Математический анализ

Никифоровская Анна

12 марта 2017 г.

Содержание

Теорема 0.1 (линейность определенного интеграла). $f, g \in C[a,b] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство. F – первообразная f.

G – первообразная g.

$\implies \alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g$.

$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ □

Теорема 0.2 (ф-ла интегрирования по частям). $u, v \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$$

Доказательство. $\int\limits_a^b uv' = uv - \int\limits_a^b u'v$

F – первообразная $u'v \implies uv - -F$ – первообразная uv'.

$\int\limits_a^b uv' = (uv - F)|_a^b = uv|_a^b - F|_a^b = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v$ □

Теорема 0.3 (ф-ла замены переменной). $f \in C < a, b > \quad \varphi :< \alpha, \beta > \to < a, b >$ – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in < \alpha, \beta >$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx$$

Соглашение. С этого места и далее $a > b \quad \int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$

Доказательство. F – первообразная для $f \implies F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx$ □

Пример. $\int\limits_2^3 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \int\limits_2^3 = \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t)\,dt}{1+\varphi^2(t)} = \int\limits_4^9 \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$

Пример. $W_n := \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$

$W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t(\sin t)'\,dt = \cos^{n-1} t \sin t\_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t\,dt = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t\,dt = (n-1)(\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t\,dt - \int \cos^n t\,dt)$

$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$

$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$

$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

Следствие. (Формула Валлиса)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство. $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos^{2n+2} t \leqslant \cos^{2n+1} t \leqslant cos^{2n} t$

Проинтегрируем. Получим $W_{2n+2} \leqslant W2n + 1 \leqslant W_{2n}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$

$\frac{2n+1}{2n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$ □

Следствие. $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство. $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^n 2^n} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ □

Теорема 0.4 (Формула Бейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1} < a, b >$ и $x, x_0 \in < a, b >$. Тогда

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$

Доказательство. Индукция по n.

База $n = 0$.

$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$ – формула Ньютона-Лейбница для f'.

Индукционный переход. $n \to n+1$

$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt = -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1})'\, dt = -\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)((x-t)^{n+1})'\, dt = -\frac{1}{(n+1)!}(f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n+1)}\, dt) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\, dt$ □

Пример. $H_j = \frac{1}{j!}\int_0^{\pi/2}((\frac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x\, dx$

1. $H_j > 0 \quad H_j \leqslant \frac{1}{j!}(\frac{\pi}{2})^{2j}$

..

4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

Теорема 0.5 (Теорема Ламберта)**.** π и π^2 – иррациональны.

0.1. §Интегральные суммы

***Определение* 0.1.** $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E \quad |\, x - y\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$

Замечание. Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

***Определение* 0.2.** $f : E \to \mathbb{R}$ липшицева (с константой M), если $\forall x, y \in E \implies |\, f(x) - f(y)\,| \leqslant M\,|\, x - y\,|$

Замечание. Липшицевость $\implies$ равномерная непрерывность.

$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

Пример. $\sin, \cos \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – равномерно непрерывны.

Пример. $f(x) = x^2 \ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не равномерно непрерывна.

Доказательство. $\varepsilon := 1$ Возьмем $x, y \ \ |\, x - y\,| < \delta$, например, x и $y = x + \frac{\delta}{2}$

$1 < |\, f(x) - f(y)\,| = |\, x^2 - (x + \delta/2)^2\,| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при $x > \frac{1}{\delta}$ □

Теорема 0.6 (Теорема Кантора)**.** $f \in C[a, b] \implies f$ – равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного.

$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x, y \in [a, b] \ \ |\, x - y\,| < \delta \ \ |\, f(x) - f(y)\,| \geqslant \varepsilon$

Возьмем это ε и зафиксируем.

$\delta := \frac{1}{n} \ \ \exists x_n, y_n \in [a, b] \ \ |\, x_n - y_n\,| < \frac{1}{n} \ \ |\, f(x_n) - f(y_n)\,| \geqslant \varepsilon$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$c := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a, b]$

$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \to c$

$\implies \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} = c.$

Эта функция непрерывна в точке c.

$\implies \lim f(x_{n_k}) = f(\lim x_{n_k}) = f(c)$

$\lim f(y_{n_k}) = f(\lim y_{n_k}) = f(c)$

$0 \longleftarrow |\, f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\,| \geqslant \varepsilon$ □

***Определение* 0.3.** $f : E \to \mathbb{R})$

$w_f(\delta) := \sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in E \ \ |\, x - y\,| \leqslant \delta\}$

– модуль непрерывности функции f.

Свойства.

1. $w_f(0) = 0$
2. w_f строго монотонно возрастает.
3. $w_f \geqslant 0$
4. Если f – липшицева функция с константой M, то $w_f(\delta) \leqslant M\delta$

   Доказательство. $|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant M\,|\, x - y\,| \leqslant M\delta$, если $|\, x - y\,| \leqslant \delta$ □

5. $|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant w_f(|\, x - y\,|)$
6. f – равномерно непрерывна $\iff w_f$ – непрерывна в нуле. $(\lim\limits_{\delta \to 0+} w_f(\delta) = 0)$

   Доказательство. "$\implies$"

   $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in E \ \ |\, x - y\,| \leqslant \delta \implies |\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$

   Если $|\, x - y\,| \leqslant \frac{\delta}{2}$, то $|\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$.

   Тогда $w_f(\delta/2) = \sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in E \ \ |\, x - y\,| \leqslant \delta/2\} \leqslant \varepsilon$

   $w_f(\delta/2) \leqslant \varepsilon$

   $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall 0 < \alpha < \delta/2 \ \ w_f(\alpha) \leqslant \varepsilon$

– это определение предела $\lim\limits_{\alpha\to 0+} w_f(\alpha) = 0$.

"$\Longleftarrow$"

Пусть $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ w_f(\delta) < \varepsilon$

Если $|\,x - y\,| \leqslant \delta$, то $|\,f(x) - f(y)\,| \leqslant w_f(\delta) < \varepsilon$ □

7. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

   Доказательство. $f \in C[a, b] \iff f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \iff$ (по свойству 6) $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$. □

***Определение* 0.4.** Дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$ – это такой набор точек, что

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$

Мелкость(ранг) дробления – это $\max\limits_{k=1,2,\dots,n}(x_k - x_{k-1})$

$|\,\tau\,|$ – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и оснащенное дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема 0.7 (об интегральных суммах)**.** $f \in C[a, b]$

Тогда $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leqslant (b - a) w_f(|\,\tau\,|)$

Доказательство. $\Delta := \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt)$

$|\,\Delta\,| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt \right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f(t) - f(\xi_k)\,|\, dt \leqslant$

$|\,t - \xi_k\,| \leqslant |\,x_k - x_{k-1}\,| \leqslant |\,\tau\,|$

$\implies |\,f(t) - f(\xi_k)\,| \leqslant w_f(|\,\tau\,|)$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\,\tau\,|)\, dt = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) w_f(|\,\tau\,|)\, dt = (b - a) w_f(|\,\tau\,|)$ □

Следствие. 1. $f \in C[a, b]$. Тогда

   $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и любого его оснащения $\xi \implies \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \sigma) \right| < \varepsilon$

2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений τ_n, для которой $|\,\tau_n\,| \to 0$ и любой последовательности их оснащений ξ_n

   $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$

Пример. $1^p + 2^p + 3^p + ...^p_n =: S_p(n)$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2}(\frac{n}{p})^p < S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^p =$

Введем интегральную сумму...

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^p$

$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$

Мелкость этих дроблений $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \to \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$

***Определение* 0.5.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall$ дробления τ и мелкости $< \delta$ и любого его оснащения $\xi \implies |\, I - S(f, \tau, \xi)\,| < \varepsilon$

Тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$

I – это её интеграл Римана.

Теорема 0.8 (оценка погрешности в ф-ле трапеций). $\left| \int_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |\, f''\,|$

В частности, если дробления не равные отрезки

$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n}(\frac{f(x_0)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |\, f''\,|$

Лемма. $\int_\alpha^\beta f - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)\,dt$

Доказательство. леммы.

$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})'\,dt = f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})\,dt = f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2} - \int_\alpha^\beta f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\int_\alpha^\beta f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))'\,dt = \frac{1}{2}f'(t)(t - \alpha)(\beta - t)|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)\,dt$ □

Доказательство. теоремы.

$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})) = -\frac{1}{2} \sum \int f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)\,dt$

$\Delta \leqslant \frac{1}{2} \sum \int |\, f''(t)\,|\,(t - x_{k-1})(x_k - t)\,dt \leqslant \frac{1}{2} \sum \int |\, f''(t)\,|\,\frac{|\tau|^2}{4}\,dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |\, f''\,|$

□

Теорема 0.9 (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай). $f \in C^2[m, n]$ $m, n \in \mathbb{Z}$

$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\})\,dt$

Доказательство. $n = m + 1$

$f(m) + f(m + 1) = \frac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\})\,dt$

$f(m) = \frac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\})\,dt$

Суммируем от m до $n - 1$.

$\sum_{k=m}^{m+1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\})\,dt$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(m) = ...$

Надо доказать ф-лу:

$\frac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int_m^{m+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_m^{m+1} f''(t)(t-m)(m+1-t)\,dt$

А это в точности лемма, которая уже была. □

Пример. 1. $S_p(n) = 1^p + 2^p + ... + n^p$

$f(t) = t^p \;\; f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n + \frac{p(p-1)}{2}\int_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{p+1}) + \int_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Если $p \in (-1, 1)$, то $\int_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant C$.

Действительно.

$\int_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{p-1} \leqslant \frac{1}{1-p}$

И получили, что

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

Если $p > 1$:

$\int_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$

$\implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$

2. Гармонические числа. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

$f(t) = \frac{1}{t} \;\; f''(t) = \frac{2}{t^3} \;\; m = 1$

$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int_1^n \frac{1}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$

Последовательность a_n монотонно возрастает.

$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\,dt \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{2}$

$\implies a_n$ имеет предел $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Получаем, что:

$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + a + o(1) = \ln n + (\frac{1}{2} + a) + o(1)$

$\frac{1}{2} + a =: \gamma$ – постоянная Эйлера.

$\gamma \approx 0,58...$

3. Формула Стирлинга.

$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$.

$f(t) = \ln t \;\; f''(t) = -\frac{1}{t^2} \;\; m = 1$

$\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t\,dt - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt$

$\int_1^n \ln t\,dt = t\ln t|_1^n - \int_1^n t(\ln t)'\,dt = n\ln n - n + 1$

$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$

b_n монотонно возрастают.

$b_n = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t})|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant 1$

$\implies$ у b_n есть предел b.

$b_n = b + o(1)$

$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln}{2} + 1 + b + o(1)$

$n! = \exp(n\ln n - n + \frac{\ln}{2} + 1 - b + o(1)) = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}e^{o(1)} = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}(1+o(1)) \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{1-b}$

Хотим понять, что такое $e^{1-b} = c$.

$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2nc}}{(n^n e^{-n}\sqrt{nc})^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2nc}}{\sqrt{n}^2 c^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}$

$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}$

$\implies c = \sqrt{2\pi}$

Итого формула Стирлинга:

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

0.2. §5. Несобственные интегралы

***Определение* 0.6.** $-\infty < a < b \leqslant +\infty$

$f \in C[a, b)$

$\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int_a^b := \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$-\infty \leqslant a < b < +\infty$

$f \in C(a, b]$

$\lim\limits_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int_a^b := \lim\limits_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

Замечание. Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового.

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$

$\left|\int_a^b f - \int_a^c f\right| = \left|\int_c^b f\right| \leqslant \int_c^b |\,f\,| \leqslant \int_c^b M = M(b-c) \to 0$ при $c \to b-$

Теорема 0.10 (Критерий Коши сходимости интегралов)**.** $f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

$\int_a^b f$ сходится $\iff \quad \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\tilde{b} \in (a, b): \;\; \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \;\; \left|\int_c^d f\right| < \varepsilon$

Доказательство. "$\implies$"

$\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c = \int_a^b f$ – конечен/

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 : c \in (b-\delta, b) \;\; \left|\int_a^c f - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

Аналогично получаем для $d \in (b-\delta, b) \;\; \left|\int_a^d f - \int_a^b f\right| < \varepsilon$

$\left|\int_a^c f - \int_a^d f\right| \leqslant \left|\int_a^c f - \int_a^b f\right| + \left|\int_a^b f - \int_a^d f\right| < 2\varepsilon$

"$\impliedby$"

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

$\forall\varepsilon > 0 \exists\tilde{b} \in (a, b) \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |\,F(c) - F(d)\,| < \varepsilon$

$\tilde{b} = b - \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |\, F(c) - F(d)\,| < \varepsilon$

Это критерий Коши для $\lim\limits_{c \to b-} F(c)$. □

Следствие. $f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b$

и $\int_{c_n}^{d_n} f \not\to 0$, то $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство. От противного. Пусть $\int_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int_{c_n}^{d_n} f \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \to b \implies \exists N \ \ \forall n > N \ \ c_n, d_n > \tilde{b}$

$\implies \left| \int_{c_n}^{d_n} \right| < \varepsilon.$

Значит, $\int_{c_n}^{d_n} f \to 0$, что противоречит условию. □

Замечание. $f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F.

$\int_a^c f = F(c) - F(a)$

Существование $\int_a^b f$ – существование $\lim\limits_{c\to b-} (F(c) - F(a)) = \lim\limits_{c\to b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b(слева)

Соглашение. Если F не определена в точке b, считать, что

$F|_a^b := \lim\limits_{c\to b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int_a^b f$ существует, то $\int_a^b f = F|_a^b$

Пример. 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \frac{-1}{p-1}\Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim\limits_{c\to+\infty} \ln x|_1^c & p = 1 \end{cases}$

$p = 1$

$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \to +\infty$

Тогда интеграл расходится.

Если $p \neq 1$

$\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \to \frac{1}{p-1}$, если $p > 1$

Если же $p < 1$, то $\to +\infty$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p}$

$p = 1$

$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x|_c^1 = -\ln c = +\infty$

Значит, интеграл расходится.

Если же $p \neq 1$

$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p}|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$
Если $p > 1 \implies \to +\infty$

Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

Свойства. $f \in C[a,b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

1. Аддитивность.
   $\int_a^b f$ сходится $\implies \forall c\ in(a,b) \quad \int_c^b f$ сходится.

   Доказательство. $\int_a^b f$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{B\to b-} \int_a^B f =: \int_a^b f$

   $\int_a^B = \int_a^c + \int_c^B \implies \lim\limits_{B\to b-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim\limits_{B\to b-} \int_c^B f$

   Вот и получили, что $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

2. $\int_a^b f$ сходится $\implies \int_c^b f \to 0$ при $c \to b-$.
   $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
   $\int_c^b f = \int_a^b - \int_a^c f$
   $\implies \lim\limits_{c\to b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$

3. Линейность. $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся $\implies \int_a^b(\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.
   И $\int_a^b(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

   Доказательство. $\int_a^B(\alpha f + \beta g) = \alpha \in_a^B f + \beta \int_a^B g$ при $B \to b-$
   $\implies$ предел конечен и
   $\int_a^b(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ □

Замечание. $\int_a^b f$ сходится $\int_a^b g$ расходится $\implies \int_a^b(f \pm g)$ расходится.
Доказательство – от противного.

Свойства продолжение. 4. Монотонность $f, g \in C[a,b) \quad f \leqslant g \implies \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

   Доказательство. $c \in [a,b) \implies f, g \in C[a,c]$
   $\int_a^c f \leqslant \int_a^c g$
   Переходим к пределу в неравенстве. $c \to b-$
   $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

   □

5. Интегрирование по частям.

   $$f, g \in C^1[a,b) \implies \int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

   (Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

Доказательство. $c \in [a,b)$ $f, g \in C^1[a,c]$

$\int_a^c fg' = fg|_a^c - \int_a^c f'g$

Теперь напишем предел $c \to b-$

$\implies \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c fg' = \lim\limits_{c\to b-} (fg|_a^c - \int_a^c f'g) = \lim\limits_{c\to b-} fg|_a^c - \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f'g$

$\square$

6. Замена переменной.

   $f \in C[a,b)$ $\varphi : [a,\beta) \to [a,b)$ и φ непрерывна и дифференцируема. $c := \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \varphi(\gamma)$

   Тогда $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

   (Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

   Доказательство. $F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\,dx \quad y \in [a,b)$

   $\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \gamma \in [\alpha,\beta)$

   $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

   Если существует предел в правой части. Т.е. $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$

   Тогда $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx = \lim y \to c- F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim y \to c- F(y) - \Phi(\alpha)$

   $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

   Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

   $\lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} F(\varphi(\gamma))$

   $a \leqslant \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a,b]$

   Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

   Если $c = b$, то предел тоже существует.

   (В силу непрерывности)

   Теперь надо понять, что $\lim\limits_{y\to c-} F(y) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} F(\varphi(\gamma))$ Возьмем $\gamma_n \to \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to b$ оба стремятся слева

   $F(c_n) \to \lim\limits_{y\to c} F(y)$

   $F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$

   Случай второй. Существует $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

   Т.е. существует $\lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$

   Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$ существует и мы попали в первый случай.

   Поэтому $c = b$.

   Возьмем последовательность $\gamma_n \to \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \to b$

   Пусть $y_n \to b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

   Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha,\beta)$ $\varphi(\delta_n) = y_n$.

   $\varphi(\alpha) \leqslant y_n \leqslant \varphi(\gamma_m)$

   $\implies$ по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \to \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta-\varepsilon] \to [a, b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k}) \leqslant \varphi(p) < b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \to b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Замечание. $f \in C[a, b)$

$\int_a^b f(x)\,dx$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b)$

Интересуемся сходимостью $\int_a^b f(x)\,dx$

Теорема 0.11. $f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b) \;\; F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$

Сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности F.

Доказательство. $F(y_2) - F(y_1) = \int_a^{y_2} f - \int_a^{y_1} f = \int_{y_1}^{y_2} f \geqslant 0$

$\implies F$ монотонно возрастает.

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{y\to b} F(y) - F(a)$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. □

Следствие. 1. $0 \leqslant f \leqslant g \;\; f, g \in C[a, b)$

Если $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится.

Если $\int_a^b f$ расходится, то и $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство. $F(y) := \int_a^y f \;\; G(y) := \int_a^y g$

$F \leqslant G$ на $[a, b)$ (по монотонности интеграла)

$\int_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху.

$\implies F$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена $\implies \int_a^b f$ сходится.

(Второй пункт – переформулировка) □

2. $f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \quad \varepsilon > 0$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f$ – сходится.

Доказательство. $f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} g$ сходится.

$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится. □

Замечание. Неравенства $f \leqslant g$ или $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ могут выполняться лишь при достаточно больших x.

(Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

3. $f, g \geqslant 0$ $f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

   Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково.

   (или оба сходятся, или оба расходятся)

   Доказательство. $f = \varphi g$, где $\varphi(x) \to 1$, при $x \to b-$.

   $\implies$ при $x \geqslant c$ $\frac{1}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant 2$

   $\implies \frac{g}{2} \leqslant f = \varphi g \leqslant 2g$ при $x \geqslant c$

   $\implies$ если $\int_c^b g$ сходится, то $\int_c^b f$ сходится. (и наоборот) □

Замечание. $f \geqslant 0$ $f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$.

Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

***Определение* 0.7.** Абсолютная сходимость.

$f \in C[a, b)$

$\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |\, f \,|$ – сходится.

Теорема 0.12. Если $\int$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. $F(c) = \int_a^c f = \int_a^c f_+ - \int_a^c f_-$

$\Phi(c) = \int_a^c |\, f \,| = \int_a^c f_+ + \int_a^c f_-$

$\int_a^c f_+ =: F_1(c)$

$\int_a^c f_- =: F_2(c)$

Знаем, что $\varphi(c)$ сходится. Значит, Φ ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2,\ F_1 \geqslant 0\ F_2 \geqslant 0 \implies F_1$ и f_2 ограничены.

$\implies \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ сходятся $\implies \int_a^b f$ сходится по линейности. □

Следствие. $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |\, f \,|$, если $\int_a^b f$ абсолютно сходится.

Доказательство. $-|\, f \,| \leqslant f \leqslant |\, f \,|$

и монотонность интеграла □

Теорема 0.13 (признак Дирихле)**.** $f, g \in C[a, +\infty)$

1) $\exists K :\ \left| \int_a^y f \right| \leqslant K$ при всех y.

2) g монотонна.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство. Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$

$F(y) := \int_a^y f$

$\int_a^f g = Fg|_a^y - \int_a^y Fg'$

Посмотрим на $F(y)g(y)$.

$|\, F(y)g(y)\,| \leqslant K\,|\,g(y)\,| \to 0.$

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что $\int_a^{+\infty} Fg'$ сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть g монотонно возрастает.

$\int_a^{+\infty} |\, Fg'\,|$

$|\, Fg'\,| = |\, f\,|\, g' \leqslant Kg'.$

Т.е. надо понять, что $\int_a^{+\infty} Kg'$ сходится.

$\int_a^y Kg' = K(g(y)) - K(g(a) \to -Kg(a)$ □