равно 0).

Следовательно  $I = qR$ , для некоторого  $q \in R$  (так как мы в кольце главных идеалов).

Следовательно  $\exists n: q \in I_n = r_n R$  (Если  $I = qR$ , то  $q$  лежит в объединении, значит,  $q$  лежит в каком-то идеале начиная с какого-то  $n$ )

$q \in I_{n+1} = r_{n+1} R \implies qR \subseteq I_{n+1}$ , но  $qR \supseteq I_{n+1} \implies qR = I_{n+1}$ . □

## 8. Билет 8

Напомним, что мы доказываем такую теорему:

Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  факториально.

**Лемма (4).** Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов. Тогда любой ненулевой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых.

**Доказательство.**  $r \in R \setminus R^*, r \neq 0$ .

$rR$  содержится в некотором максимальном идеале  $M$ .

$M = p_1R, rR \subseteq p_1R \iff r = p_1r_1, r_1 \in R$

$p_1R$  — макс  $\implies p_1R$  — простой  $\implies (ab : p_1 \implies a : p_1 \vee b : p_1)$

$p_1 = ab \implies a \sim p_1 \vee b \sim p_1$

И из всего этого следует, что  $p_1$  неприводим, т.е.

$r = p_1r_1, p_1$  неприводим.

Если  $r_1 \in R^*$ , то  $r = p_1r_1$  — искомое разложение. Хз.

Если  $r_1 \notin R^*$ , то  $r_1R \neq R$ , поэтому  $r_1R \subseteq p_2R$  — максимальный.  $r = p_1p_2r_2$ .

И так далее можно продолжать раскладывать.

Либо  $r_k \in R^*$ , тогда успех.

$$r_1 = p_2r_2, r_1R \subseteq r_2R \tag{1}$$

$$r_2 = p_3r_3, r_2R \subseteq r_3R \tag{2}$$

$\implies r_1R \subsetneq r_2R \subsetneq r_3R \dots$ , далее всё хорошо по лемме 3. □

**Лемма (5).** Если:

- $R$  — область целостности.
- $\forall$  неприводимого элемента его идеал прост.
- $\forall$  ненулевого необратимого элемента есть разложение в произведение

То  $R$  — факториально.

**Доказательство.** Достаточно доказать единственность разложения, воспользуемся индукцией по  $\min(n, m)$

$n = 0, \dots$

Переход:  $n > 0, p_n$  — неприводим  $\implies p_nR$  — прост.

$\exists l: 1 \leq l \leq m, q_l \in p_nR, q_l \not\sim p_n$ . Объяснение от меня (возможно, есть проще):  $\theta q_1 q_2 \dots q_m = p_n(\epsilon p_1 p_2 \dots p_{n-1}) \in p_nR \implies \theta \in p_nR \vee q_1 q_2 \dots q_m \in p_nR$ . Если из них лежит обратимый, то  $p_nR$  — всё кольцо. Короче,  $q_1 q_2 \dots q_m \in p_nR$  100%. Теперь  $q_1 \in p_nR \vee q_2 \dots q_m \in p_nR$  и так далее... Приходим к тому, что  $\exists q_l \in p_nR$ .

a)  $q_l$  — неприводим,  $q_l = p_n \delta$  (т.к.  $q_l$  в кольце),  $\delta \in R^* \implies q_l \sim p_n$ .

b) Также  $\epsilon p_1 \dots p_n \sim \Theta q_1 \dots q_m$

(a), (b)  $\implies \epsilon p_1 \dots p_{n-1} \sim \Theta q_1 \dots q_{l-1} q_{l+1} \dots q_m$ .

По предположению индукции  $n - 1 = m - 1 \implies n = m$

$\exists$  биекция  $t: \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, l - 1, l + 1, \dots, m\}, p_i \sim q_{t(i)}$ .

$$\sigma \in S_n: \sigma(i) = \begin{cases} t(i) & i \leq n-1 \\ l & i = n \end{cases}$$

□

*Замечание.* Из всего вышесказанного следует теорема о факториальности кольца главных идеалов.

## 9. Билет 9

**Определение 9.1.** Пусть  $R$  — область целостности, назовём  $R$  евклидовым, если  $\exists \nu: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ :

$$\forall a, b \in R \setminus \{0\} :$$

$$1) \nu(ab) \geq \nu(a)$$

$$2) \exists q, r \in R: a = bq + r \text{ и } r = 0 \vee \nu(r) < \nu(b)$$

Функция  $\nu$  называется евклидовой нормой.

**Пример 1.**  $\mathbb{Z}$ ,  $\nu(x) = |x|$ .

**Пример 2.**  $K$  — поле, рассмотрим  $K[x]$ :  $\nu(f) = \deg f$ .

**Пример 3.**  $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ ,  $\nu(a + bi) = a^2 + b^2$

**Пример 4.**  $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$ ,  $\nu(a + bi) = a^2 + b^2 - ab$

**Утверждение 9.1.** Евклидовы кольца  $\subset$  кольца главных идеалов  $\subset$  факториальные  $\subset$  области целостности.

**Доказательство.** Покажем, что  $R$  — евклидово кольцо, то  $R$  — кольцо главных идеалов.

Рассмотрим произвольный нетривиальный идеал  $I$  в  $R$  (если  $I = \{0\}$ , то  $I = 0R$ )

Рассмотрим элемент  $b \in I$  с минимальной нормой:  $\nu(b) = \min_{r \in I} \nu(r)$ , покажем, что  $bR = I$ .

Пусть  $a \in I$ , тогда  $\exists q, r: a = bq + r$ , причём  $r = 0 \vee \nu(r) < \nu(b)$ .

Но  $r = a - bq \in I$ , так как  $a \in I, bq \in I$ .

Так как  $b$  имеет минимальную норму, то  $r = 0$  или  $\nu(r) \geq \nu(b)$ , следовательно  $r = 0$ ,  $a = bq$ .

Так как выбрать  $a$  можно произвольно, получаем, что идеал  $I$  главный ( $I = bR$ ) □

# 10. Билет 10

$R$  — область целостности.

**Определение 10.1.**  $d = \gcd(a, b)$ , если  $d|a$ ,  $d|b$ , и из  $c|a$ ,  $c|b$ , следует  $c|d$ .

*Замечание.*

- $d = \gcd(a, b) \iff dR$  — наименьший главный идеал, содержащий  $a$  и  $b$ . ( $aR + bR$ ).
- $\gcd$  Определён с точностью до ассоциативности.

**Теорема 10.1.**

Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов.

$a, b \in R$ , тогда  $\exists x, y \in R: ax + by = \gcd(a, b)$ .

**Доказательство.**  $R$  — кольцо главных идеалов  $\implies$

$aR + bR = dR$  и  $\gcd(a, b) = d \in dR = aR + bR = \{ax + by \mid x, y \in R\}$ . □

**Определение 10.2.**  $a, b$  — взаимно простые, если у них нет необратимых общих делителей.

**Утверждение 10.2.**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, b \in R$ . Тогда  $a, b$  — взаимно простые  $\iff aR, bR$  — взаимно простые.

**Доказательство.**  $a, b$  — взаимно простые  $\iff 1 = \gcd(a, b) \iff 1 = ax + by \iff R = aR + bR \iff aR, bR$  — взаимно простые. □

**Определение 10.3.**  $a, b \in R, l = \text{lcm}(a, b)$ , если  $a \mid l$ ,  $b \mid l$ , и если  $a \mid c$ ,  $b \mid c \implies l \mid c$ .

*Замечание.*  $l = \text{lcm}(a, b) \iff lR$  — наибольший главный идеал, содержащийся в  $aR \cap bR$ .

*Замечание.*  $a \mid b \iff bR \subseteq aR$ .

**Теорема 10.3.**  $a, b$  — кольцо главных идеалов,  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , тогда  $\text{lcm}(a, b) = ab/\gcd(a, b)$ .

При этом последнее равенство верно с точностью до ассоциированности.

**Доказательство.**  $d = \gcd(a, b)$ .

$a = a'd, b = b'd, a', b' \in R$ .

$d = ax + by \implies 1 = a'x + b'y$ , более формально:

$d(1 - a'x - b'y) = 0$ , но  $d \neq 0$  а  $R$  — область целостности, следовательно  $1 - a'x - b'y = 0$ .

$\text{lcm}(a, b)R = aR \cap bR$ . (Т.к. все идеалы главные, а мы ищем максимальный из всех вложенных)

$ab/d = a'b'd$ .

$c \in aR \cap bR$

$c \in bR, ca' \in ba'R, c \in aR, cb' \in ab'R$

$c = c * 1 = ca'x + cb'y \in ba'R + ab'R = a'b'dR$ .

$\text{lcm}(a, b)R = aR \cap bR \subseteq a'b'dR = \frac{ab}{d}R$

“ $\supseteq$ ”,

$$a'b'd = ab' \in aR \tag{3}$$

$$a'b'd = ba' \in bR \tag{4}$$

$a'b'd \in aR \cap bR \implies a'b'dR \subseteq aR \cap bR \implies \text{lcm} = a'b'd = \frac{ab}{d}$  с точностью до ассоциативности. □

# 11. Билет 11

Далее мы требуем Евклидовости кольца.

**Лемма.**  $\forall a, b, c \in R: \gcd(a, b) = \gcd(a - bc, b)$ .

**Доказательство.**  $\gcd(a, b)R \stackrel{?}{=} \gcd(a - bc, b)R$ .

$$\gcd(a, b)R = aR + bR, \gcd(a - bc, b)R = (a - bc)R + bR.$$

$$“\supseteq” \quad a - bc \in aR + bR, b \in aR + bR.$$

$$“\subseteq” \quad b \in bR \subseteq (a - bc)R + bR, a = (a - bc) + bc \in (a - bc)R + bR. \quad \square$$

**Лемма.**  $\gcd(a, 0) = a$

**Замечание.**  $\gcd(a, b)R = aR + bR = (a, b)$ , где последнее означает идеал, порождённый  $a$  и  $b$ .

Поэтому часто наибольший общий делитель обозначают через  $(a, b)$ .

**Алгоритм:**

$a, b \in R, \nu$  — евклидова норма.

$$a = bq_0 + r_0 \quad b = r_0q_1 + r_1$$

...

$$r_i = r_{i+1}q_{i+2} + 0$$

(Если здесь вам стало плохо, в конспекте лектора есть пояснение в словах. Алгоритм Евклида стр. 36)

Утверждается, что  $r_{i+1} = (a, b)$ .

$$r_0 = 0 \vee \nu(r_0) < \nu(b), (a, b) = (a - bq_0, b) = (r_0, b) = (b, r_0)$$

$$r_1 = 0 \vee \nu(r_1) < \nu(r_0), (b, r_0) = (r_0, r_1)$$

Также полезен факт, что мы движемся строго по убыванию евклидовой нормы, откуда понятно, что процесс конечен.

## 12. Билет 12

**Теорема 12.1.** Пусть  $f, g \in K[x]$ ,  $g \neq 0$ . Тогда  $\exists! q, r \in K[x]: f = gq + r$ , где  $\deg r < \deg g$ .

**Доказательство.**

Существование, индукция по степени  $f$

- Если  $\deg f < \deg g$ , то  $r = f, q = 0$ .
- $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ,  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ .  
 $f_1(x) := f(x) - g(x)\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ , здесь мы пользуемся тем, что в поле можно делить на любой ненулевой элемент.  
 $\deg f_1 < n \xrightarrow{\text{по индукции}} \exists q_1, r_1: f_1 = q_1g + r_1, \deg(r_1) < \deg(g)$   
 $f = g\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + f_1 = g\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + gq_1 + r_1 = g\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1\right) + r_1$

Покажем единственность

- Пусть есть разные разложения.
- $f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$ , где  $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[x]$ ,  $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$ .
- $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ , если  $q_1 \neq q_2$ , то степень слева строго больше степени справа. Если  $q_1 = q_2$ , то  $r_1 = r_2$ .
- Противоречие. □

**Утверждение 12.2.** Пусть  $R$  — область целостности.

$$\forall f, g \in R[x], g \neq 0, g = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0, b_k \in R^*.$$

Тогда  $\exists q, r \in R[x]: f = gq + r$ , такие что  $\deg r < \deg g$ .

*Замечание.* Обратите внимание, что достаточно обратимости только элемента  $b_k$ , так как мы всегда делим именно на него.

**Доказательство.** Аналогично предыдущему доказательству. Вот вообще аналогично. Я могла бы сделать ctrl-c ctrl-v. □

# 13. Билет 13

**Пример 1.** Рассмотрим  $\mathbb{R}[x]$  (множество многочленов с вещественными коэффициентами).

Примеры его идеалов:

- $\mathbb{R}[x]$
- $\{0\}$
- $I = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\} = x\mathbb{R}[x]$  (свободный коэффициент нулевой, а значит можно поделить на  $x$ , что и записано в последнем равенстве).
- $I = P(x)\mathbb{R}[x]$ , где  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$
- Первые три пункта тоже подходят под последний. На самом деле (факт без доказательства) все идеалы имеют такой вид.

**Пример 2.** Рассмотрим  $\mathbb{Z}[x]$  (множество многочленов с целыми коэффициентами):

- $P(x)\mathbb{Z}[x]$ , где  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$
- Но не все идеалы имеют такой вид, например:  $(x - 3)\mathbb{Z}[x] + 2\mathbb{Z}[x]$ .
- **Упражнение:** понять почему последнее действительно идеал. (Потому что это сумма идеалов)

**Утверждение 13.1.** Если в кольце  $R$  нет делителей нуля, то в  $R[x]$  их тоже нет.

**Доказательство.** Пусть в  $R[x]$  есть делители нуля, иначе говоря

$$(a_t x^t + \dots + a_1)(b_k x^k + \dots + b_1) = 0.$$

Потребуем, что  $a_t \neq 0$  и  $b_k \neq 0$ , т.е. это старшие коэффициенты в соответствующих многочленах.

Заметим, что при степени  $x^{t+k}$  будет коэффициент  $a_t b_k$ . Но так как справа нулевой многочлен, то все коэффициенты произведения равны 0.

То есть  $a_t b_k = 0$ , но в  $R$  нет делителей нуля, противоречие. □

Как мы обсуждали выше,  $K[x]$  является полем, если полем является  $K$ . При чём в этом поле все идеалы имеют вид  $f(x)K[x]$ , обозначим этот идеал как  $I = f(x)K[x] = (f(x))$ . (напомним, что запись в скобках означает идеал, порождённый элементом, см 1.17).

Также мы обсуждали, что многочлены можно делить с остатком:

Для любого  $g(x)$  существуют единственные  $q(x), r(x)$ , такие что  $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$  и  $\deg r < \deg f$

*Замечание.*  $g(x) \equiv r(x) \pmod{I}$ , просто по определению mod (см 2.3).

*Замечание.* Тем самым все многочлены, имеющие одинаковый остаток при делении на какой-то многочлен  $f(x)$  сравнимы друг с другом по модулю.

**Лемма.** Если  $r_1, r_2, f \in K[x]$ ,  $r_1 \equiv r_2 \pmod{(f(x)K[x])}$  и  $\deg r_1, \deg r_2 < \deg f$ , то  $r_1 = r_2$

**Доказательство.**

$$r_1 \equiv r_2 \pmod{f(x)K[x]} \implies r_1 - r_2 = fh \text{ для некоторой функции } h.$$



- Если  $h(x) = 0$ , то  $r_1 = r_2$ .
- Но если  $h(x) \neq 0$ , то  $\deg(fh) \geq \deg(f)$ , но  $\deg(r_1 - r_2) < \deg(f)$ . Противоречие.  $\square$

*Замечание.* Неформально можно думать о факторе  $K[x]/_{f(x)K[x]}$  как о многочленах со степенью меньшей  $f$ .  $K[x]/I \simeq \{r \in K[x] \mid \deg r < \deg f\}$ .

**Лемма.** Пусть  $R$  — область целостности (как частный случай — поле),  $f, g \in R[x]$ ,  $\alpha \in R$

1. Если  $f(\alpha) = 0$ , то  $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ , где  $q(x) \in R[x]$ ,  $\deg q = \deg f - 1$ .
2. Если  $n = \deg f$ , то  $f$  имеет не более  $n$  различных корней в  $R$ .
3. Если  $\deg f = \deg g = n$  и  $f(\alpha_1) = g(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{n+1}) = g(\alpha_{n+1})$ , где  $\alpha_i \in R$  и различны. Тогда многочлены равны (т.е. попарно равны все коэффициенты).

**Доказательство.**

1. Поделим  $f$  на  $x - \alpha$  с остатком:

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r, \quad \deg r < \deg(x - \alpha) = 1 \implies \deg r = 0 \implies r - \text{константа.}$$

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + C.$$

$$f(\alpha) = 0 + C \implies C = 0 \quad (\text{так как } \alpha - \text{корень}).$$

2. Индукция по  $n$ :

**База** ( $n = 1$ ).  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) корней явно не более, чем один. Если  $a$  необратим, то вообще ноль.

**Переход.** Пусть  $f$  имеет корни (иначе  $0 \leq n$ ) и  $\alpha$  — один из них.

$$f(x) = (x - \alpha)q(x), \quad \deg q = n - 1$$

$q$  имеет не более чем  $n - 1$  корень. Конец.

3.  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $\deg h \leq n$ ,  $h(\alpha_i) = 0$  для  $n + 1$  альф.

Но многочлен не может иметь более  $n$  корней, следовательно он нулевой.  $\square$

*Замечание.* Можно считать, что  $\deg 0 = \infty$ , тогда все равенства остаются верными и для этого случая.

*Замечание.* Лемма выше верна только в области целостности

# 14. Билет 14

Краткое содержание предыдущих серий:

- $K[x]$  — поле многочленов.
- $K[x]$  — евклидово с нормой  $\deg$ .
- Многочлены можно делить с остатком.
- Остаток от деления многочлена  $p$  на  $(x - \alpha)$  есть  $p(\alpha)$ .

**Определение 14.1.** Для многочлена  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ :

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

Под  $f^{(k)}(x)$  понимается как производная взятая  $k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$  раз, (причём  $f^{(0)}(x) := f(x)$ ).

**Замечание.** Многочлены и производные мы понимаем как формальное выражение, в частности многочлен это конечная(!) последовательность коэффициентов, записываемая особым образом, а производная — это функция из множества многочленов в его же самого.

**Лемма.** 1.  $(p \pm q)' = p' + q'$

2.  $(pq)' = p'q + pq'$

3.  $(\alpha p)' = \alpha p'$

4.  $(p \circ q)' = (p' \circ q)q'$ .

**Замечание.** Нужно отметить, что эти утверждения НЕ следуют из соответствующих утверждений математического анализа, например по тому, что здесь производная определяется другим образом.

Более того, если рассмотреть  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , то многочлены  $x^p - x$  и  $0$  — это разные многочлены, хотя если рассмотреть их как функции, то они обе тождественно равны  $0$ .

**Доказательство.**

1.  $(p \pm q)' = (\sum a_i x^i \pm b_i x^i)' = (\sum x^i (a_i \pm b_i))' = \sum i x^{i-1} (a_i \pm b_i) = \sum i x^{i-1} a_i \pm \sum i x^{i-1} b_i = p' + q'$
2.  $(pq)' = (\sum \sum x^{i+j} a_i b_j)' = \sum (\sum x^{i+j} a_i b_j)' = \sum \sum (i+j) x^{i+j-1} a_i b_j = \sum \sum i x^{i-1} x^j a_i b_j + \sum \sum j x^{j-1} x^i a_i b_j = \sum \sum i x^{i-1} x^j a_i b_j + \sum \sum j x^{j-1} x^i a_i b_j = (\sum i x^{i-1} a_i) (\sum x^j b_j) + (\sum j x^{j-1} b_j) (\sum x^i a_i) = p'q + q'p$
3. Можно я скажу, что это очевидно?
4.  $(p \circ q)' = (\sum a_i q^i)' = \sum i a_i q^{i-1} q'$

Доказательство по индукции.  $n = 1$  (длина  $p$ , а так мне лень прописывать суммы)  
 $n - 1 \rightarrow n$ .

$$\begin{aligned} (\sum a_i q^i)' &= (q \sum a_i q^{i-1} + a_0)' = q' \sum a_i q^{i-1} + q (\sum a_i q^{i-1})' \stackrel{\text{предположение}}{=} \\ &= q' \sum a_i q^{i-1} + q q' \sum a_i (i-1) q^{i-2} = q' \sum a_i (q^{i-1} + (i-1) q_{i-1}) = q' \sum a_i i q_{i-1} = q' (p' \circ q) \end{aligned}$$

□

**Лемма (5).**  $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$

**Доказательство.** Оставлено в качестве упражнения.

□

# 15. Билет 15

**Лемма (Хензеля).** Пусть  $f \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq k$ ,  $p$  — простое.

Если  $f(a) \equiv 0 \pmod{p^k}$  и  $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,

То  $\exists! s \in \mathbb{Z}$  такое, что  $f(s) \equiv 0 \pmod{p^{k+m}}$  и  $s \equiv a \pmod{p^k}$ ,

**Доказательство.**  $n := \deg f$ ,  $f(x) = g(x - a) = \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (x - a)^l$ .

$$s = a + tp^k$$

$$f(s) = f(a + tp^k) = g(tp^k) = \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(a)}{l!} t^l p^{kl} \pmod{p^{m+k}} \text{ если } l \text{ хотя бы } 2, \text{ то т.к. } m \leq k, \text{ то всё}$$

посокращается по модулю, тогда это  $\equiv f(a) + f'(a)tp^k \stackrel{[f(a)=zp^k]}{\equiv} z \cdot p^k + f'(a)tp^k \equiv p^k(z + f'(a)t) \pmod{p^{k+m}}$ .  $p^k(z + f'(a)t) \pmod{p^{k+m}} \equiv 0 \Leftrightarrow z + f'(a)t \pmod{p^m} \equiv 0$

$f'(a)x = -z \pmod{p^m}$  имеет единственное решение  $t$ .

$$f(s) \equiv p^k(z + f'(a)t) \equiv 0 \pmod{p^{k+m}}. \quad \square$$

# 16. Билет 16

**Теорема 16.1** (интерполяция по Лагранжу). Пусть  $t_0, \dots, t_n \in K$ , причём различны.

Пусть  $y_0, \dots, y_n \in K$ .

Тогда  $\exists! p \in K[x]$ , такой что  $\deg p \leq n$ ,  $p(t_i) = y_i$ .

**Доказательство.**

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{i \neq j} (x - t_j)}{\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)}$$

Можно подставить и проверить. Неравенство тешек в помощь.

Покажем единственность: пусть  $f, g$  подходят,  $h(x) := f(x) - g(x)$ .

$\forall t_i: h(t_i) = 0$ ,  $\deg h \leq n$ , значит  $h$  – это многочлен, степень которого  $\leq n$ , а корней у него  $n + 1 \Rightarrow h = 0$  □

# 17. Билет 17

**Лемма.**  $d = \gcd(a, m)$ ,  $|\{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid ax = b\}| = \begin{cases} 0 & \neg d \mid b \\ |d| & d \mid b \end{cases}$

Если  $d \mid b$ , то  $\{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid ax = b\} = \{x_0, x_0 + \frac{m}{d}, x_0 + 2\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}\}$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $\neg d \mid b$ .

Если  $x_0$  — решение,  $ax_0 - b = mk$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$d \mid a, d \mid m, b = ax_0 - mk = da'x_0 - dm'k = d(a'x_0 + m'k) \implies d \mid b$$

2.  $d \mid b$  ( $b = db'$ )

$d = \gcd(a, m) \implies \exists x, y: ax + my = d$  (см в расширенный алгоритм Евклида)

$$ab'x + mb'y = db' = b \implies ab'x = b \pmod{m}$$

$x_0 = b'x$  — решение.

3. а) Если  $x_0$  — решение, то  $x_0 + k\frac{m}{d}$

$$\text{б) Пусть } x_1 \text{ — решение, т.е. } ax_1 \equiv b \pmod{m}, ax_0 \equiv b \pmod{m} \implies a(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{\frac{m}{d}}$$

□

**Замечание.**  $\gcd(a, b) = d = ax + my \implies 1 = \frac{a}{d}x + \frac{m}{d}y \iff \frac{a}{d}, \frac{m}{d}$  — взаимно простые.

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) \div \frac{m}{d}$$

$$x_1 - x_0 \equiv 0 \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$x_1 = x_0 + l\frac{m}{d}.$$

§Диофантовы уравнения в целых числах

**Лемма.**  $d = \gcd(a, b)$

Тогда если  $\neg d \mid c$ , то “ $ax + by = c$ ” неразрешимо в  $\mathbb{Z}$

А если  $d \mid c$ , то “ $ax + by = c$ ” разрешимо и все решения имеют вид:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k, y = y_0 - \frac{a}{d}k, k \in \mathbb{Z}.$$

**Доказательство.** 1) Если  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $ax_0 + by_0 = c$ , то  $d \mid a, d \mid b, d \mid (ax_0 + by_0)$ , т.е.  $d \mid c$ .

2) Если  $d \mid c$ , то  $c = dc'$

$$d = \gcd(a, b) \implies ax + by = d, x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$axc' + byc' = dc' = c \implies x_0 = xc', y_0 = yc'.$$

3) Если  $ax_1 + by_1 = c, ax_0 + by_0 = c \implies a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$ .

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{b}{d}(y_1 - y_0).$$

$$d = (a, b) \implies \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \text{ — взаимно простые.}$$

$$x_1 - x_0 \div \frac{b}{d} \implies x_1 - x_0 = k\frac{b}{d}, y_1 - y_0 = -k\frac{a}{d}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

□

# 18. Билет 18

**Определение 18.1.** Функция Эйлера — это  $\phi(n) :=$  порядок группы  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

*Замечание.* Напоминание, “\*” означает обратимую часть моноида, в данном случае.

**Лемма.** Класс элемента  $m$  обратим в  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$   $\iff \gcd(m, n) = 1$ .

**Доказательство.** Нужно решить  $mx = 1 \pmod{n}$

Это тоже самое, что решать  $mx + tn = 1$ , найти  $m, t$ .

Расширенный алгоритм Евклида вам в помощь. □

**Следствие.**  $\phi(n) =$  количество чисел от 1 до  $n - 1$  взаимнопростые с  $n$

**Следствие.** Если  $p$  — простое, то  $\phi(p) = |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1$

**Лемма.** Пусть  $R$  — кольцо с 1,  $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ .

Тогда  $R^* \cong \times_{i=1}^n R_i^*$

**Доказательство.** У нас уже есть  $R \cong \bigoplus_{i=1}^n R_i$  и соответствующий изоморфизм  $\psi$ .

Заметим, что если  $r \in R^*$ , то ему соответствует кортеж обратимых элементов.

Действительно, обратимый элемент при гомоморфизме переходит в какой-то обратимый  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ .

То есть есть  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , такой что  $(r_1, r_2, \dots, r_n)(t_1, t_2, \dots, t_n) = (1, 1, \dots, 1)$ .

Да, что и требовалось, каждый из  $r_i$  обратим.

Также если у нас есть элемент в  $\times_{i=1}^n R_i^*$ , то ему, очевидно (очевидно, когда знаешь слово изоморфизм), соответствует элемент из  $R^*$  (так как его можно обратить, просто обратив каждую из компонент).

Тем самым  $\psi(R^*) = \times_{i=1}^n R_i^*$  и мы достигли успеха (можно сузить гомоморфизм  $\psi$  на  $R^*$ , при этом он гомоморфизмом и останется). □

**Теорема 18.1.**

1. Если  $\gcd(a, b) = 1$ , то  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
2. Если  $p$  — простое,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$
3. Если  $n = \prod_i p_i^{k_i}$ , то  $\phi(n) = \prod_i p_i^{k_i-1}(p_i - 1) = n \prod_i \frac{p_i-1}{p_i}$

**Доказательство.**

1. По китайской теореме об остатках  $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

Применим лемму,  $(\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$

$$\phi(ab) = |(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*| = \phi(a)\phi(b)$$

2.  $\phi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = p^{k-1}(p - 1)$

Среди всех чисел от 0 до  $p^k - 1$  подойдут все, кроме  $: p$ , а такой у нас ровно каждый  $p$ -тый.

3. Следует из индукции, и первых двух пунктов. □

# 19. Билет 19

**Теорема 19.1** (Эйлера). Если  $\gcd(a, n) = 1$ , то  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

*Замечание (Формулировка в теории групп).* Если  $\gcd(a, n) = 1$ , то  $\bar{a}^{\phi(n)} = 1$  в  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , где  $\bar{a}$  — класс числа  $a$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , по теореме Лагранжа порядок элемента  $x$  делит порядок группы.

Иначе говоря,  $x^s = 1$ , где  $s = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$ , но  $s = \phi(n)$  по определению. □

**Следствие (Малая теорема Ферма).** Если  $p$  — простое, и  $\gcd(a, p) = 1$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

**Теорема 19.2** (Вильсона). Если  $p$  — простое, то  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим поле  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (так как  $p$  — простое, то всё обратимо, см леммы выше).

$$f(x) := x^{p-1} - 1, \quad g(x) := (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)).$$

Заметим, что  $f(x) = g(x) = 0$  для всех  $x \neq 0, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Рассмотрим  $h(x) := f(x) - g(x)$ , моном  $x^{p-1}$  сократится, значит в разности получится многочлен степени  $\leq p-2$ .

Но у него есть  $p-1$  корень  $1, 2, \dots, p-1$ , по вот по [этой лемме](#)

$h(x) = 0$  — нулевой многочлен. Значит  $f(x) = g(x)$  (как многочлены).

Значит  $-1 = f(0) = g(0) = (p-1)! * (-1)^{p-1} = (p-1)!$  □

## 20. Билет 20

**Определение 20.1.** Пусть  $G$  — группа. Экспонентой  $G$  называется минимальное  $d \in \mathbb{N}$ , такое что  $g^d = e$  (для всех  $g \in G$ ).

Если такого  $d$  не существует, то экспонента принимается равной  $\infty$

**Упражнение:** Если  $G$  конечна, то экспонента делит  $|G|$

**Hint:** Осознайте связь экспоненты с порядками элементов, воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

**Лемма.** Пусть  $G$  — группа,  $a, b \in G$ ,  $ab = ba$ ,  $\gcd(\text{ord } a, \text{ord } b) = 1$ .

Тогда  $\text{ord}(ab) = \text{ord}(a) \text{ord}(b)$

**Доказательство.** Пусть  $\text{ord } a = n$ ,  $\text{ord } b = m$ .

Тогда  $(ab)^{mn} = \underbrace{ababab \dots ab}_{mn \text{ times}} = a^{mn} b^{mn} = e$ .

Значит  $mn : \text{ord } ab$ .

Пусть  $(ab)^k = e$ . Тогда  $a^k = b^{-k} = t$ , причём  $t \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ .

(Потому что пересечение двух циклических групп будет циклической группой с порядком, являющимся делителем обоих исходных порядков, т.е. пересечение тривиально).

$$\implies a^k = b^k = e \implies m : k, n : k \implies mn : k.$$

Тем самым  $\text{ord } ab = mn$ . □

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная абелева группа, тогда:

1. Экспонента  $G$  — это  $m = \text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g$
2.  $\exists g \in G: \text{ord } g = m$
3.  $G$  — циклическая  $\iff m = |G|$ .

**Доказательство.**

1.  $\forall g \in G: g^m = e \implies m : \text{ord } g$   
 $g^{\text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g} = e \implies \text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g : m$

Из двух делимостей следует равенство.

2. Разложим  $m$  на простые:  $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$

Заметим из того, что  $m = \text{lcm}$ , что для любого  $i$  существует хотя бы одно слагаемое порядка кратного  $p_i^{k_i}$ . Потому что если нет, то экспонента была бы меньше.

Соответственно для любого  $i$  существует  $g_i \in G$ , такое что  $\text{ord } g_i = p_i^{k_i}$  (Если неочевидно, что и в какие степени нужно возводить для этого, смотри в конспекте лектора, см. Следствие 13).

По предыдущей лемме и индукции:  $\text{ord } g_1 g_2 \dots g_l = m$ .

3.  $G$  — циклическая  $\implies m = |G|$ . Очевидно, так как порядок порождающего —  $|G|$ , пользуемся первым пунктом.  
 $G$  — циклическая  $\iff m = |G|$ . По предыдущему пункту есть элемент порядка  $|G|$ , он и порождает всю группу. □



## 21. Билет 21

**Теорема 21.1.** Пусть  $R$  — область целостности,  $G \leq R^*$ ,  $G$  — конечна. Тогда  $G$  — циклическая.

**Доказательство.** Пусть  $|G| = m$ . Достаточно показать, что экспонента  $G$  равна  $m$ , остальное следует из предыдущего следствия.

Пусть  $d$  — экспонента  $G$ . Значит для любого  $g \in G$ ,  $g^d = 1$ .

Следовательно все элементы  $G$  — корни многочлена  $x^d - 1$  в  $G[x]$ .

Следовательно, так как у многочлена степени  $d$  не может быть более  $d$  корней, то  $m = |G| \leq d$ . С другой стороны  $m \mid d$ . (см упражнение из начала предыдущего билета)  $\Rightarrow d \leq m$ .

Следовательно  $d = m$ , а группа  $G$  — циклическая.  $\square$

**Замечание.** Зачем нужно требовать целостности? Иначе нельзя сослаться на лемму о том, что не более  $\deg$  корней у многочлена.

**Следствие.** Конечные подгруппы мультипликативной группы поля — циклические.

**Замечание.** Поле действительно является областью целостности:

Если не область целостности, то есть  $x \neq 0, y \neq 0: xy = 0$ .

Рассмотрим  $x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}0$ .

Слева получаем 1, справа — 0.

**Следствие.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  — циклическая группа порядка  $p - 1$ .

## 22. Билет 22

**Лемма.**

$$1. x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$2. (a + b)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k a^k b^{l-k}$$

**Доказательство.** Должно быть известно из школьного курса □

**Лемма.** Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \not\equiv 2$ .

$$\text{Тогда } (n + 1)^{n^{m-1}} - 1 \equiv n^m \pmod{n^{m+1}}.$$

**Доказательство.** Индукция по  $m$ :

Не будем доказывать утверждение для  $n = 1$  (в таком случае мы сравниваем два числа по модулю  $1^{m+1} = 1$ , очевидно, корректно, бесполезно).

Если же  $n \neq 1$ , то  $n \geq 3$  (так как  $n \not\equiv 2$ ).

**База ( $m = 1$ )** При подстановке утверждение становится очевидно:  $(n + 1)^1 - 1 \equiv n^1 \pmod{n^2}$ .

**База ( $m = 2$ )** Подставляем:  $(n + 1)^n - 1 \equiv n^2 \pmod{n^3}$

Применим пункт 1 предыдущей леммы (запишем весь хвост разложения в  $n^3 t$ ):

$$(n + 1)^n - 1 = 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + n^3 t - 1 \equiv 1 + n^2 + n^2 * n(n - 1)/2 - 1 \equiv n^2 + n^3(n - 1)/2 \pmod{n^3}$$

Так как  $n$  — нечётно, то  $(n - 1) : 2$ , а  $n^3(n - 1)/2 : n^3$ .

$$\text{Итого, } (n + 1)^n - 1 \equiv n^2 \pmod{n^3}$$

Также здесь мы пользуемся, что  $n \geq 3$ , Чтобы уметь расписывать биномиальную сумму до нужного члена.

**Переход ( $m \rightarrow m + 1$ )** Ans =  $(n + 1)^{n^m} - 1 = ((n + 1)^{n^{m-1}})^n - 1$ .

Применим пункт 2 предыдущей леммы: Ans =  $((n + 1)^{n^{m-1}} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} (n + 1)^{in^{m-1}}$

Так как  $m \geq 2$ , то  $(n + 1)^{in^{m-1}} \equiv 1 \pmod{n^2}$  (так как  $(n + 1)^{n^{m-1}} \equiv 1 + n^m \pmod{n^m} \equiv 1 \pmod{n^2}$  по индукции и т.к.  $m > 1$ ).

Из этого следует, что  $\sum_{i=0}^{n-1} (n + 1)^{in^{m-1}} \equiv n \pmod{n^2}$

По предположению индукции мы знаем, что  $(n + 1)^{n^{m-1}} - 1 \equiv n^m \pmod{n^{m+1}}$

Подставим всё: Ans =  $(n^m + n^{m+1}t)(n + n^2t') \equiv n^{m+1} \pmod{n^{m+2}}$  □

Как написано выше  $|(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = \phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$

**Лемма.** В группе  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^* = \langle d \rangle$ :

$$1. \text{ord}(p + 1) = p^{k-1}$$

2. Пусть  $\langle d \rangle = (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$

Тогда  $\text{ord } d^{p^{k-1}} = p - 1$

3.  $(p + 1)d^{p^{k-1}}$  — первообразный корень по модулю  $p^k$ , т.е:

$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$  — циклическая.

### Доказательство.

1. (по лемме, которую мы только что долго и нудно доказывали)  $n = p, m = k$  (Рассматриваем случай  $p \neq 2$ ).

$$(p + 1)^{p^{k-1}} \equiv 1 + p^k \pmod{p^{k+1}}$$

$$(p + 1)^{p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k} \implies \text{ord}(p + 1) \mid p^{k-1}$$

Если  $\text{ord}(p + 1) < p^{k-1}$ , то  $\text{ord}(p + 1) \mid p^{k-2}$ .

Но по лемме ( $n = p, m = k - 1$ )  $(p + 1)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{p^k}$

А теперь мы живем в мире, где  $p = 2$

$|(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*| = \phi(2^k) = 2^{k-1}$ .  $\text{ord } 3 = 2^{k-1}$  = порядку группы т.к. 3 и  $2^{k-1}$  взаимнопросты.

2.  $d \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*, |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = p^{k-1}(p - 1) \implies \text{ord } d \mid p^{k-1}(p - 1) \implies \text{ord } d^{p^{k-1}} \mid p - 1$

Ну раз так то найдем  $l \leq p - 1 : d^{p^{k-1}l} = 1 \pmod{p^k}$

$$d^{p^{k-1}l} \equiv 1 \pmod{p^k} \implies d^{p^{k-1}l} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\implies p^{k-1}l : (p - 1) = \phi(p) \iff p - 1 \geq l : (p - 1) \implies l = p - 1 \implies \text{ord}(d^{p^{k-1}}) = p - 1$$

3.  $\text{ord}((p + 1)d^{p^{k-1}}) =$  (по лемме про взаимнопростые порядки из самого начала 18 билета)  
 $= (p - 1)p^{k-1} = |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*|$

□

Если  $k = 1$ , то  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = \{1\}$ .

Если  $k = 2$ , то  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1, 3\} \cong C_2$ .

**Лемма.** В группе  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ , при  $k \geq 2$ :

1.  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \implies 5^{2^{m-2}} - 1 \equiv 2^m \pmod{2^{m+1}}$

2. В  $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ :

(a)  $\text{ord}(-1) = 2, \text{ord}(5) = 2^{k-2}$

(b)  $\langle -1 \rangle \cap \langle 5 \rangle = \{1\}$

3.  $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^* \simeq C_2 \times C_{2^{k-2}}$ .

**Доказательство. TODO:** Перенести доказательство Андрея сюда.

□

## 23. Билет 23

**Теорема 23.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$  — разложение на простые, причём если  $n : 2$ , то  $p_1 = 2$ .

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z} \text{ — по КТО.}$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \times_i (\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z})^* \text{ — по лемме из 18 билета.}$$

$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^* \cong C_{p^{k-1}(p-1)}$  при  $p \neq 2$ . А для любых случаев выполняется:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \begin{cases} C_{p_1^{k_1-1}(p_1-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n \not\equiv 2 \vee n : 4, n \not\equiv 8 \\ C_{p_2^{k_2-1}(p_2-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n : 2, n \not\equiv 4 \\ C_2 \times C_{2^{k_1-2}} \times C_{p_2^{k_2-1}(p_2-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n : 8 \end{cases}$$

**Доказательство.** Ничего умного, расширяем запись. Если  $n \not\equiv 2$ , написали по лемме. Если  $n : 4, n \not\equiv 8$ , то  $p_1 = 2, k_1 = 2$  в произведение групп входит группа  $C_{2^{2-1}(2-1)} = C_2$ . Остальные случаи аналогично, по п. 3 последней леммы из 22. □

**Теорема 23.2.**  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  циклическая  $\iff n = 2, 4, p^k, 2p^k$ , где  $p > 2$  — простое.

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Уже знаем.

$$\Rightarrow. \text{ Знаем, что } \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \text{ — циклическа } \Leftrightarrow (a, b) = 1.$$

Пусть  $p, q > 2$  — простые. Тогда  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \cong C_{p-1} \times C_{q-1}$ , где  $(p-1, q-1) : 2 \rightarrow \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  — не циклическа. Из этого перебором вариантов, как может выглядеть разложение  $n$  на простые получаем, что только подходят только указанные 4 случая. В остальных случаях  $n$  будет делиться на 2. □

**Определение 23.1.**  $G = \langle d \rangle$  — конечная циклическая группа.  $|G| = n$ .

$\text{exp}_d : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$  — изоморфизм, назовём дискретная экспонента.

$$\text{exp}_d : a \mapsto d^a$$

$\text{log}_d = \text{exp}_d^{-1}$  — дискретный логарифм.

**Лемма.** Критерий существования дискретного логарифма. В циклической группе  $G = \langle d \rangle$  уравнение вида  $d^x = y$  всегда разрешимо.

**Доказательство.** Действительно,  $d$  — порождает группу, то есть его степени образуют все возможные элементы  $y$ . □

## 24. Билет 24

**Определение 24.1.** Функция Карлмайка  $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$\lambda$  — экспонента группы  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

$\lambda(n) \mid \phi(n)$ , Пусть  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$

**Теорема 24.1.**

1. Если  $n \nmid 8$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1))$
2. Если  $n = 2^k m$ , где  $k \geq 3$ , а  $m \nmid 2$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}(\text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1)), 2^{k-2})$
3. Если  $\text{gcd}(a, n) = 1$ , то  $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Доказательство.**

1. Если  $n \nmid 8$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1))$
2. Если  $n = 2^k m$ , где  $k \geq 3$ , а  $m \nmid 2$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}(\text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1)), 2^{k-2})$
3. Если  $\text{gcd}(a, n) = 1$ , то по теореме Эйлера  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow a$  — первообразный корень по модулю  $n$  (образует группу обратимых элементов, а значит, в ней содержится)  $\Rightarrow a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

□

## 25. Билет 25

Тест Ферма на простоту

$n$  — простое  $\implies a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  ( $(a, n) = 1, 1 < a < n$ ).

$T \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  — множество тех  $a$ , для которых тест пройден.

Если  $n$  — простое, то  $T = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

Тест Ферма  $T = \{a \mid a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}\}$

**Определение 25.1.** Составные числа  $n$ , такие что  $|T_n| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}|$  называются псевдопростыми для данного теста.

**Определение 25.2.** Числа Карлмайкла — псевдопростые числа для теста Ферма. Таких чисел бесконечно много. Наименьшее число Карлмайкла — это 561.

Тест Эйлера:

Незачем тестировать чётные числа с ними и так всё ясно. Давайте тестировать только нечётные.

$T = \{a \mid a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n}\}$

Увы тоже есть псевдопростые. Пример: 1729

Если составное, то вероятность детектирования через 10 запусков:  $1 - \frac{1}{k^{10}}$

Тест Соловея-Штрассена

$$T := \{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \mid a^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{a}{n}\right)\}$$

Для  $k$  случайных значений  $a$  мы проверим выполнение условия  $a \in T$

**Утверждение 25.1.** Пусть  $n$  — нечетное составное число. Тогда  $|T| < \frac{\phi(n)}{2}$ . (Факт из воздуха, ничего с ним делать не нужно). Таким образом, если для  $k$  случайных значений  $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

Тогда если для  $k$  случайных  $a$  выполнено  $a \in T$ , то  $n$  простое с вероятностью не меньше чем  $1 - \frac{1}{2^k}$

Тест Миллера-Рабина

Пусть  $n - 1 = 2^m k, 2 \nmid k$ .

$$T := \{a \mid a^k = 1 \text{ или } \exists j < m : a^{2^j k} = -1\}$$

Если  $n$  простое, то  $T = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . (Летор утверждает, что это легко понять из того, что  $x^2 = 1$  в нашем поле имеет только 2 решения).

**Утверждение 25.2.**  $n$  — нечетное составное число  $3 \nmid n$  и  $n - 1 = 2^m k, 2 \nmid k$ . Тогда  $|T| \leq \frac{\phi(n)}{4}$  (Факт из воздуха).

Тогда если для  $k$  случайных  $a$  выполнено  $a \in T$ , то  $n$  простое с вероятностью не меньше чем  $1 - \frac{1}{4^k}$  Если при фиксированном  $n$  число  $a$  проходит тест Миллера-Рабина и не показывает, что  $n$  составное, то для теста Соловея-Штрассена результат будет тем же.

## 26. Билет 26

$$P \rightarrow fC \rightarrow f^{-1}P.$$

Где  $P, C$  — последовательности из символов какого-то алфавита (пусть  $Z/nZ$ )

Пример очень простого шифрования:

- $x \mapsto fx + b$
- $y \mapsto f^{-1}y - b.$

Где  $b$  — это секретный ключ.

Вообще так себе шифрование, потому что:

- Можно просто перебрать  $b$  (не так уж и много комбинаций).
- Частотный анализ (некоторые буквы встречаются чаще чем другие, тем самым можно перебрать только очень малое число гипотез).

Вторая попытка:

- $x \mapsto fax + b$ , где  $a$  обратим (что верно  $\iff \gcd(a, n) = 1$ ).
- $y \mapsto f^{-1}a^{-1}(y - b)$ , где  $a^{-1}$  можно найти как  $a^{\phi(N)-1}$  или алгоритм Евклида  $1 = xN + ay$ ,  $\gcd(N, y) = 1$ .

Если знаем куда переходят две буквы (скажем из того же частотного анализа), то тоже конец шифру:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases},$$

решаем и получаем ответ.

Идея: давайте найдём такую функцию  $f$ , что её несложно вычислить, но сложно найти обратную не зная какого-то “секрета”.

RSA

Два человека (скажем Алиса и Боб) хотят безопасно обмениваться информацией.

Рассмотрим следующий алгоритм (RSA):

- Алиса выбирает большое простое число  $p$ , а Боб выбирает большое простое число  $q \neq p$  (как это сделать см в предыдущих сериях),
- Определим  $N = pq$ , заметим, что  $\phi(N) = (p-1)(q-1) = N - p - q + 1$ , что легко вычисляется Алисой и Бобом, знаящими  $p, q$  и сложно вычисляемо остальными.
- Алиса и Боб выбирает некое  $e: 1 \leq e \leq \phi(N), \gcd(e, \phi(N)) = 1$ .
- Определим функцию шифрования:  $f(x) := x^e$
- Находим  $d \in \mathbb{Z}$ , такое что  $de \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ .
- Определим  $f^{-1}(y) = y^d$ . Тогда  $f^{-1} \circ f = x^{de} = x^{1+k\phi(N)} = x$ , так как  $x^{\phi(N)} = 1$ . ( **TODO: А почему мы так уверены, что  $x$  не окажется случайно делителем  $N$ ? Или типа тогда у нас есть проблемы побольше?** )
- Итог: любой, знающий  $N, e$  может шифровать, но только знающие  $p, q$  могут быстро сделать дешифровку.

## 27. Билет 27

$f(x) \equiv 0 \pmod{N} \iff f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{k_i}}$ , где  $n = p_1^{k_1} * \dots * p_t^{k_t}$ .

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$$

$$x^2 + a^{-1}bx + a^{-1}c \equiv 0$$

Если  $p \neq 2$ , то уравнение выше эквивалентно:

$$\left(x + \frac{a^{-1}b}{2}\right)^2 \equiv -a^{-1}c + \frac{a^{-2}b^2}{4} \pmod{p}.$$

Вопрос по поводу  $p = 2$  замнём, там бывает всего 2 возможных значения, неинтересно.

**Определение 27.1.** Пусть  $(a, m) = 1$ .  $a$  — квадратный вычет по модулю  $m$ , если сравнение  $x^2 \equiv a \pmod{m}$  — разрешимо.

*Замечание.* Аналогично вводится понятие квадратного невычета.

**Определение 27.2.** Пусть  $p$  — простое число  $\geq 3$ .

$$F_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

*Замечание.* Как впоследствии будет показано, любое поле порядка  $p$  ( $p$  простое,  $\geq 3$ ) изоморфно  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Определение 27.3.**  $(F_p^*)^2 := \{x^2 \mid x \in F_p^*\}$

**Лемма.**

0.  $(F_p^*)^2 \leq F_p^*$
1.  $|F_p^* : (F_p^*)^2| = 2$
2.  $\forall x \in F_p^* : x^{(p-1)/2} = \pm 1$ .
3. Если  $x \in F_p^*$ , то  $x \in (F_p^*)^2 \iff x^{(p-1)/2} = 1$ .

**Доказательство.** Пункт 0 остаётся в качестве упражнения на определения. (Это правда неинтересно. мы с группами так 100500 раз делали)

1. Пусть  $f: F_p^* \rightarrow F_p^*$ , где  $x \mapsto x^2$ .

$\text{Ker } f = \{x \in F_p^* \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$ , это например следует из того, что многочлен в поле не может иметь больше корней, чем его степень.

$$(F_p^*)^2 = \text{Im } f \simeq F_p^* / \text{Ker } f$$

$$|F_p^*| = p - 1, |\text{Ker } f| = 2, \text{ следовательно } |(F_p^*)^2| = (p - 1)/2, \text{ пункт (1) доказан.}$$

2.  $x^{p-1} = 1$  в  $F_p^* \implies x^{(p-1)/2} \in \text{Ker } f = \{\pm 1\}$ , что верно  $\forall x \in F_p^*$

3. “ $\implies$ ”.  $x = y^2$ , значит  $x^{(p-1)/2} = y^{p-1} = 1$ .

“ $\impliedby$ ”

$$(F_p^*)^2 \subseteq \{x \mid x^{(p-1)/2} = 1\}$$

Но  $|(F_p^*)^2| = (p - 1)/2$ ,  $|\{x \mid x^{(p-1)/2} = 1\}| \leq (p - 1)/2$  (многочлены степени  $\frac{p-1}{2}$  имеют не больше степени корней).

$$\text{Значит } (F_p^*)^2 = \{x \mid x^{(p-1)/2} = 1\}. \quad \square$$



**Определение 27.4.** Пусть  $p$  — простое  $\geq 3$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $\gcd(a, p) = 1$ .

Символ Лежандра это 
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & a \in (F_p^*)^2 \\ -1 & \text{иначе} \end{cases}$$

*Замечание.* Так как мы определили символ Лежандра только для простых  $p \geq 3$ , то везде далее подразумевается это ограничение на  $p$

**Утверждение 27.1.**

1.  $\left(\frac{a}{b}\right) = a^{(p-1)/2} \pmod{p}$ .
2.  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$
3. Если  $a \equiv b \pmod{p}$ , то  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

**Доказательство.**

1. 2 + 3 пункты из предыдущей леммы
2. Если  $a$  и  $b$  — квадратичные вычеты, понятно. Если только один, то при возведении в квадрат получим единицу на неединицу. Если оба не вычеты, то  $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$  и  $b^{\frac{p-1}{2}} = -1$ , тогда  $(ab)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ , тогда  $ab$  — квадратичный вычет
3. Очевидно? Кратное  $p$  при возведении в квадрат отлично отбрасывается

□

## 28. Билет 28

**Теорема 28.1.** Пусть  $p, q$  — простые,  $\geq 3$ .

- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ .
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$
- $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

**Доказательство.**

- 1 пункт предыдущей леммы, частный случай
- Не было на паре, а я сходу не умею
- Тоже

□

**Определение 28.1.**  $n = p_1 \dots p_m$ , где  $p_i$  — простые  $\geq 3$ ,  $\gcd(a, n) = 1$ .

Тогда  $\left(\frac{a}{n}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right) \dots \left(\frac{a}{p_m}\right)$  — символ Якоби.

**Теорема 28.2.**  $n \not\equiv 2 \pmod{4} \implies \left(\frac{1}{n}\right) = -1, \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}, \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$

**Теорема 28.3** (Квадратичный закон взаимности).  $\gcd(a, n) = 1$ ,  $a, n$  — нечётные.  $\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{n}{a}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{a-1}{2}}$ .

## 29. Билет 29

Простое определение поля комплексных чисел

Обычно под комплексными числами понимают множество  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  с операциями, определённым следующим образом:

- $(x, y) + (z, w) := (x + z, y + w)$
- $(x, y) * (z, w) := (x * z - y * w, x * w + y * z)$

Проверить дистрибутивность умножения остаётся как упражнение.

$$i := (0, 1).$$

Можно записывать  $(x, 0)$  как просто  $x$ , тем самым часто можно встретить запись вида  $10 - 3i$ , под этим понимается число  $(10, -3)$ .

**Замечание 1.**  $i^2 = -1$  (это не определение, это следует из  $i = (0, 1)$ )

На самом деле из этого соотношения (и дистрибутивности) и выводится та формула умножения:

$$(x + iy)(z + iw) = xz + xiw + iyz + i^2yw = xz - yw + i(xw + yz).$$

**Замечание 2.** Элемент 1 (или  $(1, 0)$ ) является нейтральным по умножению.

**Замечание 3.** Деление комплексных чисел выводится из умножения:

$$\frac{x+yi}{z+wi} = \frac{(x+yi)(z-wi)}{(z+wi)(z-wi)} = \frac{xz+yw+i(yz-xw)}{z^2+w^2}$$

В практическом смысле лучше запоминать не формулу, а то, откуда она получается (домножение на сопряжённое).

Связанные определения и свойства

**Определение 29.1.** Пусть  $z = x + iy$ , тогда:

- $\operatorname{Re} z := x$  — действительная часть  $z$ .
- $\operatorname{Im} z := y$  — мнимая часть  $z$ .
- $\bar{z} := x - iy$  — сопряжённое число к  $z$ .

Простейшие свойства:

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z\bar{z} = |z|^2, z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$
- $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$
- $f(z) = \bar{z}$  — автоморфизм  $\mathbb{C}$ .

Первые 4 свойства следуют непосредственно из определений и должны быть очевидны.

По поводу последнего надо сказать следующее:  $i$  является решением уравнения  $x^2 = -1$ , но на самом деле решений у этого уравнения два:  $i, -i$ . Но откуда вы знаете какое же из них взять как  $i$ ? Соответственно выбор противоположного решения и задаёт соответствующий автоморфизм.

Более формально это можно показать доказав отдельно гомоморфизм и биективность.

Гомоморфизм — просто ручками проверить сложение и умножение по свойствам. Биективность: числа из  $\mathbb{R}$  уходят в себя, неинтересно. А числа с мнимой частью однозначно разбиваются на непересекающиеся пары.

## 30. Билет 30

Несколько форм записи комплексного числа.

- $a + bi$  — “обычная”.
- $r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$  — “тригонометрическая”.

Заметим, что  $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\arg z + \arg w) + i \sin(\arg z + \arg w))$ .

**Замечание.** Если зафиксировать  $w \in \mathbb{C}$ , то можно рассмотреть функцию  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f(z) := zw.$$

Если интерпретировать  $\mathbb{C}$  как плоскость, то мы только что получили некоторую гомотетию, то есть отображение, сохраняющее подобие.

Несложно увидеть, что данное отображение можно интерпретировать как растяжение и поворот относительно 0, из чего следует утверждение выше.

**Лемма** (формула Муавра).  $z^n = |z|^n(\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z))$ , для  $n \in \mathbb{N}$ . (Доказательство: используем формулу выше  $n$  раз)

**Определение 30.1.**  $re^{i\phi} := r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$

**Замечание 1.** Вообще следует из матанализа, но пока будем принимать это как определение.

**Замечание 2.** Приятным бонусом является сохранение свойств степенной функции:

Если  $z = re^{i\phi}$ ,  $w = te^{i\psi}$ , то  $zw = rte^{i(\psi+\phi)}$ . Просто раскрыть по предыдущему определению.

Также  $z^n = (re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}$ . (формула Муавра)

**Лемма (1).**  $C^* \cong \mathbb{R}_{>0}^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

**Лемма (2).**  $C^* \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

**Лемма (3).**  $C^* \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

**Замечание.**  $C^*$  нужно воспринимать как обратимую группу кольца  $\mathbb{C}$  относительно умножения,  $\mathbb{R}_{>0}^*$  тоже,

$\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Z}$  подразумеваются относительно операции сложения.

**Доказательство.**

1.  $z \mapsto (|z|, \arg z)$ .

Гомоморфность очевидна, инъективность и сюръективность несложно показываются.

2. Чтобы получить вторую лемму пропустим первую компоненту предыдущего произведения через следующий изоморфизм:

$\ln: \mathbb{R}_{>0}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ , сюръективность с инъективностью очевидны.

3. Теперь пропустим вторую часть через изоморфизм домножения на константу:

$$f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, x \mapsto \frac{x}{2\pi}$$

□

# 31. Билет 31

$z^n = w$ , где  $w \in \mathbb{C}$ , найти  $z$ .

Перейдём в экспоненциальную запись:  $w = se^{i\psi}$ ,  $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\psi \in \mathbb{R}$ .

Аналогично  $z = re^{i\phi}$ ,  $z^n = r^n e^{in\phi} = se^{i\psi}$ .

Тогда  $r^n = s$ , или  $r = \sqrt[n]{s}$ .

А также  $n\phi - \psi : 2\pi$ , из чего  $\phi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

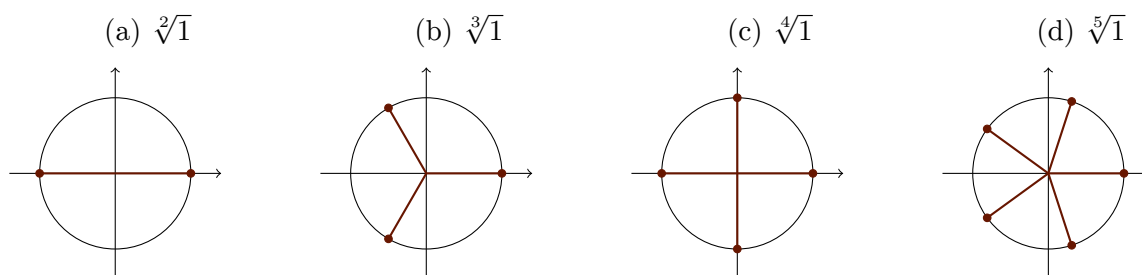
Сами корни выглядят как  $z_k = \sqrt[n]{s} \exp(i \frac{\psi + 2\pi k}{n})$ .

**Замечание.** Заметим, что  $\phi(k)$  повторяются каждые  $n$  раз, поэтому достаточно рассмотреть только

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  или любое другое множество, содержащее все остатки по делению на  $n$ .

**Замечание.** Случай  $w = 0$  является вырожденным. Отметим, что в общем случае будет ровно  $n$  решений, но при  $w = 0$  только один 0.

**Определение 31.1.** Под  $\sqrt[n]{w}$  понимается соответствующее множество  $z_i$ .



Аналогично для  $w \neq 1$  мы тоже получим круг, но растянутый и/или повернутый.

Гауссовы целые числа — это множество комплексных чисел, у которых и действительная, и мнимая часть — целые числа.

Гауссовы целые числа обозначаются как  $\mathbb{Z}[i]$ .

## 32. Билет 33

Поле частных

*Замечание.* Здесь и далее " $\hookrightarrow$ " используется для обозначения мономорфизма (инъект. гомоморфизм).

*Замечание.* Неформальные утверждения. Поле частных — пространство «дробей» с числителем из  $R$  и знаменателем из  $R \setminus \{0\}$ . Поле частных — это стандартный способ сделать элементы кольца обратимыми. Поле частных — наименьшее поле, в которое можно вложить  $R$  (то есть оно также вкладывается в любое другое поле, в которое вкладывается  $R$ ).

**Теорема 32.1.**  $R$  — область целостности (коммутативная).

Тогда существуют поле  $F$  и мономорфизм  $\phi: R \rightarrow F$ , такие что для любого поля  $G$  и мономорфизма  $\psi: R \rightarrow G \exists! \Theta: F \rightarrow G$  гомоморфизм, такой что  $\psi = \Theta \circ \phi$ . ( $R \hookrightarrow F \hookrightarrow G$  и  $R \hookrightarrow G$ .)

**Доказательство.**  $R \times (R \setminus \{0\})$

Определим  $\sim: (a, b) \sim (c, d)$  если  $ad = bc$  — отношение эквивалентности.

Рассмотрим  $F := R \times (R \setminus \{0\}) / \sim$ .

Обозначим за  $\frac{a}{b}$  — класс  $(a, b)$

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$

**Упражнение:**

1. Докажите корректность определений операций  $*, +$  (независимость от выбора элемента в классе эквивалентности)
2. Проверьте, что  $F$  — кольцо, причём единице соответствует класс элемента  $\frac{1}{1}$ , а нулю  $\frac{0}{1}$
3. Проверьте, что  $F$  — поле, причём  $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$
4. Докажите существование мономорфизма  $\phi: R \rightarrow F, x \mapsto \frac{x}{1}$  (можно доказать гомоморфность и тривиальность ядра  $\phi$ )

Существование  $\Theta$ .  $\Theta(\frac{a}{b}) := \psi(a)\psi(b)^{-1}$

1. Корректность
2. Гомоморфность  $+$ :  $\Theta(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = \Theta(\frac{a}{b}) + \Theta(\frac{c}{d})$
3. Гомоморфность  $*$ :  $\Theta(\frac{a}{b} * \frac{c}{d}) = \Theta(\frac{a}{b}) * \Theta(\frac{c}{d})$
4. Мономорфизм **TODO:**
5. Удовлетворяет условию  $\psi = \Theta \circ \phi: \forall a \in R. \Theta(\phi(a)) = \Theta(\frac{a}{1}) = \psi(a)\psi(1)^{-1} = \psi(a)$   
Единственность  $\Theta$ . **TODO:**

□

**Определение 32.1.** Построенное поле  $F$  называется полем частных кольца  $R$  и обозначается  $\text{Qout } R$ .

*Замечание.* Докажем единственность  $F$ .  $R \hookrightarrow F, R \hookrightarrow F_1$ , в силу теоремы есть мономорфизм из  $F$  в  $F_1$ , и из  $F_1$  в  $F$ , поэтому  $F$  изоморфно  $F_1$ .

**Определение 32.2.**  $K$  — поле. Тогда поле дробно-рациональных функций:  $K(x) := \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in K[x], g \neq 0\}$ .

*Замечание.*  $K(x) = \text{Qout}(K[x])$

Далее  $R$  — КГИ.

**Утверждение 32.2.**  $\forall \frac{a}{b} \in \text{Qout } R$  можно представить в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{r_1^{k_1}} + \dots + \frac{a_s}{r_s^{k_s}}, \text{ где } r_i \text{ неприводимы.}$$

**Доказательство.**  $b = b_1 b_2$ , где  $(b_1, b_2) = 1$

$$\frac{a}{b_1 b_2} = \frac{ay}{b_1} + \frac{ax}{b_2}, \exists x, y \in R: 1 = b_1 x + b_2 y, \text{ а значит } a = b_1 a x + b_2 a y.$$

Доказательство состоит из индукции по  $s$ , при чём первый пункт является как базой (для  $s = 2$ ,  $s = 1$  очевидно), так и переходом  $s \rightarrow s + 1$   $\square$

Пусть  $R$  евклидово кольцо с евклидовой нормой  $\nu$ .

**Определение 32.3.**  $\frac{a}{r^k} \in \text{Qout } R$ ,  $\frac{a}{r^k}$  простейшая дробь, если  $\nu(a) < \nu(r)$

**Утверждение 32.3.**  $\forall \frac{a}{b} \in \text{Qout } R$   $\frac{a}{b} = \sum$  простейших + элемент из  $R$

**Доказательство.** 1. По предыдущему утверждению достаточно рассмотреть только  $\frac{a}{r^k}$ , где  $r$  неприводимый.

2.  $a = qr + r_0$ ,  $\nu(r_0) < \nu(r)$  или  $r_0 = 0$

$\frac{a}{r^k} = \frac{q}{r^{k-1}} + \frac{r_0}{r^k}$ , где второе слагаемое неприводимо, а первое можно разложить индукцией по  $k$ .

3. «Элемент из  $R$ » — это «целая часть» дроби, то есть элемент вида  $\frac{a}{1}$ . Можно разложить и без неё, набрав целую часть половинками, но это издевательство какое-то.  $\square$

**Пример.** Поле рациональных чисел  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  является полем частных кольца целых чисел  $\mathbb{Z}$ .