

# Экзамен по алгебре

Швецова Анна по конспектам от Саютина Дмитрия

15 января 2017 г.

## Содержание

<b>1. Билет 1</b>	<b>1</b>
1.1 Определения и основные понятия . . . . .	1
1.2 Свойства колец . . . . .	1
1.3 Гомоморфизм колец . . . . .	2
1.4 Подкольца и идеалы . . . . .	3
<b>2. Билет 2</b>	<b>5</b>
<b>3. Билет 3</b>	<b>7</b>
<b>4. Билет 4</b>	<b>8</b>
<b>5. Билет 5</b>	<b>10</b>
<b>6. Билет 6</b>	<b>12</b>
<b>7. Билет 7</b>	<b>14</b>
<b>8. Билет 8</b>	<b>16</b>
<b>9. Билет 9</b>	<b>18</b>
<b>10. Билет 10</b>	<b>19</b>
<b>11. Билет 11</b>	<b>20</b>
<b>12. Билет 12</b>	<b>21</b>
<b>13. Билет 13</b>	<b>22</b>
<b>14. Билет 14</b>	<b>24</b>
<b>15. Билет 17</b>	<b>25</b>

---

<b>16. Билет 18</b>	<b>26</b>
<b>17. Билет 19</b>	<b>27</b>
<b>18. Билет 20</b>	<b>28</b>
<b>19. Билет 21</b>	<b>29</b>
<b>20. Билет 22</b>	<b>30</b>
<b>21. Билет 23</b>	<b>32</b>
<b>22. Билет 24</b>	<b>33</b>
22.0.1 Тест ферма на простоту . . . . .	33

# 1. Билет 1

## 1.1. Определения и основные понятия

**Определение 1.1.** Множество  $R$  с операциями  $+$ ,  $\cdot$  на нём называется кольцом, если:

1.  $(R, +)$  — абелева группа.
2.  $\forall x, y, z \in R: \begin{matrix} (x + y)z = xz + yz \\ x(y + z) = xy + xz \end{matrix}$  (дистрибутивность)

**Определение 1.2.** Кольцо называется ассоциативным, если  $*$  — ассоциативна ( $x(yz) = (xy)z$ ).

**Определение 1.3.** Кольцо называется коммутативным, если  $*$  — коммутативна ( $xy = yx$ ).

**Определение 1.4.** Кольцо называется кольцом с единицей, если  $\exists 1: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \forall x \in R$ .

**Определение 1.5.** Ассоциативное кольцо с единицей, причём  $1 \neq 0$ , в котором всякий ненулевой элемент обратим [по умножению] называется телом.

**Определение 1.6.** Коммутативное тело называется полем.

**Пример.**

$2\mathbb{Z}$  — коммутативное, ассоциативное кольцо без 1

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$R[x]$  — кольцо многочленов с коэффициентами из  $R$

$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$  — кольцо формальных степенных рядов.

## 1.2. Свойства колец

**Лемма.** Пусть  $R$  — кольцо (ассоциативное),  $r \in R$ , тогда:

1.  $r * 0 = 0 * r = 0$
2. Если  $R$  — кольцо с единицей, то  $(-1) * r = -r$ , где  $(-x)$  означает обратный элемент по сложению.
3. Если  $|R| \neq 1$ , то  $0 \neq 1$ .

**Доказательство.**

1.
  - $r + 0 = r = 0 + r$ .
  - $r(r + 0) = r^2$
  - $r^2 + r * 0 = r^2$
  - $r * 0 = 0$ .
  - Аналогично доказывается правое равенство.

2. Пользуемся **дистрибутивностью** кольца:

$$r * 0 = 0 \Rightarrow r(-1 + 1) = 0 \Rightarrow (-1)r + 1 * r = 0 \Rightarrow (-1)r + r = 0 \Rightarrow (-1) * r = (-r)$$

3. Пусть  $0 = 1$ . Тогда  $\forall r \in R: r = 1 * r = 0 * r = 0 \implies R = \{0\} \implies |R| = 1$ .  $\square$

**Определение 1.7.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Элемент  $r \in R \setminus \{0\}$  называется делителем нуля, если  $\exists s \in R \setminus \{0\}: rs = 0$ .

**Определение 1.8.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Элемент  $r \in R \setminus \{0\}$  называется нильпотентным, если  $\exists n \in \mathbb{N}: r^n = 0$

**Замечание 1.** В  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  есть делители нуля  $\iff n$  — составное.

- Если  $n = ml$  ( $m, l \geq 2$ ), то и  $m$  и  $l$  — делители нуля.
- Если есть делители нуля, то  $\exists m, l \geq 2, ml : n$ , что невозможно.

Так что в качестве примера можно привести какое-нибудь составное число и его делитель.

**Замечание 2.** В  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  нильпотенты  $\iff n$  делится на какой-то квадрат.

**TODO:** Нужно больше примеров

**Определение 1.9.** Коммутативное ассоциативное кольцо с 1 без делителей нуля называется областью целостности (целостным кольцом).

### 1.3. Гомоморфизм колец

**Определение 1.10.**  $f: A \rightarrow B$  называется гомоморфизмом колец, если:

- $A, B$  — кольца.
- $\forall a, b \in A: f(a + b) = f(a) + f(b)$ .
- $\forall a, b \in A: f(ab) = f(a)f(b)$ .

**Определение 1.11.**  $\text{Ker } f = f^{-1}(0) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$

**Определение 1.12.**  $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ .

**Замечание.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец, то:

1.  $f(0_A) = 0_B$
2.  $f(-r) = -f(r)$
3. Если  $f(a) = b$ , то  $f^{-1}(b) = a + \text{Ker } f$
4.  $f$  — инъективна  $\iff \text{Ker } f = \{0\}$

**Доказательство.**

1.  $f(0_A) = f(0_A * 0_A) = f(0_A) * f(0_A) \Rightarrow f(0_A) = 0_B$
2.  $0_B = f(0_A) = f(-r + r) = f(-r) + f(r) \Rightarrow f(-r) = -f(r)$
3. Если  $f(a) = b$ , то  $f^{-1}(b) = a + \text{Ker } f$

Докажем вложенность в обе стороны.

$a + \text{Ker } f \subset f^{-1}(b)$  т.к.  $\forall x \in \text{Ker } f f(a + x) = f(a) + f(x) = f(a) + 0 = f(a) = b$

В другую сторону: пусть есть элемент  $t \notin a + \text{Ker } f: f(t) = b$ , тогда  $0 = f(t) - f(a) = f(t - a) \Rightarrow t - a \in \text{Ker } f \Rightarrow t - a + a \in a + \text{Ker } f \Rightarrow t \in a + \text{Ker } f$  Противоречие

4.  $f$  — инъективна  $\Rightarrow \forall x \in B |f^{-1}(x)| \leq 1 \Rightarrow |\text{Ker } f| = |f^{-1}(0)| \leq 1$  Но там есть хотя бы 0, значит, строго 1. В обратную сторону очевидно. Если ядро нетривиально, значит, хотя бы прообраз нуля ломает инъективность.

$\square$

**Замечание.** Единица не всегда сохраняется, даже если она есть во втором кольце.

**Пример.**  $A$  — абелева группа, есть  $+$ ,  $0$ .  $x, y \in A$ :  $x \cdot y := 0$ .

**Определение 1.13.** Гомоморфизм нулевой, если он переводит все элементы в  $0$ .

**Утверждение 1.1.** Если  $f: A \rightarrow B$  ненулевой гомоморфизм колец.  $A$  — кольцо (ассоциативное, коммутативное) с  $1$ .  $B$  — область целостности, то  $f(1_A) = 1_B$ .

**Доказательство.**  $f(1_A) = f(1_A * 1_A) = f(1_A) * f(1_A)$

$$f(1_A) - f(1_A) * f(1_A) = 0_B$$

$$f(1_A)(1_B - f(1_A)) = 0_B.$$

Так как  $B$  — область целостности, то  $f(1_A) = 0$  или  $f(1_A) = 1_B$ .

Если  $f(1_A) = 0_B$ , то  $\forall a \in A$ :  $f(a) = f(1 * a) = f(1) f(a) = 0 f(a) = 0 \implies f$  — нулевой.

Следовательно  $f(1_A) = 1_B$ . □

**Замечание.** Далее гомоморфизм колец с единицей означает гомоморфизм колец, обладающий свойством выше ( $f(1_A) = 1_B$ ).

**Лемма.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец с единицей, то  $\forall x \in A^*$ :  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

**Доказательство.**

Если  $a$  обратим, то  $aa^{-1} = 1$ . Тогда  $1 = f(1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) \implies f(a)^{-1} = f(a^{-1})$  □

**Лемма.** Если  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм колец, то

$\text{Im } f$  — подкольцо  $B$ .

$\text{Ker } f$  — двусторонний идеал  $A$ .

**Доказательство.** Оставлено в качестве упражнения. □

## 1.4. Подкольца и идеалы

**Определение 1.14.** Непустое подмножество кольца  $R$  называется подкольцом, если

- $\forall a, b \in A$ :  $a + b, -a, ab \in A$

**Определение 1.15.** Аддитивная подгруппа  $I \subseteq R^+$  называется:

- Левым идеалом, если  $\forall r \in R, \forall s \in I$ :  $rs \in I$  (иначе говоря,  $RI \subseteq I$ )
- Правым идеалом, если  $\forall r \in R, \forall s \in I$ :  $sr \in I$  (иначе говоря,  $IR \subseteq I$ ).
- Двусторонним идеалом, если она и левый и правый идеал.

// Все примеры живут в конспекте так как в билете они не требуются. Итак он очень большой

**Определение 1.16.**  $R$  — кольцо,  $X \subseteq R$ . Идеалом (левым, правым, двусторонним), порождённым подмножеством  $X$  называется наименьший по включению идеал (левый, правый, двусторонний), содержащий  $X$ .

**Упражнение:** пересечение всех идеалов, содержащих данное множество  $X$  является идеалом, порождённым множеством  $X$ .

**Доказательство.**

Во-первых, пересечение идеалов – идеал. (Идеалы это подгруппы, пересечение подгрупп = подгруппа. Соблюдение свойства идеала проверяется так: возьмем элемент из пересечения, домножим на любое  $r$ . Полученный элемент лежал в обоих идеалах, значит и в пересечении тоже. Успех)

Во вторых, мы получим не меньше чем нужный идеал. Пусть не так. Тогда какие-то 2 идеала пересеклись и мы получили меньше чем нужный идеал. Но в результате пересечения мы получили идеал и он также содержал множество  $X$ . Значит, наименьший идеал не наименьший. Противоречие.

В-третьих, мы получим не больше, так как в пересечении уже лежит искомый идеал.  $\square$

*Замечание.* Для правых идеалов:

$$\bigcap_{\substack{I \supseteq X \\ I - \text{идеал } R}} I = \sum_{x \in X} xR$$

**Определение 1.17.**

- $(X)$  — идеал, порождённый множеством  $X$ , в зависимости от ситуации левый, правый или двусторонний.
- $(a)$  — идеал, порождённый элементом  $a$ , где  $a \in R$ , в зависимости от ситуации левый, правый или двусторонний.
- Идеал, порождённый одним элементом называется *Главным идеалом*.

*Замечание.* Для левых идеалов  $(a) = Ra$ .

**Лемма.** **Подкольцо**, порождённое множеством  $X$ , то есть наименьшее подкольцо, содержащее это множество, состоит из всех сумм из элементов  $\pm x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ , где  $x_i \in X$

**Доказательство.** $\square$

## 2. Билет 2

**Определение 2.1.** Пусть  $R$  — кольцо с 1, введём канонический гомоморфизм  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow R$ :

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \underbrace{1_R + 1_R + \dots + 1_R}_{n \text{ раз}} & n > 0 \\ -\phi(-n) & n < 0 \end{cases}$$

Действительно является гомоморфизмом (следствие дистрибутивности).

**Определение 2.2.** Если канонический гомоморфизм  $\phi$  — инъективен ( $\text{Ker } \phi = \{0\}$ ), то характеристика ноль ( $\text{Char } R := 0$ )

Иначе ядро нетривиально. Но в  $\mathbb{Z}$  любое нетривиальное ядро имеет вид  $n\mathbb{Z}$  (для некоторого  $n \geq 1$ , ибо ядро — это подгруппа), такое  $n$  и называется характеристикой кольца  $R$  ( $\text{Char } R = n$ ).

Любой идеал  $I$  по определению является подгруппой аддитивной подгруппы кольца и задаёт разбиение кольца на смежные классы или классы вычетов по модулю  $I$ , о чём пойдёт речь дальше.

**Определение 2.3.**  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $I$  ( $a \equiv b \pmod{I}$ ), если  $a - b = a + (-b) \in I$ ,

Где  $a, b \in R$ ,  $I$  — идеал  $R$  (левый, правый, или двусторонний).

**Лемма.** Если  $I$  — двусторонний идеал,  $a \equiv a' \pmod{I}$ ,  $b \equiv b' \pmod{I}$ , то

1.  $a + b \equiv a + b' \equiv a' + b' \pmod{I}$ .
2.  $ab \equiv ab' \equiv a'b' \pmod{I}$

**Доказательство.**

1.  $a + b - (a + b') = b - b' \in I \Rightarrow a + b \equiv a + b'$ . Остальное аналогично
2.  $ab - ab' = a(b - b') \in I$ . (так как  $b - b' \in I$ , и  $I$  — идеал) □

**Определение 2.4.** Пусть  $I$  — двусторонний идеал  $R$ .

- Фактор-кольцом по  $I$  называется множество смежных классов в сравнимости по модулю.
- Зададим сложение:  $R/I: (r_1 + I) + (r_2 + I) = r_1 + r_2 + I$ .
- Зададим умножение:  $R/I: (r_1 + I)(r_2 + I) = r_1 r_2 + I$ .
- Проверим дистрибутивность слева:  $(r_1 + I)(r_2 + I + r_3 + I) = (r_1 + I)(r_2 + r_3 + I) = r_1 r_2 + r_1 r_3 + I$ .
- Дистрибутивность справа.  $(r_2 + I + r_3 + I)(r_1 + I) = (r_2 + r_3 + I)(r_1 + I) = r_2 r_1 + r_3 r_1 + I$ .
- **Упражнение:** Доказать корректность (независимость результата сложения и умножения от выбора представителя). План доказательства: Взять 2 класса вычетов, из каждого взять по 2 элемента. Показать (сравнимостью), что неважно, какой из элементов из одного класса мы будем брать, мы всё равно попадем в один класс.

**Пример 1.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  теперь является не только фактор-группой, но и фактор-кольцом.

**Пример 2.**  $K[x]/(f(x))$   
 $K$  — поле,  $f \in K[x]$ .

### 3. Билет 3

**Теорема 3.1** (Теорема о гомоморфизме). Пусть  $f$  — гомоморфизм колец с 1. Тогда

$$A/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f.$$

**Доказательство.** Из теоремы о гомоморфизме групп у нас есть:  $\phi: A/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$

Нужно показать гомоморфизм умножения:  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .

А я тем временем напомню, что в теореме о гомоморфизме у нас было отображение  $\phi: a + I \rightarrow f(a)$ . Проверим, что предлагается проверить.  $\phi((a + I)(b + I)) = \phi(ab + I) = f(ab) = f(a)f(b) = \phi(a + I)\phi(b + I)$

□

**Определение 3.1.** Пусть  $R_1, R_2$  — кольца.

Определим  $R_1 \oplus R_2 = \{(r_1, r_2)\}$ , кольцо.

Зададим сложение:  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$

Зададим умножение:  $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$ .

**Замечание.** Аналогично вводится прямая сумма для большего числа слагаемых.

**Замечание.** Иногда преподаватели алгебры применяют обозначение  $\times$  вместо  $\oplus$  (смотрите далее).

**Замечание.** В данной конструкции много **делителей нуля**.

Действительно, любой элемент вида  $(r, 0)$  или  $(0, r)$  (в случае двух колец) является делителем нуля.

## 4. Билет 4

Здесь и далее в главе  $R$  означает коммутативное кольцо, а  $I, J$  – его идеалы.

**Лемма.**  $I \cap J$  идеал.

**Доказательство.** Доказано выше где-то здесь. (1.16). □

**Определение 4.1.** Определим  $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$  как все возможные суммы.

**Замечание.**  $I + J$  является идеалом, так как:

- $I + J$  несомненно образует подгруппу аддитивной группы кольца.
- $\forall a \in I, b \in J, a + b \in I + J. \forall r \in R, r(a + b) = ra + rb, ra \in I, rb \in J \Rightarrow ra + rb \in I + J$

**Замечание.**  $I + J$  наименьший идеал содержащий  $I$  и  $J$ . Иначе говоря,  $I + J = (I \cup J)$ , то есть идеал порождённый объединением.

**Определение 4.2.** Произведение идеалов  $IJ = (\{ab \mid a \in I, b \in J\})$  – это идеал порождённый всеми попарными произведениями.

**Замечание.**  $IJ \neq \{ab \mid a \in I, b \in J\}$ , так как полученное множество идеалом не является.

$$IJ = \left\{ \sum a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J \right\}. (ra)b, ra \in I$$

**Определение 4.3.** Идеалы  $I, J$  называются взаимно простыми, если  $I + J = R$ .

Здесь и далее все кольца имеют единицу.

**Лемма.** Если  $I, J$  взаимно просты, то  $IJ = I \cap J$

**Доказательство.**

- $IJ \subseteq I \cap J$ .

$\forall r \in IJ: r = \sum_{i=1}^N a_i b_i$ , где  $a_i b_i \in I \cap J$  но это значит, что и их сумма лежит в пересечении.

Мне тут было неочевидно, почему бы вдруг  $a_i b_i \in I \cup J$ . Так вот из определения идеала.  $a_i \in I \Rightarrow a_i b_i \in I$ , (если домножаем на любой элемент и в том числе на  $b_i$  – попадаем в то же кольцо). Аналогично для  $J$  (помним про наличие коммутативности).

- $IJ \supseteq I \cap J$ .

$I$  и  $J$  – взаимно просты  $\Rightarrow I + J = R \ni 1$ .

$\Rightarrow \exists a \in I, b \in J$  такие что  $a + b = 1$  (см 4.1)

$\forall x \in I \cap J: x = x * 1 = x * (a + b) = xa + xb$ .

$xa \in (I \cap J)I, xb \in (I \cap J)J$ . (Ну понятно для обоих произведений.  $I \cup J$  – это меньше, и чем  $I$ , и чем  $J$  и одновременно их подмножества)

$xa + xb \in IJ$ . □

**Замечание.** Обратите внимание, что  $IJ \subseteq I \cap J$  для всех идеалов  $I, J$ , так как в первой части леммы не пользуемся тем, что  $I, J$  – взаимно простые.

**Теорема 4.1.** Пусть  $R$  — коммутативное ассоциативное кольцо с 1, а  $I, J$  — взаимно простые идеалы.

Тогда  $R/IJ \cong R/I \oplus R/J$

*Замечание.* В частном случае мы уже знаем это утверждение, если  $(n, m) = 1$ , то:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

**Доказательство.**  $f: R \rightarrow R/I \oplus R/J$ .

Сопоставим объекту два его класса по модулям  $I, J$ :  $f(r) := (r \bmod I, r \bmod J)$ , где  $r \bmod I = r + I$ .

Каждая проекция является гомоморфизмом, значит  $f$  тоже гомоморфизм.

$$\text{Ker } f = \{r \in R \mid r \in I, r \in J\} = I \cap J = IJ$$

По теореме о гомоморфизме колец (см 3.1) получаем требуемое. Осталось доказать, что полученное — эпиморфизм. Т.к.  $I$  и  $J$  взаимно простые, то  $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$ , тогда  $\forall x, y \in R$   $xb + ya$  — прообраз  $(x + I, y + J)$ .

□

**Лемма.** Пусть  $R$  — ассоциативное коммутативное кольцо с 1.

Если идеал  $I$  взаимно прост с каждым из идеалов  $J_1, \dots, J_k$ , то  $I$  взаимно прост с их произведением  $J_1J_2 \dots J_k$

**Доказательство.**  $R = I + J_1 = I + J_1R = I + J_1(I + J_2) = I + J_1I + J_1J_2 \subset I + J_1J_2$

И, видимо, так как  $I + J_1J_2 \subset R$  как идеал кольца, то в последнем переходе можно поставить равенство.

И так далее до любого конечного  $k$ :

$$R = I + J_1J_2 = I + J_1J_2R = I + J_1J_2(I + J_3) = \dots = I + J_1J_2J_3$$

Здесь мы пользуемся определением идеала (1.15), суммы идеалов (4.1), определением взаимной простоты (4.3). □

## 5. Билет 5

**Теорема 5.1** (Китайская Теорема об Остатках). Пусть  $I_1, I_2, \dots, I_n$  — попарно взаимнопростые идеалы в  $R$ .

$$\text{Тогда } R/I_1 I_2 \dots I_n \cong R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus \dots \oplus R/I_n$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы несложно получить из индукции, предыдущей леммы и теоремы 4.1.

Есть такое. Если неочевидно, то индукция такая:

База: тривиальный фактор. Тогда всё изоморфно само себе, говорить не о чем.

Переход: отщепим любой нетривиальный нужный нам идеал  $I$ , взаимнопростой с оставшимися. По теореме, получим изоморфизм по факторам  $I$  и  $J_1 J_2 \dots$ . Из леммы выше знаем, что если  $I$  взаимнопросто с оставшимися идеалами, то  $I$  и  $J_1 J_2 \dots$  тоже взаимнопросты. Применяем индукцию и радуемся  $\square$

**Замечание.** Если  $R$  — кольцо целых чисел, то теорему можно сформулировать следующим образом:

Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_k$  — попарно взаимнопростые целые числа,  $n := m_1 m_2 \dots m_k$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$

**Теорема 5.2** (Решение систем сравнений в целых числах).

Для любого набора остатков  $r_1 \dots r_k \exists x \in \mathbb{Z}$ , такой что:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv r_k \pmod{m_k} \end{cases} \quad (m_i, m_j) = 1 \text{ для } i \neq j.$$

Причём если  $x$  и  $y$  являются решениями этой системы, то  $x \equiv y \pmod{n}$ .

**Доказательство.**

Определим  $n := m_1 m_2 \dots m_k$ ,  $n_i := n/m_i$ .

Так как  $m_i$  и  $n_i$  взаимнопросты, то  $\exists x_i, y_i \in \mathbb{Z}: m_i x_i + n_i y_i = r_i$

С практической точки зрения их можно найти, например, с помощью алгоритма Евклида.

Заметим, что

- $n_i y_i \equiv r_i \pmod{m_i}$
- $n_i y_i \equiv 0 \pmod{m_j}$  для  $j \neq i$

Первое следует из  $m_i x_i + n_i y_i = r_i$ , второе из  $n_i = n/m_i = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_k$ .

Определим  $x := \sum_{i=1}^k n_i y_i$ .

Тогда  $\forall i: x \equiv n_i y_i \equiv r_i \pmod{m_i}$ .

Вторая часть доказательства проще:

Пусть  $x$  — решение системы.

- Если  $y$  — решение, то  $y - x \equiv 0 \pmod{m_i}$ , значит  $y - x \equiv 0 \pmod{n}$ .

- Если  $y$  таков, что  $y - x \div n$ , то  $y = x + nt$ , подставляем в систему,  $nt$  сокращается.

□

## 6. Билет 6

**Определение 6.1.** Элемент  $b$  делит элемент  $a$  (записывается как  $b \mid a$ ), если  $a = bc$  для некоторого  $c \in R$ .

**Утверждение 6.1.**

- $b \mid a \iff a \in bR \iff aR \subseteq bR$
- $a \in R^* \iff aR = R$

**Доказательство.**

- $a = bc \ c \in R \Rightarrow a \in bR \Rightarrow aR = b(cR) \subseteq bR$  так как  $cR \subseteq R$   
И в обратную:  $aR \subseteq bR \Rightarrow \forall x \in R \exists y \in R : ax = by \Rightarrow a * 1 = a \in bR \Rightarrow \exists c : a = bc \Rightarrow b \mid a$
- $\forall x \in Ra^{-1}x \in R \Rightarrow aa^{-1}x = x \in aR$   
 $\forall x \in R \exists y \in R : x = ay \Rightarrow \exists y : 1 = ay \Rightarrow a$  – обратим.

□

**Определение 6.2.** Пусть  $I$  – идеал, тогда  $I$  простой, если  $\forall a, b \in R : ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$ .

**Определение 6.3.**  $I$  – максимальный, если для любого идеала  $J : I \subsetneq J \subseteq R \implies J = R$ .

**Лемма.** Пусть  $I$  – идеал  $R$ , тогда  $\exists J$  – идеал,  $I \subseteq J \subseteq R$  и  $J$  максимальный.

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $X = \{K \mid K \text{ – идеал в } R, K \supseteq I, K \neq R\}$ , введём на нём частичный порядок включения ( $\subseteq$ ).

Покажем, что любое линейно упорядоченное подмножество  $X$  имеет верхнюю грань.

Пусть  $\{L_i\}$  – произвольное линейно упорядоченное подмножество,  $L := \bigcup L_i$ .

Рассмотрим произвольные  $a, b \in L$ , тогда  $a \in L_i, b \in L_j$  (для некоторых  $i, j$ ).

Но множество линейно упорядоченно, значит одно лежит в другом (совпадение тоже допускается), без потери общности давайте считать, что  $L_i \subseteq L_j$ .

Следовательно  $a, b \in L_j \implies a - b \in L_j \subseteq L$ .

Также  $\forall r \in R : ra \in L_j \subseteq L$ .

Итого мы получаем по определению (1.15), что  $L$  – идеал. Значит любое линейно упорядоченное подмножество  $X$  имеет верхнюю грань, значит (по лемме Цорна) в множестве  $X$  есть максимальный элемент.

Соответственно этот максимальный элемент и является максимальным идеалом. □

**Замечание.**  $R$  – область целостности  $\iff \{0\}$  – простой идеал.

Область целостности  $\iff ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ .

Идеал простой  $\iff ab \in \{0\} \implies a \in \{0\} \vee b \in \{0\}$ .

**Утверждение 6.2.** Пусть  $R$  – коммутативное ассоциативное кольцо с 1,  $I$  – идеал в  $R$ , тогда:

1.  $I$  – простой  $\iff R/I$  – область целостности.
2.  $I$  – максимальный  $\iff R/I$  – поле.
3. Если  $I$  – максимальный, то  $I$  – простой.

**Доказательство.**

“ $\rightarrow$ ”. (!) в  $R/I$  нет делителей нуля.

$$(a + I)(b + I) = I \implies a \in I \vee b \in I.$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

$$\text{“}\leftarrow\text{” } (a + I)(b + I) = I \implies a + I \in I \vee b + I = I \implies a \in I \vee b \in I$$

Тут было написано что-то не очень похожее на правду. Смотрите следствие 9 в конспекте лектора □

Далее  $R$  область целостности

**Утверждение 6.3.** В кольце главных идеалов  $R$  любой ненулевой простой идеал  $I$  является максимальным

**Доказательство.**  $I = pR$ , пусть  $I \subsetneq J \subseteq R$ ,  $J$  — идеал.

$$R \text{ — КГИ} \implies J = qR \quad pR \subseteq qR \subseteq R$$

$$p = qr, pR \text{ — простой} \implies (q \in pR \implies pR = qR) \vee (r \in pR \implies r = ps).$$

$$p = qr = qspp(1 - qs) = 0 \implies q \in R^* \iff qR = R.$$

Если не получилось, страница 32 конспекта лектора, там даже нет слова «очевидно» □

## 7. Билет 7

Пусть  $R$  — область целостности.

**Определение 7.1.**  $a, b \in R$ ,  $a$  и  $b$  ассоциированные, если  $aR = bR$ .

(или, эквивалентно,  $aR \subseteq bR, bR \subseteq aR \iff a|b, b|a$ ).

**Пример 1.** В  $\mathbb{Z}$   $n$  и  $m$  ассоциированы, если  $n = m$  или  $n = -m$ .

**Пример 2.** В  $K[x]$  (где  $K$  — поле)  $f$  и  $g$  ассоциированы, если  $f(x) = cg(x)$ ,  $c \in K[x] \setminus \{0\}$ .

Пусть  $a \sim b$ , если  $a$  ассоциирован с  $b$ .

**Определение 7.2.** Пусть  $a \in R \setminus R^*$ . Элемент  $a$  неприводим, если  $a = bc \implies a \sim b \vee a \sim c$ .

**Определение 7.3.** Пусть  $p \in R \setminus R^*$ . Элемент  $p$  называется простым, если  $p | ab \implies p | a \vee p | b$ .

*Замечание.* Ассоциированность является отношением эквивалентности.

**Лемма.** Пусть  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , тогда:

1.  $a \sim b \iff a = b\varepsilon$ , где  $\varepsilon \in R^*$ .
2.  $a$  — неприводим  $\iff (a = cd \implies c \in R^* \vee d \in R^*)$ .

**Доказательство.**

1. • “ $\implies$ ”

$$a \sim b \iff \begin{cases} b|a \implies a = b\varepsilon \implies a = a\delta\varepsilon \implies a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \implies \delta\varepsilon = 1 \implies \varepsilon \in R^* \\ a|b \implies b = a\delta \end{cases}$$

Пользуемся тем, что мы в области целостности, а также тем, что  $a \neq 0$ .

- “ $\impliedby$ ”

$a$  и  $b$  ассоциированные  $\iff a | b, b | a$ .

$a = b\varepsilon, b = a\varepsilon^{-1}$  (пользуемся коммутативностью, обратимостью  $\varepsilon$ ).

После этого делимость очевидна по определению (см 6.1)

2.  $a = bc \implies (a \sim b \vee a \sim c)$

Пусть б.п.о.  $a \sim b \implies a = b\varepsilon, \varepsilon \in R^* \implies b\varepsilon = bc \implies b(\varepsilon - c) = 0 \implies c = \varepsilon. a = bc$

□

**Определение 7.4.**  $R$  — область целостности.  $R$  — факториально, если любой элемент единственным образом раскладывается в произведение неприводимых.

Единственность вплоть до порядка и ассоциированности:

Если  $\varepsilon p_1 p_2 \dots p_n \sim \Theta q_1 q_2 \dots q_m$  (где  $p_i, q_j$  неприводимы,  $\varepsilon, \Theta \in R^*$ ), то  $n = m$  и  $\exists \sigma \in S_n: p_i \sim q_{\sigma(i)}$

**Теорема 7.1.** Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  факториально.

Доказательство состоит из нескольких лемм:

**Лемма (1).**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, c \in R, c$  — неприводим,  $\neg c|a \implies aR + cR = R$

**Доказательство.**  $R$  — кольцо главных идеалов  $\implies aR + cR = bR \implies c \in bR \implies c = bd$ .

Так как  $c$  неприводим, то  $c \sim b$  или  $b \in R^*$ .

Но  $c \sim b \iff cR = bR$ , но тогда  $a \in bR = cR$ , т.е.  $c|a$ , но это ложь.

$b \in R^* \iff bR = R$ , что мы и хотели. □

**Лемма (2).**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, b, c \in R$ ,  $c$  неприводим.

Тогда  $c|ab \implies c|a \vee c|b$

Иначе говоря,  $cR$  простой:  $ab \in cR \implies a \in cR \vee b \in cR$

**Доказательство.**  $c|ab$ , пусть  $\neg c|a$  и  $\neg c|b$ .

Тогда по предыдущей лемме  $cR + aR = R$  и  $cR + bR = R$ , из чего по какой-то лемме из китайской теоремы об остатках следует, что  $cR$  взаимно прост с  $(aR)(bR) = abR$ .

Итого:  $cR + abR = R$  и  $ab \in cR$ .

Но  $cR + abR = cR$  (так как  $c|ab$ ), следовательно  $cR = R$ , что возможно  $\iff$  обратим.

Но  $c$  неприводим, противоречие. □

**Определение 7.5.** Кольцо  $R$  называется нётеровым, если для любой последовательности идеалов  $I_n$  в  $R$ , такой что  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ , все идеалы начиная с некоторого места совпадают.

**Лемма (3).** Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  нётерово.

**Доказательство.** Так как  $R$  — кольцо главных идеалов, то каждый идеал  $I_k = r_k R$  для некоторого  $r_k$ .

Докажем, что  $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  идеал:

- $a, b \in I \implies a, b \in I_i \implies a - b \in I_i \implies a - b \in I$
- $a \in I \implies a \in I_i \implies \forall r: ra \in I_i \implies \forall r: ra \in I$

(Первое условие гарантирует, что  $I$  — является подгруппой аддитивной группы кольца, хотя это немного не очевидно сходу. Hint:  $a$  может быть равно 0).

Следовательно  $I = qR$ , для некоторого  $q \in R$  (так как мы в кольце главных идеалов).

Следовательно  $\exists n: q \in I_n = r_n R$  (Если  $I = qR$ , то  $q$  лежит в объединении, значит,  $q$  лежит в каком-то идеале начиная с какого-то  $n$ )

$q \in I_{n+1} = r_{n+1} R \implies qR \subseteq I_{n+1}$ , но  $qR \supseteq I_{n+1} \implies qR = I_{n+1}$ . □

## 8. Билет 8

Напомним, что мы доказываем такую теорему:

Если  $R$  — кольцо главных идеалов, то  $R$  факториально.

**Лемма (4).** Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов. Тогда любой ненулевой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых.

**Доказательство.**  $r \in R \setminus R^*, r \neq 0$ .

$rR$  содержится в некотором максимальном идеале  $M$ .

$$M = p_1R, rR \subseteq p_1R \iff r = p_1r_1, r_1 \in R$$

$$p_1R - \text{max} \implies p_1R - \text{простой} \implies (ab : p_1 \implies a : p_1 \vee b : p_1)$$

$$p_1 = ab \implies a \sim p_1 \vee b \sim p_1$$

И из всего этого следует, что  $p_1$  неприводим, т.е.

$$r = p_1r_1, p_1 \text{ неприводим.}$$

Если  $r_1 \in R^*$ , то  $r = p_1r_1$  — искомое разложение. Хз.

Если  $r_1 \notin R^*$ , то  $r_1R \neq R$ , поэтому  $r_1R \subseteq p_2R$  — максимальный.  $r = p_1p_2r_2$ .

И так далее можно продолжать раскладывать.

Либо  $r_k \in R^*$ , тогда успех.

$$r_1 = p_2r_2, r_1R \subseteq r_2R \tag{1}$$

$$r_2 = p_3r_3, r_2R \subseteq r_3R \tag{2}$$

$\implies r_1R \subsetneq r_2R \subsetneq r_3R \dots$ , далее всё хорошо по лемме 3. □

**Лемма (5).** Если:

- $R$  — область целостности.
- $\forall$  неприводимого элемента его идеал прост.
- $\forall$  ненулевого необратимого элемента есть разложение в произведение

То  $R$  — факториально.

**Доказательство.** Достаточно доказать единственность разложения, воспользуемся индукцией по  $\min(n, m)$

$$n = 0, \dots$$

Переход:  $n > 0, p_n$  — неприводим  $\implies p_nR$  — прост.

$\exists l: 1 \leq l \leq m, q_l \in p_nR, q_l \not\sim p_n$ . Объяснение от меня (возможно, есть проще):  $\theta q_1 q_2 \dots q_m = p_n(\epsilon p_1 p_2 \dots p_{n-1}) \in p_nR \implies \theta \in p_nR \vee q_1 q_2 \dots q_m \in p_nR$ . Если из них лежит обратимый, то  $p_nR$  — всё кольцо. Короче,  $q_1 q_2 \dots q_m \in p_nR$  100%. Теперь  $q_1 \in p_nR \vee q_2 \dots q_m \in p_nR$  и так далее... Приходим к тому, что  $\exists q_l \in p_nR$ .

a)  $q_l$  — неприводим,  $q_l = p_n \delta$  (т.к.  $q_l$  в кольце),  $\delta \in R^* \implies q_l \sim p_n$ .

b) Также  $\epsilon p_1 \dots p_n \sim \Theta q_1 \dots q_m$

(a), (b)  $\implies \epsilon p_1 \dots p_{n-1} \sim \Theta q_1 \dots q_{l-1} q_{l+1} \dots q_m$ .

По предположению индукции  $n - 1 = m - 1 \implies n = m$

$\exists$  биекция  $t: \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, l - 1, l + 1, \dots, m\}, p_i \sim q_{t(i)}$ .

$$\sigma \in S_n: \sigma(i) = \begin{cases} t(i) & i \leq n-1 \\ l & i = n \end{cases}$$

□

*Замечание.* Из всего вышесказанного следует теорема о факториальности кольца главных идеалов.

## 9. Билет 9

**Определение 9.1.** Пусть  $R$  — область целостности, назовём  $R$  евклидовым, если  $\exists \nu: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ :

$$\forall a, b \in R \setminus \{0\} :$$

$$1) \nu(ab) \geq \nu(a)$$

$$2) \exists q, r \in R: a = bq + r \text{ и } r = 0 \vee \nu(r) < \nu(b)$$

Функция  $\nu$  называется евклидовой нормой.

**Пример 1.**  $\mathbb{Z}$ ,  $\nu(x) = |x|$ .

**Пример 2.**  $K$  — поле, рассмотрим  $K[x]$ :  $\nu(f) = \deg f$ .

**Пример 3.**  $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ ,  $\nu(a + bi) = a^2 + b^2$

**Пример 4.**  $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$ ,  $\nu(a + bi) = a^2 + b^2 - ab$

**Утверждение 9.1.** Евклидовы кольца  $\subset$  кольца главных идеалов  $\subset$  факториальные  $\subset$  области целостности.

**Доказательство.** Покажем, что  $R$  — евклидово кольцо, то  $R$  — кольцо главных идеалов.

Рассмотрим произвольный нетривиальный идеал  $I$  в  $R$  (если  $I = \{0\}$ , то  $I = 0R$ )

Рассмотрим элемент  $b \in I$  с минимальной нормой:  $\nu(b) = \min_{r \in I} \nu(r)$ , покажем, что  $bR = I$ .

Пусть  $a \in I$ , тогда  $\exists q, r: a = bq + r$ , причём  $r = 0 \vee \nu(r) < \nu(b)$ .

Но  $r = a - bq \in I$ , так как  $a \in I, bq \in I$ .

Так как  $b$  имеет минимальную норму, то  $r = 0$  или  $\nu(r) \geq \nu(b)$ , следовательно  $r = 0$ ,  $a = bq$ .

Так как выбрать  $a$  можно произвольно, получаем, что идеал  $I$  главный ( $I = bR$ ) □

# 10. Билет 10

$R$  — область целостности.

**Определение 10.1.**  $d = \gcd(a, b)$ , если  $d|a$ ,  $d|b$ , и из  $c|a$ ,  $c|b$ , следует  $c|d$ .

*Замечание.*

- $d = \gcd(a, b) \iff dR$  — наименьший главный идеал, содержащий  $a$  и  $b$ . ( $aR + bR$ ).
- $\gcd$  Определён с точностью до ассоциативности.

**Теорема 10.1.**

Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов.

$a, b \in R$ , тогда  $\exists x, y \in R: ax + by = \gcd(a, b)$ .

**Доказательство.**  $R$  — кольцо главных идеалов  $\implies$

$aR + bR = dR$  и  $\gcd(a, b) = d \in dR = aR + bR = \{ax + by \mid x, y \in R\}$ . □

**Определение 10.2.**  $a, b$  — взаимно простые, если у них нет необратимых общих делителей.

**Утверждение 10.2.**  $R$  — кольцо главных идеалов,  $a, b \in R$ . Тогда  $a, b$  — взаимно простые  $\iff aR, bR$  — взаимно простые.

**Доказательство.**  $a, b$  — взаимно простые  $\iff 1 = \gcd(a, b) \iff 1 = ax + by \iff R = aR + bR \iff aR, bR$  — взаимно простые. □

**Определение 10.3.**  $a, b \in R, l = \text{lcm}(a, b)$ , если  $a \mid l$ ,  $b \mid l$ , и если  $a \mid c, b \mid c \implies l \mid c$ .

*Замечание.*  $l = \text{lcm}(a, b) \iff lR$  — наибольший главный идеал, содержащийся в  $aR \cap bR$ .

*Замечание.*  $a \mid b \iff bR \subseteq aR$ .

**Теорема 10.3.**  $a, b$  — кольцо главных идеалов,  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , тогда  $\text{lcm}(a, b) = ab/\gcd(a, b)$ .

При этом последнее равенство верно с точностью до ассоциированности.

**Доказательство.**  $d = \gcd(a, b)$ .

$a = a'd, b = b'd, a', b' \in R$ .

$d = ax + by \implies 1 = a'x + b'y$ , более формально:

$d(1 - a'x - b'y) = 0$ , но  $d \neq 0$  а  $R$  — область целостности, следовательно  $1 - a'x - b'y = 0$ .

$\text{lcm}(a, b)R = aR \cap bR$ . (Т.к. все идеалы главные, а мы ищем максимальный из всех вложенных)

$ab/d = a'b'd$ .

$c \in aR \cap bR$

$c \in bR, ca' \in ba'R, c \in aR, cb' \in ab'R$

$c = c * 1 = ca'x + cb'y \in ba'R + ab'R = a'b'dR$ .

$\text{lcm}(a, b)R = aR \cap bR \subseteq a'b'dR = \frac{ab}{d}R$

“ $\supseteq$ ”,

$$a'b'd = ab' \in aR \tag{3}$$

$$a'b'd = ba' \in bR \tag{4}$$

$a'b'd \in aR \cap bR \implies a'b'dR \subseteq aR \cap bR \implies \text{lcm} = a'b'd = \frac{ab}{d}$  с точностью до ассоциативности. □

# 11. Билет 11

Далее мы требуем Евклидовости кольца.

**Лемма.**  $\forall a, b, c \in R: \gcd(a, b) = \gcd(a - bc, b)$ .

**Доказательство.**  $\gcd(a, b)R \stackrel{?}{=} \gcd(a - bc, b)R$ .

$$\gcd(a, b)R = aR + bR, \gcd(a - bc, b)R = (a - bc)R + bR.$$

$$“\supseteq” \quad a - bc \in aR + bR, b \in aR + bR.$$

$$“\subseteq” \quad b \in bR \subseteq (a - bc)R + bR, a = (a - bc) + bc \in (a - bc)R + bR. \quad \square$$

**Лемма.**  $\gcd(a, 0) = a$

**Замечание.**  $\gcd(a, b)R = aR + bR = (a, b)$ , где последнее означает идеал, порождённый  $a$  и  $b$ .

Поэтому часто наибольший общий делитель обозначают через  $(a, b)$ .

**Алгоритм:**

$a, b \in R, \nu$  — евклидова норма.

$$a = bq_0 + r_0 \quad b = r_0q_1 + r_1$$

...

$$r_i = r_{i+1}q_{i+2} + 0$$

(Если здесь вам стало плохо, в конспекте лектора есть пояснение в словах. Алгоритм Евклида стр. 36)

Утверждается, что  $r_{i+1} = (a, b)$ .

$$r_0 = 0 \vee \nu(r_0) < \nu(b), (a, b) = (a - bq_0, b) = (r_0, b) = (b, r_0)$$

$$r_1 = 0 \vee \nu(r_1) < \nu(r_0), (b, r_0) = (r_0, r_1)$$

Также полезен факт, что мы движемся строго по убыванию евклидовой нормы, откуда понятно, что процесс конечен.

## 12. Билет 12

**Теорема 12.1.** Пусть  $f, g \in K[x]$ ,  $g \neq 0$ . Тогда  $\exists! q, r \in K[x]: f = gq + r$ , где  $\deg r < \deg g$ .

**Доказательство.**

Существование, индукция по степени  $f$

- Если  $\deg f < \deg g$ , то  $r = f, q = 0$ .
- $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ,  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ .  
 $f_1(x) := f(x) - g(x)\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ , здесь мы пользуемся тем, что в поле можно делить на любой ненулевой элемент.  
 $\deg f_1 < n \xrightarrow{\text{по индукции}} \exists q_1, r_1: f_1 = q_1g + r_1, \deg(r_1) < \deg(g)$   
 $f = g\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + f_1 = g\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + gq_1 + r_1 = g\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1\right) + r_1$

Покажем единственность

- Пусть есть разные разложения.
- $f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$ , где  $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[x]$ ,  $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$ .
- $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ , если  $q_1 \neq q_2$ , то степень слева строго больше степени справа. Если  $q_1 = q_2$ , то  $r_1 = r_2$ .
- Противоречие. □

**Утверждение 12.2.** Пусть  $R$  — область целостности.

$$\forall f, g \in R[x], g \neq 0, g = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0, b_k \in R^* \cup \{0\}.$$

Тогда  $\exists q, r \in R[x]: f = gq + r$ , такие что  $\deg r < \deg g$ .

*Замечание.* Обратите внимание, что достаточно обратимости только элемента  $b_k$ , так как мы всегда делим именно на него.

**Доказательство.** Аналогично предыдущему доказательству. Вот вообще аналогично. Я могла бы сделать ctrl-c ctrl-v. □

# 13. Билет 13

**Пример 1.** Рассмотрим  $\mathbb{R}[x]$  (множество многочленов с вещественными коэффициентами).

Примеры его идеалов:

- $\mathbb{R}[x]$
- $\{0\}$
- $I = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\} = x\mathbb{R}[x]$  (свободный коэффициент нулевой, а значит можно поделить на  $x$ , что и записано в последнем равенстве).
- $I = P(x)\mathbb{R}[x]$ , где  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$
- Первые три пункта тоже подходят под последний. На самом деле (факт без доказательства) все идеалы имеют такой вид.

**Пример 2.** Рассмотрим  $\mathbb{Z}[x]$  (множество многочленов с целыми коэффициентами):

- $P(x)\mathbb{Z}[x]$ , где  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$
- Но не все идеалы имеют такой вид, например:  $(x - 3)\mathbb{Z}[x] + 2\mathbb{Z}[x]$ .
- **Упражнение:** понять почему последнее действительно идеал. (Потому что это сумма идеалов)

**Утверждение 13.1.** Если в кольце  $R$  нет делителей нуля, то в  $R[x]$  их тоже нет.

**Доказательство.** Пусть в  $R[x]$  есть делители нуля, иначе говоря

$$(a_t x^t + \dots + a_1)(b_k x^k + \dots + b_1) = 0.$$

Потребуем, что  $a_t \neq 0$  и  $b_k \neq 0$ , т.е. это старшие коэффициенты в соответствующих многочленах.

Заметим, что при степени  $x^{t+k}$  будет коэффициент  $a_t b_k$ . Но так как справа нулевой многочлен, то все коэффициенты произведения равны 0.

То есть  $a_t b_k = 0$ , но в  $R$  нет делителей нуля, противоречие. □

Как мы обсуждали выше,  $K[x]$  является полем, если полем является  $K$ . При чём в этом поле все идеалы имеют вид  $f(x)K[x]$ , обозначим этот идеал как  $I = f(x)K[x] = (f(x))$ . (напомним, что запись в скобках означает идеал, порождённый элементом, см 1.17).

Также мы обсуждали, что многочлены можно делить с остатком:

Для любого  $g(x)$  существуют единственные  $q(x), r(x)$ , такие что  $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$  и  $\deg r < \deg f$

*Замечание.*  $g(x) \equiv r(x) \pmod{I}$ , просто по определению mod (см 2.3).

*Замечание.* Тем самым все многочлены, имеющие одинаковый остаток при делении на какой-то многочлен  $f(x)$  сравнимы друг с другом по модулю.

**Лемма.** Если  $r_1, r_2, f \in K[x]$ ,  $r_1 \equiv r_2 \pmod{(f(x)K[x])}$  и  $\deg r_1, \deg r_2 < \deg f$ , то  $r_1 = r_2$

**Доказательство.**

$$r_1 \equiv r_2 \pmod{f(x)K[x]} \implies r_1 - r_2 = fh \text{ для некоторой функции } h.$$

- Если  $h(x) = 0$ , то  $r_1 = r_2$ .
- Но если  $h(x) \neq 0$ , то  $\deg(fh) \geq \deg(f)$ , но  $\deg(r_1 - r_2) < \deg(f)$ . Противоречие.  $\square$

*Замечание.* Неформально можно думать о факторе  $K[x]/_{f(x)K[x]}$  как о многочленах со степенью меньшей  $f$ .  $K[x]/I \simeq \{r \in K[x] \mid \deg r < \deg f\}$ .

**Лемма.** Пусть  $R$  — область целостности (как частный случай — поле),  $f, g \in R[x]$ ,  $\alpha \in R$

1. Если  $f(\alpha) = 0$ , то  $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ , где  $q(x) \in R[x]$ ,  $\deg q = \deg f - 1$ .
2. Если  $n = \deg f$ , то  $f$  имеет не более  $n$  различных корней в  $R$ .
3. Если  $\deg f = \deg g = n$  и  $f(\alpha_1) = g(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{n+1}) = g(\alpha_{n+1})$ , где  $\alpha_i \in R$  и различны. Тогда многочлены равны (т.е. попарно равны все коэффициенты).

**Доказательство.**

1. Поделим  $f$  на  $x - \alpha$  с остатком:

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r, \quad \deg r < \deg(x - \alpha) = 1 \implies \deg r = 0 \implies r - \text{константа.}$$

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + C.$$

$$f(\alpha) = 0 + C \implies C = 0 \quad (\text{так как } \alpha - \text{корень}).$$

2. Индукция по  $n$ :

**База** ( $n = 1$ ).  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) корней явно не более, чем один. Если  $a$  необратим, то вообще ноль.

**Переход.** Пусть  $f$  имеет корни (иначе  $0 \leq n$ ) и  $\alpha$  — один из них.

$$f(x) = (x - \alpha)q(x), \quad \deg q = n - 1$$

$q$  имеет не более чем  $n - 1$  корень. Конец.

3.  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $\deg h \leq n$ ,  $h(\alpha_i) = 0$  для  $n + 1$  альф.

Но многочлен не может иметь более  $n$  корней, следовательно он нулевой.  $\square$

*Замечание.* Можно считать, что  $\deg 0 = \infty$ , тогда все равенства остаются верными и для этого случая.

*Замечание.* Лемма выше верна только в области целостности

# 14. Билет 14

Краткое содержание предыдущих серий:

- $K[x]$  — поле многочленов.
- $K[x]$  — евклидово с нормой  $\deg$ .
- Многочлены можно делить с остатком.
- Остаток от деления многочлена  $p$  на  $(x - \alpha)$  есть  $p(\alpha)$ .

**Определение 14.1.** Для многочлена  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ :

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

Под  $f^{(k)}(x)$  понимается как производная взятая  $k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$  раз, (причём  $f^{(0)}(x) := f(x)$ ).

*Замечание.* Многочлены и производные мы понимаем как формальное выражение, в частности многочлен это конечная(!) последовательность коэффициентов, записываемая особым образом, а производная — это функция из множества многочленов в его же самого.

**Лемма.** 1.  $(p \pm q)' = p' + q'$

$$2. (pq)' = p'q + pq'$$

$$3. (\alpha p)' = \alpha p'$$

$$4. (p \circ q)' = (p' \circ q)q'$$

*Замечание.* Нужно отметить, что эти утверждения НЕ следуют из соответствующих утверждений математического анализа, например по тому, что здесь производная определяется другим образом.

Более того, если рассмотреть  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , то многочлены  $x^p - x$  и  $0$  — это разные многочлены, хотя если рассмотреть их как функции, то они обе тождественно равны  $0$ .

**Доказательство.**

1.  $(p \pm q)' = (\sum a_i x^i \pm b_i x^i)' = (\sum x^i (a_i \pm b_i))' = \sum i x^{i-1} (a_i \pm b_i) = \sum i x^{i-1} a_i \pm \sum i x^{i-1} b_i = p' + q'$
2.  $(pq)' = (\sum \sum x^{i+j} a_i b_j)' = \sum (\sum x^{i+j} a_i b_j)' = \sum \sum (i+j) x^{i+j-1} a_i b_j = \sum \sum i x^{i-1} x^j a_i b_j + \sum \sum j x^{j-1} x^i a_i b_j = \sum \sum i x^{i-1} x^j a_i b_j + \sum \sum j x^{j-1} x^i a_i b_j = (\sum i x^{i-1} a_i) (\sum x^j b_j) + (\sum j x^{j-1} b_j) (\sum x^i a_i) = p'q + q'p$
3. Можно я скажу, что это очевидно?
4.  $(p \circ q)' = (\sum a_i q^i)' = \sum i a_i q^{i-1} q'$

Доказательство по индукции.  $n = 1$  (длина  $p$ , а так мне лень прописывать суммы)  
 $n - 1 \rightarrow n$ .

$$\begin{aligned} (\sum a_i q^i)' &= (q \sum a_i q^{i-1} + a_0)' = q' \sum a_i q^{i-1} + q (\sum a_i q^{i-1})' \stackrel{\text{предположение}}{=} \\ &= q' \sum a_i q^{i-1} + q q' \sum a_i (i-1) q^{i-2} = q' \sum a_i (q^{i-1} + (i-1) q_{i-1}) = q' \sum a_i i q_{i-1} = q' (p' \circ q) \end{aligned}$$

□

**Лемма (5).**  $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$

**Доказательство.** Оставлено в качестве упражнения. □

# 15. Билет 17

**Лемма.**  $d = \gcd(a, m)$ ,  $|\{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid ax = b\}| = \begin{cases} 0 & \neg d \mid b \\ |d| & d \mid b \end{cases}$

Если  $d \mid b$ , то  $\{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid ax = b\} = \{x_0, x_0 + \frac{m}{d}, x_0 + 2\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}\}$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $\neg d \mid b$ .

Если  $x_0$  — решение,  $ax_0 - b = mk$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$d \mid a, d \mid m, b = ax_0 - mk = da'x_0 - dm'k = d(a'x_0 + m'k) \implies d \mid b$$

2.  $d \mid b$  ( $b = db'$ )

$d = \gcd(a, m) \implies \exists x, y: ax + my = d$  (см в расширенный алгоритм Евклида)

$$ab'x + mb'y = db' = b \implies ab'x = b \pmod{m}$$

$x_0 = b'x$  — решение.

3. а) Если  $x_0$  — решение, то  $x_0 + k\frac{m}{d}$

$$\text{б) Пусть } x_1 \text{ — решение, т.е. } ax_1 \equiv b \pmod{m}, ax_0 \equiv b \pmod{m} \implies a(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{\frac{m}{d}}$$

□

**Замечание.**  $\gcd(a, b) = d = ax + my \implies 1 = \frac{a}{d}x + \frac{m}{d}y \iff \frac{a}{d}, \frac{m}{d}$  — взаимно простые.

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) \div \frac{m}{d}$$

$$x_1 - x_0 \equiv 0 \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$x_1 = x_0 + l\frac{m}{d}.$$

§Диофантовы уравнения в целых числах

**Лемма.**  $d = \gcd(a, b)$

Тогда если  $\neg d \mid c$ , то “ $ax + by = c$ ” неразрешимо в  $\mathbb{Z}$

А если  $d \mid c$ , то “ $ax + by = c$ ” разрешимо и все решения имеют вид:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k, y = y_0 - \frac{a}{d}k, k \in \mathbb{Z}.$$

**Доказательство.** 1) Если  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $ax_0 + by_0 = c$ , то  $d \mid a, d \mid b, d \mid (ax_0 + by_0)$ , т.е.  $d \mid c$ .

2) Если  $d \mid c$ , то  $c = dc'$

$$d = \gcd(a, b) \implies ax + by = d, x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$axc' + byc' = dc' = c \implies x_0 = xc', y_0 = yc'.$$

3) Если  $ax_1 + by_1 = c, ax_0 + by_0 = c \implies a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$ .

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{b}{d}(y_1 - y_0).$$

$$d = (a, b) \implies \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \text{ — взаимно простые.}$$

$$x_1 - x_0 \div \frac{b}{d} \implies x_1 - x_0 = k\frac{b}{d}, y_1 - y_0 = -k\frac{a}{d}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

□

# 16. Билет 18

**Определение 16.1.** Функция Эйлера — это  $\phi(n) :=$  порядок группы  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

*Замечание.* Напоминание, “\*” означает обратимую часть моноида, в данном случае.

**Лемма.** Класс элемента  $m$  обратим в  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$   $\iff \gcd(m, n) = 1$ .

**Доказательство.** Нужно решить  $mx = 1 \pmod{n}$

Это тоже самое, что решать  $mx + tn = 1$ , найти  $m, t$ .

Расширенный алгоритм Евклида вам в помощь. □

**Следствие.**  $\phi(n) =$  количество чисел от 1 до  $n - 1$  взаимнопростые с  $n$

**Следствие.** Если  $p$  — простое, то  $\phi(p) = |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1$

**Лемма.** Пусть  $R$  — кольцо с 1,  $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ .

Тогда  $R^* \cong \times_{i=1}^n R_i^*$

**Доказательство.** У нас уже есть  $R \cong \bigoplus_{i=1}^n R_i$  и соответствующий изоморфизм  $\psi$ .

Заметим, что если  $r \in R^*$ , то ему соответствует кортеж обратимых элементов.

Действительно, обратимый элемент при гомоморфизме переходит в какой-то обратимый  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ .

То есть есть  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , такой что  $(r_1, r_2, \dots, r_n)(t_1, t_2, \dots, t_n) = (1, 1, \dots, 1)$ .

Да, что и требовалось, каждый из  $r_i$  обратим.

Также если у нас есть элемент в  $\times_{i=1}^n R_i^*$ , то ему, очевидно (очевидно, когда знаешь слово изоморфизм), соответствует элемент из  $R^*$  (так как его можно обратить, просто обратив каждую из компонент).

Тем самым  $\psi(R^*) = \times_{i=1}^n R_i^*$  и мы достигли успеха (можно сузить гомоморфизм  $\psi$  на  $R^*$ , при этом он гомоморфизмом и останется). □

**Теорема 16.1.**

1. Если  $\gcd(a, b) = 1$ , то  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
2. Если  $p$  — простое,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$
3. Если  $n = \prod_i p_i^{k_i}$ , то  $\phi(n) = \prod_i p_i^{k_i-1}(p_i - 1) = n \prod_i \frac{p_i-1}{p_i}$

**Доказательство.**

1. По китайской теореме об остатках  $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

Применим лемму,  $(\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$

$$\phi(ab) = |(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*| = \phi(a)\phi(b)$$

2.  $\phi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = p^{k-1}(p - 1)$

Среди всех чисел от 0 до  $p^k - 1$  подойдут все, кроме  $: p$ , а такой у нас ровно каждый  $p$ -тый.

3. Следует из индукции, и первых двух пунктов. □

# 17. Билет 19

**Теорема 17.1** (Эйлера). Если  $\gcd(a, n) = 1$ , то  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

*Замечание (Формулировка в теории групп).* Если  $\gcd(a, n) = 1$ , то  $\bar{a}^{\phi(n)} = 1$  в  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , где  $\bar{a}$  — класс числа  $a$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , по теореме Лагранжа порядок элемента  $x$  делит порядок группы.

Иначе говоря,  $x^s = 1$ , где  $s = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$ , но  $s = \phi(n)$  по определению. □

**Следствие (Малая теорема Ферма).** Если  $p$  — простое, и  $\gcd(a, p) = 1$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

**Теорема 17.2** (Вильсона). Если  $p$  — простое, то  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим поле  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (так как  $p$  — простое, то всё обратимо, см леммы выше).

$$f(x) := x^{p-1} - 1, \quad g(x) := (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)).$$

Заметим, что  $f(x) = g(x) = 0$  для всех  $x \neq 0, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Рассмотрим  $h(x) := f(x) - g(x)$ , моном  $x^{p-1}$  сократится, значит в разности получится многочлен степени  $\leq p-2$ .

Но у него есть  $p-1$  корень  $1, 2, \dots, p-1$ , по вот по [этой лемме](#)

$h(x) = 0$  — нулевой многочлен. Значит  $f(x) = g(x)$  (как многочлены).

Значит  $-1 = f(0) = g(0) = (p-1)! * (-1)^{p-1} = (p-1)!$  □

# 18. Билет 20

**Определение 18.1.** Пусть  $G$  — группа. Экспонентой  $G$  называется минимальное  $d \in \mathbb{N}$ , такое что  $g^d = e$  (для всех  $g \in G$ ).

Если такого  $d$  не существует, то экспонента принимается равной  $\infty$

**Упражнение:** Если  $G$  конечна, то экспонента делит  $|G|$

**Hint:** Осознайте связь экспоненты с порядками элементов, воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

**Лемма.** Пусть  $G$  — группа,  $a, b \in G$ ,  $ab = ba$ ,  $\gcd(\text{ord } a, \text{ord } b) = 1$ .

Тогда  $\text{ord}(ab) = \text{ord}(a) \text{ord}(b)$

**Доказательство.** Пусть  $\text{ord } a = n$ ,  $\text{ord } b = m$ .

Тогда  $(ab)^{mn} = \underbrace{abab \dots ab}_{mn \text{ times}} = a^{mn} b^{mn} = e$ .

Значит  $mn : \text{ord } ab$ .

Пусть  $(ab)^k = e$ . Тогда  $a^k = b^{-k} = t$ , причём  $t \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ .

(Потому что пересечение двух циклических групп будет циклической группой с порядком, являющимся делителем обоих исходных порядков, т.е. пересечение тривиально).

$$\implies a^k = b^k = e \implies m : k, n : k \implies mn : k.$$

Тем самым  $\text{ord } ab = mn$ . □

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная абелева группа, тогда:

1. Экспонента  $G$  — это  $m = \text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g$
2.  $\exists g \in G: \text{ord } g = m$
3.  $G$  — циклическая  $\iff m = |G|$ .

**Доказательство.**

1.  $\forall g \in G: g^m = e \implies m : \text{ord } g$   
 $g^{\text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g} = e \implies \text{lcm}_{g \in G} \text{ord } g : m$

Из двух делимостей следует равенство.

2. Разложим  $m$  на простые:  $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$

Заметим из того, что  $m = \text{lcm}$ , что для любого  $i$  существует хотя бы одно слагаемое порядка кратного  $p_i^{k_i}$ . Потому что если нет, то экспонента была бы меньше.

Соответственно для любого  $i$  существует  $g_i \in G$ , такое что  $\text{ord } g_i = p_i^{k_i}$  (Если неочевидно, что и в какие степени нужно возводить для этого, смотри в конспекте лектора, см. Следствие 13).

По предыдущей лемме и индукции:  $\text{ord } g_1 g_2 \dots g_l = m$ .

3.  $G$  — циклическая  $\implies m = |G|$ . Очевидно, так как порядок порождающего —  $|G|$ , пользуемся первым пунктом.  
 $G$  — циклическая  $\iff m = |G|$ . По предыдущему пункту есть элемент порядка  $|G|$ , он и порождает всю группу. □

## 19. Билет 21

**Теорема 19.1.** Пусть  $R$  — область целостности,  $G \leq R^*$ ,  $G$  — конечна. Тогда  $G$  — циклическая.

**Доказательство.** Пусть  $|G| = m$ . Достаточно показать, что экспонента  $G$  равна  $m$ , остальное следует из предыдущего следствия.

Пусть  $d$  — экспонента  $G$ . Значит для любого  $g \in G$ ,  $g^d = 1$ .

Следовательно все элементы  $G$  — корни многочлена  $x^d - 1$  в  $G[x]$ .

Следовательно, так как у многочлена степени  $d$  не может быть более  $d$  корней, то  $m = |G| \leq d$ . С другой стороны  $m \mid d$ . (см упражнение из начала предыдущего билета)  $\Rightarrow d \leq m$ .

Следовательно  $d = m$ , а группа  $G$  — циклическая.  $\square$

**Замечание.** Зачем нужно требовать целостности? Иначе нельзя сослаться на лемму о том, что не более  $\deg$  корней у многочлена.

**Следствие.** Конечные подгруппы мультипликативной группы поля — циклические.

**Замечание.** Поле действительно является областью целостности:

Если не область целостности, то есть  $x \neq 0, y \neq 0: xy = 0$ .

Рассмотрим  $x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}0$ .

Слева получаем 1, справа — 0.

**Следствие.**  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  — циклическая группа порядка  $p - 1$ .

## 20. Билет 22

**Лемма.**

$$1. x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$2. (a + b)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k a^k b^{l-k}$$

**Доказательство.** Должно быть известно из школьного курса □

**Лемма.** Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \not\equiv 2$ .

$$\text{Тогда } (n + 1)^{n^{m-1}} - 1 \equiv n^m \pmod{n^{m+1}}.$$

**Доказательство.** Индукция по  $m$ :

Не будем доказывать утверждение для  $n = 1$  (в таком случае мы сравниваем два числа по модулю  $1^{m+1} = 1$ , очевидно, корректно, бесполезно).

Если же  $n \neq 1$ , то  $n \geq 3$  (так как  $n \not\equiv 2$ ).

**База ( $m = 1$ )** При подстановке утверждение становится очевидно:  $(n + 1)^1 - 1 \equiv n^1 \pmod{n^2}$ .

**База ( $m = 2$ )** Подставляем:  $(n + 1)^n - 1 \equiv n^2 \pmod{n^3}$

Применим пункт 1 предыдущей леммы (запишем весь хвост разложения в  $n^3 t$ ):

$$(n + 1)^n - 1 = 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + n^3 t - 1 \equiv 1 + n^2 + n^2 * n(n - 1)/2 - 1 \equiv n^2 + n^3(n - 1)/2 \pmod{n^3}$$

Так как  $n$  — нечётно, то  $(n - 1) : 2$ , а  $n^3(n - 1)/2 : n^3$ .

$$\text{Итого, } (n + 1)^n - 1 \equiv n^2 \pmod{n^3}$$

Также здесь мы пользуемся, что  $n \geq 3$ , Чтобы уметь расписывать биномиальную сумму до нужного члена.

**Переход ( $m \rightarrow m + 1$ )** Ans =  $(n + 1)^{n^m} - 1 = ((n + 1)^{n^{m-1}})^n - 1$ .

Применим пункт 2 предыдущей леммы: Ans =  $((n + 1)^{n^{m-1}} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} (n + 1)^{in^{m-1}}$

Так как  $m \geq 2$ , то  $(n + 1)^{in^{m-1}} \equiv 1 \pmod{n^2}$  (так как  $(n + 1)^{n^{m-1}} \equiv 1 + n^m \pmod{n^m} \equiv 1 \pmod{n^2}$  по индукции и т.к.  $m > 1$ ).

Из этого следует, что  $\sum_{i=0}^{n-1} (n + 1)^{in^{m-1}} \equiv n \pmod{n^2}$

По предположению индукции мы знаем, что  $(n + 1)^{n^{m-1}} - 1 \equiv n^m \pmod{n^{m+1}}$

Подставим всё: Ans =  $(n^m + n^{m+1}t)(n + n^2t') \equiv n^{m+1} \pmod{n^{m+2}}$  □

Как написано выше  $|(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = \phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$

**Лемма.** В группе  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^* = \langle d \rangle$ :

$$1. \text{ord}(p + 1) = p^{k-1}$$

2. Пусть  $\langle d \rangle = (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) : *$

Тогда  $\text{ord } d^{p^{k-1}} = p - 1$

3.  $(p + 1)d^{p^{k-1}}$  — первообразный корень по модулю  $p^k$ , т.е:

$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$  — циклическая.

### Доказательство.

1. (по лемме, которую мы только что долго и нудно доказывали)  $n = p, m = k$  (Рассматриваем случай  $p \neq 2$ ).

$$(p + 1)^{p^{k-1}} \equiv 1 + p^k \pmod{p^{k+1}}$$

$$(p + 1)^{p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k} \implies \text{ord}(p + 1) \mid p^{k-1}$$

Если  $\text{ord}(p + 1) < p^{k-1}$ , то  $\text{ord}(p + 1) \mid p^{k-2}$ .

Но по лемме ( $n = p, m = k - 1$ )  $(p + 1)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} \pmod{p^k}$

А теперь мы живем в мире, где  $p = 2$

$|(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*| = \phi(2^k) = 2^{k-1}$ .  $\text{ord } 3 = 2^{k-1}$  = порядку группы т.к. 3 и  $2^{k-1}$  взаимнопросты.

2.  $d \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*, |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = p^{k-1}(p - 1) \implies \text{ord } d \mid p^{k-1}(p - 1) \implies \text{ord } d^{p^{k-1}} \mid p - 1$

Ну раз так то найдем  $l \leq p - 1 : d^{p^{k-1}l} = 1 \pmod{p^k}$

$$d^{p^{k-1}l} \equiv 1 \pmod{p^k} \implies d^{p^{k-1}l} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\implies p^{k-1}l : (p - 1) = \phi(p) \iff p - 1 \geq l : (p - 1) \implies l = p - 1 \implies \text{ord}(d^{p^{k-1}}) = p - 1$$

3.  $\text{ord}((p + 1)d^{p^{k-1}}) =$  (по лемме про взаимнопростые порядки из самого начала 18 билета)  
 $= (p - 1)p^{k-1} = |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*|$

□

Если  $k = 1$ , то  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = \{1\}$ .

Если  $k = 2$ , то  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1, 3\} \cong C_2$ .

**Лемма.** В группе  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ , при  $k \geq 2$ :

1.  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \implies 5^{2^{m-2}} - 1 \equiv 2^m \pmod{2^{m+1}}$

2. В  $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ :

(a)  $\text{ord}(-1) = 2, \text{ord}(5) = 2^{k-2}$

(b)  $\langle -1 \rangle \cap \langle 5 \rangle = \{1\}$

3.  $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^* \simeq C_2 \times C_{2^{k-2}}$ .

**Доказательство. TODO:** Перенести доказательство Андрея сюда.

□

## 21. Билет 23

**Теорема 21.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$  — разложение на простые, причём если  $n \vdots 2$ , то  $p_1 = 2$ .

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z} \text{ — по КТО.}$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \times_i (\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z})^* \text{ — по лемме из 18 билета.}$$

$$(\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z})^* \cong C_{p^{k-1}(p-1)} \text{ при } p \neq 2.$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \begin{cases} C_{p_1^{k_1-1}(p_1-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n \not\vdots 2 \vee n \vdots 4, n \not\vdots 8 \\ C_{p_2^{k_2-1}(p_2-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n \vdots 2, n \not\vdots 4 \\ C_2 \times C_{2^{k_1-2}} \times C_{p_2^{k_2-1}(p_2-1)} \times \dots \times C_{p_l^{k_l-1}(p_l-1)} & n \vdots 8 \end{cases}$$

**Доказательство.** □

**Теорема 21.2.**  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  циклическая  $\iff n = 2, 4, p^k, 2p^k$ , где  $p > 2$  — простое.

**Определение 21.1.**  $G = \langle d \rangle$  — конечная циклическая группа.  $|G| = n$ .

$\text{exp}_d : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$  — изоморфизм, назовём дискретная экспонента.

$$\text{exp}_d : a \mapsto d^a$$

$\text{log}_d = \text{exp}_d^{-1}$  — дискретный логарифм.

**Лемма.** Критерий существования дискретного логарифма.

## 22. Билет 24

**Определение 22.1.** Функция Карлмайка  $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$\lambda$  — экспонента группы  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

$\lambda(n) \mid \phi(n)$ , Пусть  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$

**Теорема 22.1.**

1. Если  $n \neq 8$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1))$
2. Если  $n = 2^k m$ , где  $k \geq 3$ , а  $m \neq 2$ , то  $\lambda(n) = \text{lcm}(\text{lcm}_{1 \leq i \leq l} (p_i^{k_i-1} (p_i - 1)), 2^{k-2})$
3. Если  $\text{gcd}(a, n) = 1$ , то  $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Доказательство.** Его, предположительно, нет. □

### 22.0.1. Тест ферма на простоту

$n$  — простое  $\implies a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  ( $(a, n) = 1, 1 < a < n$ ).

$T \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  — множество тех  $a$ , для которых тест пройден.

1) Если  $n$  — простое, то  $T = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

2)  $|T|/\phi(n)$  —?

Тест Ферма  $T = \{a \mid a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}\}$

**Определение 22.2.** Составные числа  $n$ , такие что  $|T_n| = \phi(n)$  называются псевдо-простыми для данного теста.

**Определение 22.3.** Числа Карлмайкла — псевдопростые числа для теста ферма.

Наименьшее число Карлмайкла — это 561.