

# Математический анализ

Никифоровская Анна

18 июня 2017 г.

## Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.</b>            | <b>1</b>  |
| 1.1 §3. Свойства определенного интеграла . . . . .                           | 1         |
| 1.2 §4. Интегральные суммы . . . . .   | 4         |
| 1.3 §5. Несобственные интегралы . . . . .                                    | 10        |
| 1.3.1 Несобственные интегралы от неотрицательных функций. . . . .            | 15        |
| 1.3.2 Несобственные интегралы от знакопеременных функций. . . . .            | 17        |
| <b>2. 6. Метрические и нормированные пространства</b>                        | <b>21</b> |
| 2.1 §1. Открытые и замкнутые множества . . . . .                             | 21        |
| 2.2 §2. Компактность . . . . .   | 32        |
| 2.3 §3. Непрерывные функции . . . . .  | 38        |
| 2.4 §4. Линейные операторы . . . . .   | 43        |
| 2.5 §5. Длина кривой . . . . .   | 47        |
| <b>3. 7. Ряды</b>  | <b>54</b> |
| 3.1 §0. Расширенное напоминание . . . . .                                    | 54        |
| 3.2 §1. Знакопостоянные ряды . . . . .                                       | 55        |
| 3.3 §2. Знакопеременные ряды . . . . .                                       | 60        |
| 3.4 §3. Бесконечные произведения . . . . .                                   | 67        |
| 3.5 §4. Функциональные последовательности и ряды. . . . .                    | 69        |
| 3.6 §5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов . . . . . | 76        |
| 3.7 §6. Степенные ряды . . . . .   | 79        |
| 3.7.1 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора . . . . .               | 84        |
| <b>4. 8. Функции многих переменных</b>                                       | <b>87</b> |
| 4.1 §1. Дифференцируемость отображений . . . . .                             | 87        |
| 4.2 §2. Непрерывная дифференцируемость . . . . .                             | 92        |
| 4.3 §3. Частные производные высших порядков. . . . .                         | 93        |

# 1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.

## 1.1. §3. Свойства определенного интеграла

**Теорема 1.1** (линейность определенного интеграла).

$f, g \in C[a, b]$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство.**

$F$  – первообразная  $f$ .

$G$  – первообразная  $g$ .

$\implies \alpha F + \beta G$  – первообразная  $\alpha f + \beta g$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= (\alpha F + \beta G) \Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \\ &= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 1.2** (ф-ла интегрирования по частям).

$u, v \in C^1[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

**Доказательство.**

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$F$  – первообразная  $u'v \implies (uv - F)$  – первообразная  $uv'$ . (Проверка дифференцированием:  $(uv - F)' = u'v + uv' - u'v = uv'$ )

$$\int_a^b uv' = (uv - F) \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - F \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v \quad \square$$

**Теорема 1.3** (ф-ла замены переменной).

$f \in C \langle a, b \rangle$   $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx$$

Соглашение. С этого места и далее  $a > b$   $\int_a^b f := - \int_b^a f$

**Доказательство.**

$F$  – первообразная для  $f \implies F(\varphi(t))$  – первообразная для  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx \quad \square$$

**Пример.**

$$\int_2^3 \frac{t dt}{1+t^4} = \left[ \begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t) dt}{1+\varphi^2(t)} = \int_4^9 \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$$

**Пример.**

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t (\sin t)' dt = \cos^{n-1} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t dt =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t dt = (n-1) \left( \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \right)$$

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

**Следствие (Формула Валлиса).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Доказательство.**

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos^{2n+2} t \leq \cos^{2n+1} t \leq \cos^{2n} t$$

Проинтегрируем. Получим  $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2}$$

И левая, и правая часть стремятся к  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда по непрерывности  $\sqrt{\cdot}$ , получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \square$$

**Следствие.**

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

**Доказательство.**

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \square$$

**Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).**

$f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle$  и  $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

**Доказательство.**

Индукция по  $n$ .

База  $n = 0$ .

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt - \text{формула Ньютона-Лейбница для } f'.$$

Индукционный переход.  $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \left( \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right)' dt = -\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) ((x-t)^{n+1})' dt = \\ & = -\frac{1}{(n+1)!} \left( (f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \right) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

На самом деле уже получили то, что надо.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned} \quad \square$$

**Лемма** (в помощь Ламберту).

$$H_j = \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

$$1. H_j > 0 \quad H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^j \cos x dx = \frac{1}{j!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j}$$

$$2. \text{ При любом } c > 0 \quad c^j H_j \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty$$

**Доказательство.**

$$0 < c^j H_j \leq \frac{1}{j!} \left( \frac{\pi^2 c}{4} \right)^j \rightarrow 0.$$

(Некогда уже доказывали, что  $\frac{c^j}{j!} \rightarrow 0$ ) □

$$3. H_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right) \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x)' dx = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)' dx = -2 \left( x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = 2 \end{aligned}$$

$$4. H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} j! H_j &= \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx = \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2j \int_0^{\pi/2} x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx = \\ &= -2j \int_0^{\pi/2} x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (\cos x)' dx = -2j \left( x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx + \right. \\ &+ \left. 2(j-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = 2j(2j-1) \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \\ &- 2j \cdot 2(j-1) \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - j(j-1)\pi^2(j-2)! H_{j-2} \end{aligned}$$

$$\implies H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

В доказательстве в определенный момент воспользовались идеей  $x^2 = -((\frac{\pi}{2})^2 - x^2) + (\frac{\pi}{2})^2$   $\square$

5. Существует такой многочлен  $P_j$  степени не выше  $j$  с целыми коэффициентами, что  $H_j = P_j(\pi^2)$

**Доказательство.**

Будем доказывать по индукции.

База.  $j = 0, j = 1$

$H_0 = 1, H_1 = 2$  – многочлены степени 0 с целыми коэффициентами.

Индукционный переход.

$j - 1, j - 2 \rightarrow j$

$$H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2} = (4j - 2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2)$$

Скажем тогда, что  $P_j(x) = (4j - 2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x)$   $\square$

**Теорема 1.5** (Теорема Ламберта).

$\pi$  и  $\pi^2$  – иррациональны.

**Доказательство.**

Пусть  $\pi^2 = \frac{m}{n}$ . Тогда

$$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое}}{n^j}$$

$\implies n^j H_j$  – целое и положительное число.

$\implies 1 \leq n^j H_j \rightarrow 0$ . (стремится к нулю по одному из пунктов предыдущей леммы)

Противоречие. Значит,  $\pi^2$  число иррациональное.

Тогда и число  $\pi$  иррациональное.  $\square$

## 1.2. §4. Интегральные суммы

**Определение 1.1.**

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**Замечание.**

Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

**Определение 1.2.**

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  липшицева (с константой  $M$ ), если  $\forall x, y \in E \implies |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

**Замечание.**

Липшицевость  $\implies$  равномерная непрерывность.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

**Пример.**

$\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – равномерно непрерывны.

**Пример.**

$f(x) = x^2$   $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не равномерно непрерывна.

**Доказательство.**

$\varepsilon := 1$  Возьмем  $x, y$   $|x - y| < \delta$ , например,  $x$  и  $y = x + \frac{\delta}{2}$

$$1 > |f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \delta/2)^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при  $x > \frac{1}{\delta}$  □

**Теорема 1.6** (Теорема Кантора).

$f \in C[a, b] \implies f$  – равномерно непрерывна.

**Доказательство.**

От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Возьмем это  $\varepsilon$  и зафиксируем.

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, y_n \in [a, b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists x_{n_k}$  – сходящаяся подпоследовательность.

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$$

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow c$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c.$$

Эта функция непрерывна в точке  $c$ .

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(c)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}) = f(c)$$

$$0 \leftarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$$

Получили противоречие – константа стремиться к нулю не может. □

**Определение 1.3.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \delta\}$$

– модуль непрерывности функции  $f$ .

**Свойства.**

1.  $w_f(0) = 0$
2.  $w_f$  монотонно возрастает.
3.  $w_f \geq 0$
4. Если  $f$  – липшицева функция с константой  $M$ , то  $w_f(\delta) \leq M\delta$

**Доказательство.**

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M\delta, \text{ если } |x - y| \leq \delta \quad \square$$

$$5. |f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|)$$

$$6. f \text{ – равномерно непрерывна} \iff w_f \text{ – непрерывна в нуле. } \left( \lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0 \right)$$

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Если  $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$ , то  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

$$\text{Тогда } w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\} \leq \varepsilon$$

$$w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon$$

Т.е. сейчас получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < \alpha < \frac{\delta}{2} \quad w_f(\alpha) \leq \varepsilon$$

– это определение предела  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} w_f(\alpha) = 0$ .

“ $\impliedby$ ”

Пусть  $w_f(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0+$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad w_f(\delta) < \varepsilon$$

Если  $|x - y| \leq \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| \leq w_f(\delta) < \varepsilon$  □

7.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0+$ .

**Доказательство.**

$f \in C[a, b] \iff f$  равномерно непрерывна на  $[a, b] \iff$  (по свойству 6)  $w_f(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0+$ . □

**Определение 1.4.**

Дробление (разбиение, пунктир) отрезка  $[a, b]$  – это такой набор точек, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Мелкость(ранг) дробления – это  $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$

$|\tau|$  – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и оснащенное дробление  $(\tau, \xi)$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

**Теорема 1.7** (об интегральных суммах).

$$f \in C[a, b]$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)w_f(|\tau|)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) \right) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right) \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |t - \xi_k| &\leq |x_k - x_{k-1}| \leq |\tau| \\
 \implies |f(t) - f(\xi_k)| &\leq w_f(|\tau|) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\tau|) dt = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) w_f(|\tau|) = (b-a) w_f(|\tau|)
 \end{aligned}$$

□

**Следствие.**

1.  $f \in C[a, b]$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ дробления } \tau \text{ мелкости } < \delta \text{ и любого его оснащения } \xi \\
 \implies &\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

2.  $f \in C[a, b]$ . Тогда для любой последовательности дроблений  $\tau_n$ , для которой  $|\tau_n| \rightarrow 0$  и любой последовательности их оснащений  $\xi_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p &=: S_p(n) \\
 \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p &< S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

Введем интегральную сумму...

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$$

Мелкость этих дроблений  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

$$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

При  $p = -1$  считаем, что  $\frac{1}{p+1} = \infty$ .

**Определение 1.5.**

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дробления  $\tau$  и мелкости  $< \delta$  и любого его оснащения  $\xi$   
 $\implies |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$ , то  $f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$

$I$  – это её интеграл Римана.

**Теорема 1.8** (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$ . Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

**Лемма.**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$



**Доказательство.** (леммы.)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})' dt = f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \\ &= f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

**Доказательство.** (теоремы.)

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\ |\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 1.9** (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай).

$$f \in C^2[m, n] \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

**Доказательство.**

$$n = m + 1$$

$$f(m) + f(m + 1) = \frac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$f(m) = \frac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Суммируем от  $m$  до  $n - 1$ .

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для  $f(m) = \dots$

Надо доказать ф-лу:

$$\frac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t)(t - m)(m + 1 - t) dt$$

А это в точности лемма, которая уже была. □

**Пример.**

$$1. S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$$

$$f(t) = t^p \quad f''(t) = p(p - 1)t^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Если  $p \in (-1, 1)$ , то  $\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq C$ .

Действительно.

$$\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} \leq \frac{1}{1-p}$$

И получили, что

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Если  $p > 1$ :

$$\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$$

$$\implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

2. Гармонические числа.  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad f''(t) = \frac{2}{t^3} \quad m = 1$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int_1^n \frac{1}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$$

Последовательность  $a_n$  монотонно возрастает.

$$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies (\text{т.к. } a_n \text{ возрастает и ограничена сверху}) \quad a_n \text{ имеет предел } a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Получаем, что:

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1) = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$$

$\frac{1}{2} + a =: \gamma$  – постоянная Эйлера.

$$\gamma \approx 0,5772156649\dots$$

3. Формула Стирлинга.

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

$$f(t) = \ln t \quad f''(t) = -\frac{1}{t^2} \quad m = 1$$

$$\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt$$

$$\int_1^n \ln t dt = t \ln t \Big|_1^n - \int_1^n t(\ln t)' dt = n \ln n - n + 1$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$$

$b_n$  монотонно возрастают.

$$b_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq 1$$

$$\implies \text{у } b_n \text{ есть предел } b.$$

$$b_n = b + o(1)$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 + b + o(1)$$

$$n! = \exp\left(n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b + o(1)\right) = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} (1 + o(1)) \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}$$

Хотим понять, что такое  $e^{1-b} = c$ .

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nc}}{(n^n e^{-n} \sqrt{nc})^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2nc}}{\sqrt{n^2 c^2}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies c = \sqrt{2\pi}$$

Итого формула Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

### 1.3. §5. Несобственные интегралы

**Определение 1.6.**

$$-\infty < a < b \leq +\infty$$

$$f \in C[a, b)$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$$-\infty \leq a < b < +\infty$$

$$f \in C(a, b]$$

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

**Замечание.**

Если  $f \in C[a, b]$ , то определение не дает ничего нового.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b M = M(b-c) \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow b^-$$

**Теорема 1.10** (Критерий Коши сходимости интегралов).

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

$$\int_a^b f \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) : \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \left| \int_c^d f \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f = \int_a^b f - \text{конечен.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall c \in (b - \delta, b) \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

$$\text{Аналогично получаем для } d \in (b - \delta, b) \left| \int_a^d f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^c f - \int_a^d f \right| \leq \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \int_a^d f \right| < 2\varepsilon$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

$$\tilde{b} = b - \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

Это критерий Коши для  $\lim_{c \rightarrow b^-} F(c)$ . □

**Следствие.**

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

Если  $\exists c_n, d_n \in [a, b)$ , т.ч.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b$

и  $\int_{c_n}^{d_n} f \not\rightarrow 0$ , то  $\int_a^b f$  расходится.

**Доказательство.**

От противного. Пусть  $\int_a^b f$  сходится. Докажем, что  $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Возьмем  $\varepsilon > 0$  по нему найдем  $\tilde{b} \in (a, b)$  из критерия Коши.

Т.к.  $c_n, d_n \rightarrow b \implies \exists N \forall n > N \quad c_n, d_n > \tilde{b}$

$$\implies \left| \int_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon.$$

Значит,  $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$ , что противоречит условию. □

**Замечание.**

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty.$$

Тогда на  $[a, b)$  существует первообразная  $F$ .

$$\int_a^c f = F(c) - F(a)$$

Существование  $\int_a^b f$  – существование  $\lim_{c \rightarrow b^-} (F(c) - F(a)) = \lim_{c \rightarrow b^-} F(c) - F(a)$ .

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная  $F(x)$  имеет предел в точке  $b$  (слева)

Соглашение. Если  $F$  не определена в точке  $b$ , считать, что

$$F \Big|_a^b := \lim_{c \rightarrow b^-} F(c) - F(a)$$

Тогда если  $\int_a^b f$  существует, то  $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

**Пример.**

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1} \Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$$

$$p = 1$$

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \rightarrow +\infty$$

Тогда интеграл расходится.

Если  $p \neq 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \rightarrow \frac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1$$

Если же  $p < 1$ , то  $\rightarrow +\infty$ .

Получили, что  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится  $\iff p > 1$ .

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p}$$

Если  $p = 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$$

Значит, интеграл расходится.

Если же  $p \neq 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$$

Если  $p > 1 \implies \rightarrow +\infty$

Если  $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

Получили, что  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  сходится  $\iff p < 1$

**Свойства.**

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

1. Аддитивность.

$$\int_a^b f \text{ сходится} \implies \forall c \in (a, b) \int_c^b f \text{ сходится.}$$

**Доказательство.**

$$\int_a^b f \text{ - сходится} \implies \exists \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f =: \int_a^b f$$

$$\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f \implies \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim_{B \rightarrow b^-} \int_c^B f$$

$$\text{Вот и получили, что } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \square$$

2.  $\int_a^b f$  сходится  $\implies \int_c^b f \rightarrow 0$  при  $c \rightarrow b-$ .

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f$$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

3. Линейность.  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  сходятся  $\implies \int_a^b (\alpha f + \beta g)$  сходится тоже.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство.**

$$\int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g \text{ при } B \rightarrow b-$$

$\implies$  предел конечен и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

□

*Замечание.*

$\int_a^b f$  сходится  $\int_a^b g$  расходится  $\implies \int_a^b (f \pm g)$  расходится.

Доказательство – от противного.

**Свойства (продолжение).**

4. Монотонность  $f, g \in C[a, b]$   $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$

**Доказательство.**

$$c \in [a, b] \implies f, g \in C[a, c]$$

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g$$

Переходим к пределу в неравенстве.  $c \rightarrow b-$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

5. Интегрирование по частям.

$$f, g \in C^1[a, b] \implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

(Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

**Доказательство.**

$$c \in [a, b] \quad f, g \in C^1[a, c]$$

$$\int_a^c f g' = f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g$$

Теперь напишем предел  $c \rightarrow b-$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f g' = \lim_{c \rightarrow b-} (f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g) = \lim_{c \rightarrow b-} f g \Big|_a^c - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f' g$$

□

6. Замена переменной.

$$f \in C[a, b] \quad \varphi : [a, \beta) \rightarrow [a, b) \text{ и } \varphi \text{ непрерывна и дифференцируема. } c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

(Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

**Доказательство.**

$$F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

Если существует предел в правой части. Т.е.  $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

$$\text{Тогда } \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - \Phi(\alpha)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

$$a \leq \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$$

Если  $c \neq b$ , то предел существует и равен  $F(c)$ .

Если  $c = b$ , то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

$$\text{Теперь надо понять, что } \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

Возьмем  $\gamma_n \rightarrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow c$  оба стремятся слева

$$F(c_n) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c} F(y)$$

$$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$$

Случай второй. Существует  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Т.е. существует  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \Phi(\gamma)$

Если  $c < b$ , то  $f \in C[\varphi(a), c]$  и  $\int_{\varphi(a)}^c f(x) dx$  существует и мы попали в первый случай.

Поэтому  $c = b$ .

Возьмем последовательность  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Тогда  $\varphi(\gamma_n) \rightarrow b$

Пусть  $y_n \rightarrow b$ . Надо доказать, что  $F(y_n)$  имеет предел.

Поймем, что  $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta)$   $\varphi(\delta_n) = y_n$ .

$$\varphi(\alpha) \leq y_n \leq \varphi(\gamma_m)$$

$\implies$  по непрерывности  $\varphi$  существует  $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$ , т.ч.  $y_n = \varphi(\delta_n)$ .

Покажем, что  $\delta_n \rightarrow \beta$ . Пусть это не так.

Тогда  $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \rightarrow [a, b)$  и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$$\varphi(\delta_{n_k}) \leq \varphi(p) < b.$$

Но это противоречит с тем, что  $y_{n_k} \rightarrow b$ .

Тогда  $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$  имеет предел.

□

**Замечание.**

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Сделаем замену.  $x = b - \frac{1}{t}$ . Тогда

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}$$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

### 1.3.1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b)$$

Интересуемся сходимостью  $\int_a^b f(x) dx$

**Теорема 1.11.**

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b) \quad F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

Сходимость  $\int_a^b f(x) dx$  равносильна ограниченности  $F$ .

**Доказательство.**

$$F(y_2) - F(y_1) = \int_a^{y_2} f - \int_a^{y_1} f = \int_{y_1}^{y_2} f \geq 0$$

$\implies F$  монотонно возрастает.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} F(y) - F(a)$$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. □

**Следствие.**

1.  $0 \leq f \leq g$   $f, g \in C[a, b)$

Если  $\int_a^b g$  сходится, то и  $\int_a^b f$  сходится.

Если  $\int_a^b f$  расходится, то и  $\int_a^b g$  расходится.

**Доказательство.**

$$F(y) := \int_a^y f \quad G(y) := \int_a^y g$$

$F \leq G$  на  $[a, b)$  (по монотонности интеграла)

$\int_a^b g$  сходится  $\implies G$  ограничена сверху.

$\implies F$  ограничена сверху  $\implies F$  ограничена  $\implies \int_a^b f$  сходится.

(Второй пункт – переформулировка) □

2.  $f \geq 0$   $f \in C[a, +\infty)$  и  $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$   $\varepsilon > 0$ .

Тогда  $\int_a^{+\infty} f$  – сходится.

**Доказательство.**

$$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leq M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что  $\int_a^{+\infty} g$  сходится.

$$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.}$$
 □

**Замечание.**

Неравенства  $f \leq g$  или  $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  могут выполняться лишь при достаточно больших  $x$ .

(Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

3.  $f, g \geq 0$   $f, g \in C[a, b)$  и  $f \sim g$  при  $x \rightarrow b-$

Тогда  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково.

(или оба сходятся, или оба расходятся)

**Доказательство.**

$f = \varphi g$ , где  $\varphi(x) \rightarrow 1$ , при  $x \rightarrow b-$ .

$\implies$  существует такое  $c$ , что при  $x \geq c$   $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2$

$\implies \frac{g}{2} \leq f = \varphi g \leq 2g$  при  $x \geq c$

$\implies$  если  $\int_c^b g$  сходится, то  $\int_c^b f$  сходится. (и наоборот)

А значит, и  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково. □

*Замечание.*

$f \geq 0$   $f \in C[a, +\infty)$  и  $\int_a^{+\infty} f$  сходится.

Это НЕ значит  $f(x) \rightarrow 0$ .

### 1.3.2. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

**Определение 1.7** (Абсолютная сходимость.).

$f \in C[a, b)$

$\int_a^b f$  абсолютно сходится, если  $\int_a^b |f|$  сходится.

**Теорема 1.12.**

Если  $\int$  абсолютно сходится, то он сходится.

**Доказательство.**

$$F(c) = \int_a^c f = \int_a^c f_+ - \int_a^c f_-$$

$$\Phi(c) = \int_a^c |f| = \int_a^c f_+ + \int_a^c f_-$$

$$\int_a^c f_+ =: F_1(c)$$

$$\int_a^c f_- =: F_2(c)$$

Знаем, что  $\Phi(c)$  сходится. Значит,  $\Phi$  ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2$ ,  $F_1 \geq 0$   $F_2 \geq 0 \implies F_1$  и  $F_2$  ограничены.

$\implies \int_a^b f_+$  и  $\int_a^b f_-$  сходятся  $\implies \int_a^b f$  сходится по линейности. □

**Следствие.**

$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ , если  $\int_a^b f$  абсолютно сходится.

**Доказательство.**

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

и монотонность интеграла □

**Теорема 1.13** (признак Дирихле).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1.  $\exists K : \left| \int_a^y f \right| \leq K$  при всех  $y$ .

2.  $g$  монотонна.

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что  $\int_a^{+\infty} fg$  сходится.

**Доказательство.**

Лишь для  $g \in C^1[a, +\infty)$  (В другом случае тоже верно, но нам доказывать не стали)

$$F(y) := \int_a^y f$$

$$\int_a^y fg = Fg \Big|_a^y - \int_a^y Fg'$$

Посмотрим на  $F(y)g(y)$ .

$$|F(y)g(y)| \leq K |g(y)| \rightarrow 0.$$

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что  $\int_a^{+\infty} Fg'$  сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть  $g$  монотонно возрастает.

$$\int_a^{+\infty} |Fg'|$$

$$|Fg'| = |F| |g'| \leq K |g'|.$$

Т.е. надо понять, что  $\int_a^{+\infty} Kg'$  сходится.

$$\int_a^y Kg' = Kg(y) - Kg(a) \rightarrow -Kg(a)$$

□

**Теорема 1.14** (признак Абеля).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1.  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  –сходится
2.  $|g(x)| \leq K \quad \forall x > a$
3.  $g$  монотонна

Из этого всего следует, что  $\int_a^{+\infty} fg$  сходится

**Доказательство.**

Будем доказывать через Дирихле.

$g$  монотонна и ограничена  $\implies \exists A := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  и  $|A| \leq K$

$\tilde{g}(x) := g(x) - A$  монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится  $\implies \exists$  конечный  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x) dx \implies \int_a^y f(x) dx$  ограничена в окрестности  $+\infty$  (т.е. при  $y \geq b$ ).

Но при  $y \in [a, b]$  она ограничена, т.к. непрерывна.

Т.е. показали, что  $f$  и  $\tilde{g}$  удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$$\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x) dx - \text{сходится}$$

$$fg = fA + f\tilde{g} \text{ и } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} fA + \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$$

□

**Следствие.**

$f, g \in C[a, +\infty)$  и  $f$  периодична с периодом  $T$ .

$g$  монотонна и стремится к 0 на бесконечности, и  $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$  расходится.

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \text{ сходится} \iff \int_a^{a+T} f(x) dx = 0$$

**Доказательство.**

“ $\Leftarrow$ ”

$$F(y) := \int_a^y f(x) dx = \int_{a+kT}^y f(x) dx = \int_a^{y-kT} f(x) dx$$

$$a \leq y - kT \leq a + T.$$

Т.е. множество значение  $F(y)$  при  $y \in \mathbb{R}$  и множество значений  $F(y)$  при  $y \in [a, a + T]$  совпадает.

Но  $F$  непрерывна  $\implies$  ограничена на  $[a, a + T]$

$\implies F$  ограничена на  $\mathbb{R}$

$\implies$  по принципу Дирихле  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  сходится.

“ $\implies$ ”

Докажем, что если  $\int_a^{a+T} f(x) dx =: A \neq 0$ , то  $\int_a^{+\infty} fg$  расходится.

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$  - периодическая.

$$\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} f - \int_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0.$$

Значит,  $\int_a^{+\infty} \tilde{f}g$  сходится.

$$\text{Но } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + A \int_a^{+\infty} g$$

Получили, что одно слагаемое сходится, а другое расходится (т.к. хвост знакопостоянен, а  $\int_a^{+\infty} |g|$  расходится и  $g$  монотонна)

□

**Пример.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

Случай 1.

$$p > 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится}$$

$\implies \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  – абсолютно сходится.

Случай 2.

$$0 < p \leq 1$$

$\sin x$  – периодическая функция  $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \rightarrow 0$  и монотонна.

$\implies$  по следствию признака Дирихле  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$  – периодическая функция  $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx \neq 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^p} dx \text{ сходится} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится} \iff p > 1$$

(Т.к. если  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится, то пользуемся  $0 \leq |\sin x| \leq 1$ , если же расходится, то есть следствие из признака Дирихле)

$\implies$  нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$$p \leq 0$$

Воспользуемся критерием Коши.

$$\int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{3}$$

$\implies$  нет сходимости.

## 2. 6. Метрические и нормированные пространства

### 2.1. §1. Открытые и замкнутые множества

#### Определение 2.1.

$(X, \rho)$  – метрическое пространство, если  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

#### Пример.

1.  $\mathbb{R}$   $\rho(x, y) = |x - y|$
2.  $\mathbb{R}^2$   $\rho(x, y)$  – длина отрезка  $xy$ .
3.  $X$   $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y \\ 1 & \text{если } x \neq y \end{cases}$
4. Множество – сфера. Расстояние – дуги.
5. Манхэттенская метрика.  $\mathbb{R}^2$   $x = (x_1, x_2)$   $y = (y_1, y_2)$   
 $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
6. Французская железнодорожная метрика. Есть город Париж и радиальные дороги от него. Больше никто никак между собой не связан.  
 Если  $A$  и  $B$  лежат на одном луче, то  $\rho(A, B) = AB$   
 Если  $A$  и  $B$  лежат на разных лучах, то  $\rho(A, B) = AP + BP$   
 Упражнение – проверить, что это метрика.

#### Определение 2.2.

Открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $a$   $B_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$ .

Замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $a$   $\bar{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$

#### Свойства.

1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. Если  $a \neq b$ , то  $\exists r > 0$   
 $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$

#### Доказательство.

Возьмем радиус  $r := \frac{\rho(a, b)}{3}$ . Он подходит.

От противного. Пусть пересекаются, т.е.  $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$

$$\implies \rho(x, a) < r, \rho(x, b) < r \implies \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(x, b) < 2r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$$

Получили противоречие. □

**Определение 2.3.**

$A \subset X$  – метрическое пространство.

$a \in A$  – внутренняя точка, если  $\exists r > 0$ , т.ч.  $B_r(a) \subset A$

**Определение 2.4.**

Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

**Свойства открытых множеств.**

1.  $\emptyset, X$  – открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
4.  $B_r(a)$  – открытое множество.

**Доказательство.**

2.  $A_\alpha$  – открытые,  $\alpha \in I$ .

$$A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Возьмем  $a \in A$ , тогда  $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$

$A_\beta$  открытое  $\implies \exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$

3.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – открытые.  $A := \bigcap_{k=1}^n A_k$

Возьмем  $a \in A \implies a \in A_k \quad \forall k = 1, \dots, n$

$A_k$  – открытое  $\implies \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$

$r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0 \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$

$$\implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$$

4. Пусть  $x \in B_r(a)$

Возьмем  $\tilde{r} := r - \rho(x, a) > 0$

Проверим, что  $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$ .

Возьмем  $y \in B_{\tilde{r}}(x) \implies \rho(y, x) < \tilde{r} = r - \rho(x, a)$

$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < \tilde{r} + \rho(x, a) = r$

□

**Замечание.**

Конечность в третьем свойстве существенна.

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

**Определение 2.5.**

Внутренность множества  $\text{int } A$  – множество всех внутренних точек  $A$

(другое обозначение –  $\overset{\circ}{A}$ )

**Свойства.**

1.  $\text{int } A \subset A$
2.  $\text{int } A$  – объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $A$ .
3.  $\text{int } A$  – открытое множество.
4.  $\text{int } A = A \iff A$  открыто
5.  $A \subset B \implies \text{int } A \subset \text{int } B$
6.  $\text{int } (A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7.  $\text{int } (\text{int } A) = \text{int } A$

**Доказательство.**

2.  $G := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , где  $U_\alpha$  – открытое из  $A$ .

Надо доказать, что  $\text{int } A = G$

“ $\supset$ ”

Берем  $x \in G \implies x \in U_\alpha \subset A \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U_\alpha \subset A$

$\implies x$  – внутренняя точка  $\implies x \in \text{int } A$

“ $\subset$ ”

Берем  $x \in \text{int } A \implies \exists r > 0 B_r(x) \subset A$

$B_r(x)$  – открытое множество, которое содержится в  $A$  и содержит  $x$ .

$\implies x \in G$ .

3. По пункту 2  $\text{int } A$  – объединение открытых множеств  $\implies$  открыто

4. “ $\implies$ ”

$\text{int } A$  открыто по пункту 3  $\implies A$  открыто.

“ $\longleftarrow$ ”

$A$  открыто  $\implies$  все точки внутренние  $\implies \text{int } A = A$ .

6. “ $\subset$ ”

$A \cap B \subset A \implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } A$

$A \cap B \subset B \implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } B$

$\implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } A \cap \text{int } B$

“ $\supset$ ”

$x \in \text{int } A \cap \text{int } B \implies x \in \text{int } A, x \in \text{int } B \implies B_{r_1}(x) \subset A, B_{r_2}(x) \subset B$

$\implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies x \in \text{int } (A \cap B)$

7.  $\text{int } A$  открыто  $\implies \text{int } (\text{int } A) = \text{int } A$  по пункту 4.

□



**Определение 2.6.**

Замкнутое множество.

$A \subset X$  – замкнутое, если  $X \setminus A$  – открытое.

**Свойства.**

1.  $\emptyset, X$  – замкнутое.
2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств – замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
4.  $\overline{B}_r(a)$  – замкнутое множество.

**Доказательство.**

2.  $A_\alpha \implies X \setminus A_\alpha =: B_\alpha$  – открытое.

$\implies B := \bigcup B_\alpha$  – открыто

$X \setminus B = \bigcap (X \setminus B_\alpha) = \bigcap A_\alpha$  – замкнуто.

3.  $X \setminus \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$  – открыто.

4.  $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > r\}$  – открыто?

Возьмем  $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$

$\tilde{r} := \rho(x, a) - r$

$B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset$

От противного. Пусть  $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) \implies$

$\rho(y, x) < \tilde{r}$  и  $\rho(y, a) \leq r$

$\implies \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a)$

Противоречие.

□

**Замечание.**

В пункте 3 существенна конечность.

$\mathbb{R} \quad A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$  – не является замкнутым.

**Определение 2.7.**

Замыкание множества  $A$  –  $Cl A$  (другое обозначение –  $\overline{A}$ )

– пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

**Свойства.**

1.  $A \subset Cl A$
2.  $Cl A$  – замкнутое множество

3.  $Cl A = A \iff A$  – замкнуто
4.  $A \subset B \implies Cl A \subset Cl B$
5.  $Cl(A \cup B) = Cl A \cup Cl B$
6.  $Cl(Cl A) = Cl A$

**Теорема 2.1.**

$$Cl A = X \setminus int(X \setminus A)$$

**Доказательство.** (теоремы)

$$X \setminus Cl A = int(X \setminus A)$$

$$int(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \text{ где } U_{\alpha} \subset X \setminus A \text{ и открыт.}$$

$$X \setminus int(X \setminus A) = X \setminus \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus U_{\alpha}) = Cl A$$

$$X \setminus U_{\alpha} \supset A \text{ и замкнуто.}$$

□

**Доказательство.** (свойств)

3.  $Cl A = A \iff X \setminus A = X \setminus Cl A (= int(X \setminus A))$   
 $\iff X \setminus A = int(X \setminus A) \iff X \setminus A$  – открыто  $\iff A$  замкнуто.
4.  $A \subset B \implies X \setminus B \subset X \setminus A \implies int(X \setminus B) \subset int(X \setminus A)$   
 $\implies X \setminus int(X \setminus A) \subset X \setminus int(X \setminus B)$   
 $\implies Cl A \subset Cl B$

□

**Пример в  $\mathbb{R}$ .**

$$int [0, 1] = (0, 1)$$

$$Cl (0, 1] = [0, 1]$$

$$int \mathbb{Q} = \emptyset$$

$$Cl \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Упражнение.  $A, \quad int(Cl(int(Cl \dots(A) \dots)))$ . Какое количество различных множеств таким образом может быть получено?

**Теорема 2.2.**

$$a \in Cl A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

**Доказательство.**“ $\implies$ ”Пусть для некоторого  $r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$ 

$$\implies a \notin A \text{ и } B_r(a) \subset X \setminus A \implies a \text{ – внутренняя точка } X \setminus A$$

$$\implies a \in int(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus int(X \setminus A) = Cl A$$

Противоречие.

“ $\longleftarrow$ ”

Пусть  $a \notin Cl A = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ , где  $F_{\alpha}$  – замкнуто и  $\supset A$

$\implies$  существует  $\beta$ , что  $a \notin F_{\beta} \supset A \implies a \in X \setminus F_{\beta}$  – открыто.

$\implies$  возьмем  $r > 0$ , т.ч.  $B_r(a) \subset X \setminus F_{\beta} \subset X \setminus A$

$\implies B_r(a) \cap A = \emptyset$

Получили противоречие. □

**Следствие.**

$A \subset X$  и  $U$  – открытое множество,  $U \cap A = \emptyset$

Тогда  $U \cap Cl A = \emptyset$

**Доказательство.**

Если  $x \in U \cap Cl A$ , то  $x \in U$  – открытое

$\implies$  для некоторого  $r > 0$   $B_r(x) \subset U$

$\implies B_r(x) \cap A = \emptyset \implies x \notin Cl A$

Противоречие. □

**Определение 2.8.**

Проколота окрестность точки – шарик без центра.

$$\mathring{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$$

**Определение 2.9.**

$A \subset X$   $a$  – предельная точка, если в любой проколоте окрестности точки  $a$  есть точка из  $A$ .

**Определение 2.10** (Обозначения).

$A'$  – множество предельных точек  $A$ .

**Свойства.**

1.  $Cl A = A \cup A'$
2.  $A \subset B \implies A' \subset B'$
3.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4.  $A$  – замкнутое  $\iff A' \subset A$

**Доказательство.**

$$1. a \in Cl A \iff \forall r > 0 \ B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \ \forall r > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A, \text{ но } a \in A' \end{cases}$$

$$2. \text{ Пусть } a \in A'. \text{ Тогда } \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \ \forall r > 0$$

$$\text{но } A \subset B \implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \ \forall r > 0 \implies a \in B'$$

$$\begin{aligned} 3. A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\ &\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)' \end{aligned}$$

Обратное включение.

Возьмем  $x \in (A \cup B)'$ . Пусть  $x \notin A'$

$$\implies \exists r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$$

Но  $\mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

$$\implies \mathring{B}_r(x) \cap B \neq \emptyset \implies \forall R \geq r \ \mathring{B}_R(x) \cap B \neq \emptyset$$

Заметим, что сие верно и для радиусов, меньших  $r$ . Ведь для всех меньших радиусов будет верно  $\mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$ . А значит, для них можно провести те же рассуждения.

$$\begin{aligned} 4. A - \text{замкнутое} &\iff A = Cl A. (= A \cup A') \\ &\iff A = A \cup A' \iff A' \subset A. \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.3.**

$a \in A' \iff \forall r > 0 \ B_r(a)$  содержит бесконечное множество точек из  $A$ .

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$a \in A' \implies \forall r > 0 \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

$\exists a \neq x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A \implies r > \rho(x_1, a) > 0$ . Пусть  $\rho(x_1, a) = r_1$ .

$$\implies \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \text{ и } x_1 \neq x.$$

$$r_2 := \rho(a, x_2)$$

Ну и делаем так далее.

“ $\longleftarrow$ ”

Возьмем  $B_r(a)$ .  $B_r(a) \cap A$  содержит бесконечно много точек.

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек, т.к. выкинули одну точку.}$$

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a - \text{предельная точка.}$$

□

**Следствие.**

Конечное множество не содержит предельных точек.

**Замечание.**

Можно было выбирать последовательность  $x_n$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$  и  $\rho(x_n, a) \downarrow$

**Определение 2.11.**

$(X, \rho)$  – метрическое пространство.  $Y \subset X$ .

$(Y, \tilde{\rho})$  – подпространство метрического пространства  $X$ .

$$\tilde{\rho} = \rho \Big|_{Y \times Y}$$

**Теорема 2.4** (об открытых и замкнутых множествах в подпространстве).

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $Y$  – подпространство. Тогда

$$1. A \subset Y - \text{открыто в } Y \iff \exists G - \text{открытое в } X \text{ множество, т.ч. } A = G \cap Y$$

2.  $A \subset Y$  – замкнуто в  $Y \iff \exists F$  – замкнутое в  $X$  множество, т.ч.  $A = F \cap Y$

**Доказательство.**

1. “ $\implies$ ”

$A$  – открыто в  $Y$ .

$$\forall a \in A \exists r(a) > 0 B_{r(a)}^Y(a) \subset A$$

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \text{ – открыто в } X.$$

Это то самое  $G$ , которое нам надо.

$$B_{r(a)}^Y(a) = B_{r(a)}^X(a) \cap Y$$

$$A = A \cap Y = \bigcup_{a \in A} (B_{r(a)}^X(a) \cap Y) = G \cap Y$$

“ $\impliedby$ ”

Пусть  $A = G \cap Y$ . Возьмем  $a \in A$ , тогда

$$a \in G \text{ – открыто в } X \implies \exists r > 0 B_r^X(a) \subset G.$$

$$\implies B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

$$\implies a \text{ – внутренняя точка} \implies A \text{ – открыто в } Y.$$

2.  $A$  – замкнуто в  $Y \iff Y \setminus A$  – открыто в  $Y$

$$\iff \exists G \text{ – открыто в } X, \text{ т.ч. } Y \setminus A = G \cap Y$$

$$A = (X \setminus G) \cap Y.$$

И положим  $F := X \setminus G$ .

И все получилось.

□

**Пример.**

$$X = \mathbb{R} \quad Y = [0, 2)$$

$[0, 1)$  – открыто в  $Y$ .

$$B_r^Y(0) = [0, r) \text{ при маленьких } r.$$

$[1, 2)$  – замкнуто в  $Y$ .

$$[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$$

$$[1, 2) = [1, 2] \cap [0, 2)$$

**Определение 2.12.**

$X$  – линейное пространство (над  $\mathbb{R}$ ).

Тогда норма  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \|x\| \geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C}) \quad \forall x \in X$$

$$3. \text{Неравенство треугольника } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Пример.**

1.  $X = \mathbb{R} \quad \|x\| := |x|$
2.  $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, d} |x_k|$
3.  $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_1 := \sum_{k=1}^d |x_k|$
4.  $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^d |x_k|^2}$

5.  $X = C[a, b]$

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Комментарий к неравенству треугольника.

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| = |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

### Определение 2.13.

Скалярное произведение.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$  и  $\forall x, y \in X$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (Если над  $\mathbb{C}$ , то  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ )
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

### Пример.

1.  $\mathbb{R}^d \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$
2. Если  $w_1, \dots, w_d > 0$ , то  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d w_k x_k y_k$
3.  $C[a, b] \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

### Свойства скалярного произведения над $\mathbb{R}$ .

1.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$   
 $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского  
 $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

**Доказательство.**

$$t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Квадратный трехчлен относительно  $t$

$$\implies \text{его дискриминант} \leq 0$$

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \square$$

**Замечание.**

Когда равенство?

Когда есть корень у трехчлена  $\langle x + t_0y, x + t_0y \rangle \geq 0$  относительно  $t_0$ .

$$\implies x + t_0y = 0 \implies x = (-t_0)y$$

3.  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  – норма.

**Доказательство.**

$$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Неравенство треугольника.

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \text{ – это неравенство Коши-Буняковского.} \quad \square$$

**Следствие.**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2} \text{ – норма.}$$

Упражнение. Доказать, что норма по формуле выше задается некоторым скалярным произведением  $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

**Свойства нормы.**

1.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  – метрика

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \|y - x\|$$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

2.  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

**Доказательство.**

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \text{ – надо доказать.}$$

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|$$

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\| \quad \square$$

**Определение 2.14.**

Предел последовательности в метрическом пространстве.

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $x_n \in X$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

**Определение 2.15.**

$E \subset X$  – ограничено, если  $E$  содержится в каком-то шаре.

**Свойства предела последовательности в метрическом пространстве.**

1. Единственность предела.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$

**Доказательство.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Это просто и есть определение того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$  □

3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

**Доказательство.**

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$

$\implies \rho(x_n, a)$  – ограниченная последовательность вещественных чисел.

$\implies \exists R : \rho(x_n, a) \leq R$

$\implies x_n \in \overline{B}_R(a)$  при всех  $n$ . □

4. Если  $a$  – предельная точка множества  $A$ , то  $\exists \{x_n\} \subset A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Более того можно выбрать такую последовательность, что  $\rho(x_n, a) \downarrow$

**Теорема 2.5** (об арифметических свойствах в нормированном пространстве).

$X$  – пространство с нормой  $\|\cdot\|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},$$

Тогда.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda a$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$
4.  $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$
5. Если есть скалярное произведение, то  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

**Доказательство.**

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0$$

1.  $0 \leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0$   
 $\implies \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \rightarrow 0$



$$\begin{aligned}
 2. \quad & \|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \leq \\
 & \leq |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \leq \\
 & \lambda_n - \text{имеет предел} \implies \text{ограничена} \implies |\lambda_n| \leq K \\
 & \leq K \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$4. \quad \left| \|x_n\| - \|a\| \right| \leq \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

5. Для доказательства этого факта введем новую норму  $\| \| a \| \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$  – уже показывали где-то, что это норма.

Тогда верно, что

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\| \| x + y \| \|^2 - \| \| x - y \| \|^2) \\
 \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n - b \rangle + \langle x_n - a, b \rangle = \\
 &= \frac{1}{4} (\| \| x_n + y_n - b \| \|^2 - \| \| x_n - y_n + b \| \|^2 + \| \| x_n - a + b \| \|^2 - \| \| x_n - a - b \| \|^2) \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{1}{4} (\| \| a \| \|^2 - \| \| a \| \|^2 + \| \| b \| \|^2 - \| \| b \| \|^2) = 0
 \end{aligned}$$

□

**Определение 2.16.**

$\mathbb{R}^d$   $x_n \in \mathbb{R}^d$   $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$   
 $x_n$  покоординатно сходится к  $x_0$ ,  
 если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \quad \forall k = 1, 2, \dots, d$

**Теорема 2.6.**

В  $\mathbb{R}^d$  покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

**Доказательство.**

“  $\implies$  ”

$$\| \| x_n - x_0 \| \|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0$$

“  $\impliedby$  ”

$$0 \leq (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 \leq \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 = \| \| x_n - x_0 \| \|^2 \rightarrow 0$$

□

**2.2. §2. Компактность**

**Определение 2.17.**

$A \subset X$   $U_\alpha \subset X$   $\alpha \in I$

$U_\alpha$  образуют покрытие  $A$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

**Определение 2.18.**

$U_\alpha$  – открытое покрытие  $A$  (= покрытие открытыми множествами),  
 если это покрытие и все  $U_\alpha$  – открытые множества.

**Определение 2.19.**

$K \subset X$  – компакт (компактное множество), если из любого покрытия  $K$  открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

**Теорема 2.7.**

Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $Y$  – его подпространство.

$$K \subset Y.$$

Тогда компактность  $K$  в метрическом пространстве  $X$  и в метрическом пространстве  $Y$  равносильны.

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

Берем  $U_\alpha$  – открытые множества из  $Y$ , образующие покрытие  $K$ .

Тогда  $U_\alpha = Y \cap G_\alpha$ , где  $G_\alpha$  – открытые множества в  $X$ .

$K \subset \bigcup U_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$  – покрытие открытыми множествами из  $X$ .

$$\implies \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

$$\implies K = K \cap Y \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$$

“ $\impliedby$ ”

Берем открытые множества  $G_\alpha$  из  $X$ , которые покрывают  $K$ .

$$\implies K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y)$$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \text{ т.ч. } K \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

□

**Теорема 2.8.**

$K$  – компактное  $\implies K$  – замкнуто и ограничено.

**Доказательство.**

Ограниченность. Возьмем  $a \in K$

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) \text{ – покрытие открытыми множествами}$$

Выберем конечное подпокрытие  $B_{n_1}(a), \dots, B_{n_m}(a)$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{n_j}(a) = B_r(a) \quad r = \max\{n_1, \dots, n_m\}$$

Замкнутость.  $X \setminus K$  – открыто?

Берем  $a \in X \setminus K$  и хотим проверить, что лежит там вместе с окрестностью.

$$x \in K \text{ и шар } B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) \not\ni a$$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$$

Выберем конечное подпространство.

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(x_k,a)}{2}}(x_k)$$

$$B_r(a) \cap K = \emptyset, \text{ где } r = \min\left\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\right\}$$

□

**Следствие из теоремы.**

$$\tilde{K} \subset K$$

Если  $K$  – компакт и  $\tilde{K}$  – замкнуто, то  $\tilde{K}$  – компакт.

**Доказательство.**

$\tilde{K} \subset \bigcup U_\alpha$  – покрыто открытыми множествами

$\bigcup U_\alpha \cup (X \setminus \tilde{K})$  – покрытие открытыми множествами для  $K$ .

Можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K}$$

$$\implies \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \supset \tilde{K} \text{ – конечное подпокрытие.} \quad \square$$

### Теорема 2.9.

$K_\alpha$  – семейство компактов и любой конечный набор этих компактов имеет непустое пересечение.

Тогда  $\bigcap K_\alpha \neq \emptyset$

### Доказательство.

От противного. Пусть  $\bigcap K_\alpha = \emptyset$

$K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} X \setminus K_\alpha$  – все множества в объединении открытые.

Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{j=1}^n X \setminus K_{\alpha_j} = X \setminus \bigcap_{j=1}^n K_{\alpha_j}$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^n K_{\alpha_j} = \emptyset$$

Получили противоречие с условием, где сказано, что любое конечное покрытие не пусто.  $\square$

### Следствие.

$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$  – непустые компакты

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

### Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов – самый маленький компакт.

$$\implies \neq \emptyset \quad \square$$

### Определение 2.20.

$$a, b \in \mathbb{R}^d$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$$

Замкнутый параллелепипед  $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ .

Открытый параллелепипед  $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$

### Теорема 2.10 (о вложенных параллелепипедах).

$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$  – замкнутые параллелепипеды.

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$$

### Доказательство.

$$P_n = [a^{(n)}, b^{(n)}]$$

На самом деле есть цепочка вложенных отрезков

$$[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \supset [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] \supset \dots$$

Тогда по теореме о вложенных отрезках  $\exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in P_n \quad \forall n$$

$$a_k^{(n)} \leq c_k \leq b_k^{(n)} \quad \forall k \quad \forall n$$

□

**Теорема 2.11** (Гейне-Бореля).

Замкнутый куб в  $\mathbb{R}^d$  – компакт.

**Доказательство.**

$K$  – замкнутый куб и  $\bigcup U_\alpha$  – его покрытие открытыми множествами.

Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разобьем все стороны пополам. Получим  $2^d$  кубиков.  $\bigcup U_\alpha$  – покрытие каждого из них.

Найдется маленький кубик, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Назовем его  $K_1$ .

Каждую сторону этого кубика располовиним. Т.к.  $K_1$  не покрывается конечным подпокрытием, то найдется меньший кубик, который тоже нельзя покрыть конечно. Обозначим его  $K_2$ .

Делаем так далее.

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

По теореме о вложенных параллелепипедах есть точка, которая принадлежит всем  $K_i$ .

Рассмотрим ее.  $c \in \bigcap K_n$

Точка  $c$  покрыта каким-то  $U_{\alpha_0}$ .

$$\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$$

Длина ребра  $K_n = \frac{l}{2^n}$

$$\implies \text{максимальное расстояние между точками } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n}.$$

Эта штука стремится к 0.

$$\implies \text{найдется такой номер } n, \text{ что } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n} < r.$$

$$\implies K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это противоречит тому, как мы выбирали кубики, т.к. нашлось множество одно, которое покрывает какой-то кубик целиком.

Получили, что куб – компакт.

□

**Теорема 2.12** (о характеристике компактов в  $\mathbb{R}^d$ ).

$K \subset \mathbb{R}^d \implies$  следующие условия равносильны.

1.  $K$  – компакт.
2.  $K$  – замкнуто и ограничено.
3. Из любой последовательности точек из  $K$  можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к точке из  $K$ .

**Замечание.**

Третье свойство называется секвенциальная компактность.

**Доказательство.**

1)  $\implies$  2) – было.

2)  $\implies$  1)

$K$  ограничено  $\implies K \subset B_r(a) \subset$  куб. (Куб замкнут и компактен)

$\implies K$  – замкнутое подмножество компакта  $\implies K$  – компактно.

1)  $\implies$  3)

Пусть есть какая-то последовательность точек  $\{x_n\} \subset K$ .

$D$  – множество  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Есть два случая.

Если  $D$  конечно, то какая-то точка повторилась бесконечно много раз.

Возьмем подпоследовательность, состоящую из этой точки – она имеет предел.

$D$  бесконечно. Тогда есть ситуация хорошая – когда там есть предельная точка. Обозначим ее  $a$ .

Там есть точка  $x_{n_1}$ .

$r_1 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_1}), 1\}$

$B_{r_1}(a)$  содержит точку из последовательности. Назовем ее  $x_{n_2}$ .

$n_2 > n_1$

$r_2 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_2}), \frac{1}{2}\}$

Делаем и так далее.

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad \rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$

$\implies \rho(a, x_{n_k}) \rightarrow 0$  и  $x_{n_k} \rightarrow a$ .

Поймем, что  $a \in K$ .  $a$  – предельная в  $D \implies a \in Cl D \subset K$ .

Пусть у  $D$  нет предельной точки. Тогда  $D$  замкнуто (т.к.  $Cl D = D \cap D'$ , где  $D' = \emptyset$ )

$\implies D$  – компакт. Покроем его шариками, каждый из которых содержит ровно одну точку.

$x_n \in D$  и это не предельная точка, ибо их нет.

$\implies \exists \overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n)$  не содержит точек из  $D$ .

$\implies B_{r_n}(x_n)$  содержит ровно одну точку из  $D$ .

$\implies D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$  – покрытие множествами, из которого не выбрать конечное подпокрытие.

Получили противоречие.

3)  $\implies$  2)

$K$  – замкнуто. Пусть нет. Тогда  $Cl K = K \cup K'$ .

Возьмем такую  $a \in Cl K \setminus K$ .  $a$  – это предельная точка. Тогда  $\exists x_1, x_2, \dots \in K$ , т.ч.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Но у любой подпоследовательности  $x_{n_k}$  будет тот же предел. Противоречие, т.к. по условию у любой последовательности из  $K$  должна быть подпоследовательность, имеющая предел в  $K$ .

Значит,  $K$  действительно замкнуто.

$K$  ограничено. От противного.  $K$  не лежит в  $B_n(0) \quad \forall n$ .

$\implies \exists x_n \in K \setminus B_n(0) \implies \rho(x_n, 0) \geq n$ .

Пусть  $x_{n_k}$  – сходящаяся подпоследовательность  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \implies x_{n_k}$  ограничена, а это не так.

□

**Замечание.**

- 1)  $\implies$  3) доказана для произвольного метрического пространства.  
 3)  $\implies$  1) верна для произвольного метрического пространства. (Но это слишком сложно)  
 2)  $\implies$  1) для произвольного метрического пространства не верна.

**Пример.** $\mathbb{R}$  с дискретной метрикой (лентяя) $[0, 1]$  – замкнуто и ограничено. Поймем, что нет компактности.

$$[0, 1] \subset \bigcup_{x \in [0, 1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$$

**Следствие.** $K \subset \mathbb{R}^d$  – компакт

$\implies$  всякое бесконечное множество точек из  $K$  имеет предельные точки, принадлежащие  $K$ .

**Доказательство.** $x_1, x_2, x_3, \dots$  – выбрали последовательность в этом бесконечном множестве.А у нее есть предельная точка из  $K$ . □**Теорема 2.13** (Больцано-Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности точек из  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** $\{x_n\}$  ограничена  $\implies \{x_n\} \subset \overline{B}_R(a)$  – замкнуто и ограничено  $\implies$  компакт.

$\implies$  по пункту 3 из теоремы о характеристике компактов в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □

**Определение 2.21.** $(X, \rho)$  – метрическое пространство. $x_1, x_2, x_3, \dots$  – фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Определение 2.22.** $(X, \rho)$  – полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.**Замечание.**

Фундаментальная последовательность ограничена.

**Следствие.**

- $\mathbb{R}^d$  – полное.
- $K$  – компакт в  $(X, \rho)$ , то  $(K, \rho)$  – полное.

**Доказательство.**

1. Пусть  $x_n$  – фундаментальная последовательность.  $\implies \{x_n\}$  ограничена.

$\implies \exists x_{n_k}$  – сходящаяся подпоследовательность.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\forall \varepsilon \exists M \forall k \geq M \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Пусть  $n \geq \max\{N, n_M\}$

$\implies$  существует  $n_k > n$ .  $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$  и  $\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

$$\implies \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

2.  $x_n$  – фундаментальная последовательность в  $K$

$\implies$  существует  $x_{n_k}$  – сходящаяся подпоследовательность  $\implies x_n$  – сходится.

□

### 2.3. §3. Непрерывные функции

**Определение 2.23.**

$(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  – метрические пространства.

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X.$$

$a$  – предельная точка множества  $E$ .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ если:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \neq x \in E \text{ и } \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$$

Это было определение по Коши.

Запишем определение по Гейне предела функции в точке.

$$\forall x_n \in E, x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Теорема 2.14** (равносильность определения по Коши и по Гейне).

Коши  $\implies$  Гейне.

Покажем, что если выполняется определение по Коши, то выполняется и по Гейне.

Берем подпоследовательность, стремящуюся к  $a$ :

$$x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \rho_X(x_n, a) \rightarrow 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists N \forall n \geq N \rho_X(x_n, a) < \delta.$$

Тогда это в том числе выполняется для того  $\delta$ , которое выбрали для какого-то  $\varepsilon$ . А тогда по данному определению Коши  $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$ .

$$\implies \rho_Y(f(x), A) \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Гейне  $\implies$  Коши

От противного. Пусть нашелся  $\varepsilon$ , для которого нет  $\delta$ . (Т.е. условие Коши не выполняется для любого  $\delta$ , значит можем построить последовательность, выбирая  $\delta = \frac{1}{n}$ )

$$\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

$$\rho_X(x_n, a) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Но мы знаем из определения по Гейне  $\rho_Y(f(x_n), A) \rightarrow 0$

Противоречие.

**Следствие.**

Предел единственен.

Действительно. Пусть он не единственен. Тогда у функции от одной и той же последовательности есть два предела в разных точках. Функция от последовательности – последовательность. А для последовательностей в метрическом пространстве уже доказали единственность предела.

**Теорема 2.15.**

$f : E \rightarrow Y$   $E \subset X$   $a$  – предельная точка  $E$ .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Тогда  $\exists B_r(a)$ , т.ч. функция на  $B_r(a)$  ограничена.

**Доказательство.**

$$\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \text{ и } \rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < 1$$

Переформулируем, что получили в предыдущей строке:

$$r := \delta \ f(\overset{\circ}{B}_r(a) \cap E) \subset B_1(A)$$

Тогда:

$$f(B_r(a) \cap E) \subset B_R(A) \ R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\}$$

□

**Теорема 2.16** (об арифметических действиях с пределами).

$$f, g : E \rightarrow Y \ E \subset X$$

$(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $Y$  – нормированное пространство.

$a$  – предельная точка множества  $E$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda A$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$$

$$4. \text{ Если } \alpha : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lambda, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = \lambda A$$

5. Если в  $Y$  есть скалярное произведение, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$$

**Теорема 2.17** (Критерий Коши).

$(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  – метрические пространства,  $Y$  – полное.

$f : E \rightarrow Y$   $E \subset X$  и  $a$  – предельная точка множества  $E$ .

Существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \ \forall y \in E \ y \neq a \ \rho_X(x, a) < \delta \ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \ \forall y \in E \ y \neq a \ \rho_X(x, a) < \delta \ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon \ \rho_Y(f(y), A) < \varepsilon$$

$$\implies \rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), A) + \rho_Y(A, f(y)) < 2\varepsilon$$

“ $\longleftarrow$ ”

Проверим определение по Гейне. Возьмем  $x_n \in E \ x_n \neq a \ x_n \rightarrow a$ .

Проверим, что  $f(x_n)$  – фундаментальная последовательность в  $Y$ .

Возьмем  $\varepsilon$  и выберем по нему  $\delta > 0$  из условия критерия Коши.

$$\implies \exists N \ \forall n, m \geq N \ \rho_X(x_n, a) < \delta \ \rho_X(x_m, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

$$\implies \{f(x_n)\} \text{ – фундаментальная последовательность в } Y.$$

$$\implies \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ т.к. } Y \text{ – полное.}$$

Если на разных последовательностях оказались разные пределы, то смешаем их, будет та сходящаяся последовательность. Отсюда узнаем, что пределы функции от них должны были быть равны.  $\square$

**Определение 2.24.**

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X \quad a \in E$$

$f$  непрерывна в точке  $a$ , если либо  $a$  – изолированная точка, либо  $a$  – предельная точка множества  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Замечание.**

$f : E \rightarrow Y \ E \subset X$  и непрерывна в точке  $a$ .

$g : \tilde{E} \rightarrow Z \ \tilde{E} \supset f(E)$  и непрерывна в точке  $f(a)$ .

Тогда  $g \circ f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Теорема 2.18.**

$$f : X \rightarrow Y$$

$f$  непрерывна на  $X \iff$

$\forall$  открытого в  $Y$  множества  $U \ f^{-1}(U)$  открыто в  $X$ .

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$V := f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

Хотим доказать, что  $V$  открыто. Берем  $a \in V$ .

$$\implies f(a) \in U \text{ – открытое множество.}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

По непрерывности в точке  $a \ \exists \delta > 0 \ f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

А это определение непрерывности в “шариках”.

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

$$\implies B_\delta(a) \subset V, \text{ т.е. } a \text{ – внутренняя точка множества } V.$$

$$\implies \text{все точки множества } V \text{ – внутренние} \implies V \text{ открыто.}$$

“ $\longleftarrow$ ”

Берем  $a \in X$ . Надо проверить непрерывность в точке  $a$ .

$U := B_\varepsilon(f(a))$  – открытое множество.

$\implies f^{-1}(U)$  открыто.  $a \in f^{-1}(U)$ .

$\implies \exists \delta > 0 \ B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\implies f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$  – это определение непрерывности в точке  $a$ . □

### Теорема 2.19.

Непрерывный образ компакта – компакт.

#### Доказательство.

$f : X \rightarrow Y \ K \subset X \ K$  – компакт.

$\implies f(K)$  – компакт.

Возьмем покрытие  $f(K) \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  открытыми множествами

$V_{\alpha} := f^{-1}(U_{\alpha})$  – открытые множества.

Это покрытие  $K \subset \bigcup V_{\alpha}$

(если  $x \in K$ , но  $x \notin V_{\alpha} \ \forall \alpha$ , то  $f(x) \in f(K)$ , но  $f(x) \notin U_{\alpha}$  )

$\implies \exists V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n} \ K \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$

$\implies f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n f(V_{\alpha_j}) = \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$  – конечное покрытие. □

#### Следствие.

Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

#### Следствие (теорема Вейерштрасса).

$f : K \rightarrow \mathbb{R} \ K \subset X$  непрерывна  $\implies \exists u, v \in K$ , т.ч.  $\forall x \in K \ f(u) \leq f(x) \leq f(v)$

#### Доказательство.

$f(K)$  – компакт.  $\implies$  замкнут и ограничен.

Раз ограничен, то  $\inf f(K)$  и  $\sup f(K)$  – конечные числа.

Пусть  $b := \sup f(K)$  и  $b \notin f(K)$ .

$\implies \exists y_n \in f(K) \ y_n \rightarrow b$ .

$b$  – предельная точка  $\implies b \in Cl f(K) = f(K)$ .

$\implies \exists v \in K \ f(v) = b$ .

Аналогично найдем  $a := \inf f(K)$ . □

### Теорема 2.20.

$f : X \rightarrow Y$ .

$f$  – непрерывная, биекция,  $X$  – компакт.

Тогда

$f^{-1} : Y \rightarrow X$  – непрерывно.

#### Доказательство.

$g := f^{-1}$  и надо проверить, что  $\forall U$  – открытого множества в  $X$  множество  $g^{-1}(U)$  открыто в  $Y$ .

$f(U) = g^{-1}(U)$  – открыто.

$$f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$$

$X \setminus U$  – замкнутое подмножество компакта, значит и сам компакт.

$\implies f(X \setminus U)$  – компакт.

$\implies f(X \setminus U)$  – замкнуто.

$\implies Y \setminus f(X \setminus U)$  – открыто. □

**Определение 2.25.**

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X$$

$f$  равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \text{ и } \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Теорема 2.21** (Кантора).

$f : K \rightarrow Y$   $K$  – компакт,  $f$  – непрерывна.

Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

**Доказательство.**

От противного.

Пусть нашлось  $\varepsilon > 0$ , для которого не подходит ни одно  $\delta > 0$ .

$\delta = \frac{1}{n}$ . Оно не подошло, т.е.  $\exists x_n, y_n \in K \quad \rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$  и  $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$

$x_n$  – последовательность точек из компакта  $K$ .

$\implies \exists x_{n_k}$  – сходящаяся подпоследовательность

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K.$$

$$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \quad \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$$

$$\implies \rho_X(y_{n_k}, a) \leq \rho_X(x_{n_k}, a) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$$

По непрерывности функции  $f$  в точке  $a$ .

$$\exists \delta > 0 \forall \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0, \quad \rho_X(y_{n_k}, a) \rightarrow 0$$

$$\implies \exists \text{ номер, для которого } \rho_X(x_n, a) < \delta, \quad \rho_X(y_n, a) < \delta$$

$$\implies \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \varepsilon \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) + \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \varepsilon$$

А так не бывает. □

**Определение 2.26.**

$X$  – линейное пространство и  $\|\cdot\|$  и  $\|\|\cdot\|\|$  – нормы в  $X$ .

Эти нормы эквивалентны, если  $\exists C_1, C_2 > 0$ , т.ч.

$$C_1\|x\| \leq \|\|x\|\| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X$$

**Замечание.**

Сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

$$x_n \rightarrow a \text{ в смысле } \|\cdot\| \iff \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

$$x_n \rightarrow a \text{ в смысле } \|\|\cdot\|\| \iff \|\|x_n - a\|\| \rightarrow 0$$

$$C_1\|x_n - a\| \leq \|\|x_n - a\|\| \leq C_2\|x_n - a\|$$

**Теорема 2.22.**

В  $\mathbb{R}^d$  все нормы эквивалентны.

**Доказательство.**

$\|\cdot\|$  – стандартная норма.

$p(x)$  – другая норма,  $e_k$  – элемент стандартного базиса пространства (стоит 1 на месте  $k$ ).

$$p(x-y) = p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)e_k\right) \leq \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k)e_k) = \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \leq \\ \leq \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C\|x-y\|$$

Правое неравенство доказано.

$\implies p(x)$  – непрерывная функция.

$S$  – единичная сфера в  $\mathbb{R}^d$  – компакт.

$p$  достигает на  $S$  наименьшего значения.

Это значение  $\neq 0$  и неотрицательно  $\implies > 0$ .

$$\min_{x \in S} p(x) =: C_1 > 0$$

$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| \cdot p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\| \cdot C_1$ , т.к.  $\frac{x}{\|x\|}$  – точка на сфере  $S$ .

Левое неравенство доказали. □

**2.4. §4. Линейные операторы****Определение 2.27.**

$X, Y$  – линейные пространства.  $A : X \rightarrow Y$

$A$  – линейный оператор, если

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \forall x, y \in X \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

**Свойства.**

$$1. A(0_X) = 0_Y$$

**Доказательство.**

$$A(0_X) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y \quad \square$$

$$2. A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$$

**Доказательство.**

По индукции. □

**Определение 2.28.**

$A, B : X \rightarrow Y$

$$(A \pm B)(x) := A(x) \pm B(x)$$

$$(\lambda A)(x) := \lambda \cdot A(x)$$

**Замечание.**

Таковыми операция получили снова линейные операторы.

**Доказательство.**

$$(A+B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) = \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y) \quad \square$$

**Замечание.**

На самом деле сейчас получили, что операторы из  $X$  в  $Y$  образуют линейное пространство.

**Определение 2.29.**

Композиция линейных операторов

$$A : X \rightarrow Y, B : Y \rightarrow Z$$

$$(BA)(x) := B(A(x))$$

Обратный оператор

$$A^{-1}A = Id_X \text{ и } AA^{-1} = Id_Y$$

$$A^{-1} : Y \rightarrow X$$

**Свойства.**

1. Композиция линейных операторов – линейный оператор.
2. Обратный оператор, если он существует, единственный.
3.  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. Множество обратимых линейных операторов из  $X$  в  $X$  образуют группу относительно композиции.

**Доказательство.**

2. Пусть  $B$  и  $C$  – обратимые к  $A$ .

$$C = Id_X \circ C = (BA)C = BAC = B(AC) = B \circ Id_Y = B \\ \implies B = C$$

4.  $Id_X$  – единица.

$$A(B \circ C(x)) = A(B(Cx)) = A \circ B(Cx)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}Id_X B = B^{-1}B = Id_X$$

□

**Замечание.**

Важный частный случай.  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Матричная запись.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$A_i$  – линейное отображение, дающее  $i$ -ю координату  $Ax$ .

$a_{ik} = A_i \cdot e_k$ , где

$e_k$  – столбик нулей, на  $k$ -й позиции 1.

**Определение 2.30.**

Норма оператора.  $A : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  – нормированные пространства.

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$$

**Определение 2.31.**

Если  $\|A\| \neq \infty$ , то  $A$  называется ограниченным оператором.

**Замечание.**

Ограниченный оператор и ограниченное отображение – совершенно разные вещи.

Ограниченное линейное отображение – лишь тождественный ноль.

**Свойства.**

1.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3.  $\|A\| = 0 \iff A = 0$
4.  $\|\cdot\|$  – норма в пространстве линейных ограниченных операторов.

**Доказательство.**

1.  $\|A + B\| = \sup \| (A + B)x \| = \sup \| Ax + Bx \| \leq \sup (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup \|Ax\| + \sup \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$
2.  $\|\lambda A\| = \sup \|\lambda Ax\| = \sup |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$
3.  $\|A\| = 0 \implies \sup \|Ax\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \quad \forall x \quad \|x\| \leq 1$   
Пусть  $x \in X \quad x = \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$   
 $Ax = A(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\| A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$
4. Следует из предыдущих трех.

□

**Теорема 2.23.**

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ при всех } x \in X\}$$

**Доказательство.**

Пронумеруем их  $N_1, \dots, N_5$ .

$$N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$N_1 \geq N_2 \quad N_1 \geq N_3$$

$$N_3 = N_4 \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$$

$$N_4 = N_5$$

$$N_4 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leq N_4 \|x\|$$

$$N_2 \geq N_1$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{Возьмем } x : \|x\| \leq 1 \implies \left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\| < 1$$

$$\implies \|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\| \leq N_2$$

$$\implies \frac{1}{1+\varepsilon} \|Ax\| \leq N_2$$

$$\implies \|Ax\| \leq (1+\varepsilon)N_2$$

$$\implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq (1+\varepsilon)N_2$$

$$\implies N_1 \leq (1+\varepsilon)N_2 \text{ и устремим } \varepsilon \text{ к } 0.$$

$$N_5 \geq N_1$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .

$$\implies \|Ax\| \leq (N_5 + \varepsilon)\|x\|$$

$$\implies \text{если } \|x\| \leq 1, \text{ то } \|Ax\| \leq N_5 + \varepsilon$$

$$\implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_5 + \varepsilon$$

$$\implies N_1 \leq N_5 + \varepsilon \text{ и устремим } \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square$$

**Следствие.**

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$
2.  $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$

**Доказательство.**

$$\|BA\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|B(Ax)\| \leq \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|By\| = \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|B \cdot \frac{y}{\|A\|} \cdot \|A\|\| = \|A\| \sup_{\|y\| \leq 1} \|By\| = \|A\| \|B\| \quad \square$$

**Теорема 2.24.**

$A : X \rightarrow Y$  – линейный оператор.

Тогда следующие условия равносильны:

1.  $A$  – ограниченный оператор.
2.  $A$  – непрерывен в 0.
3.  $A$  – непрерывен.
4.  $A$  – равномерно непрерывен.

**Доказательство.**

$$4 \implies 3 \implies 2 \text{ – очевидно.}$$

$$1 \implies 4$$

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|x - y\| < \delta \implies \|Ax - Ay\| < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$$

$$2 \implies 1$$

$$A0_X = 0_Y$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|x\| = \|x - 0_X\| < \delta \implies \|Ax\| = \|Ax - A0_X\| < \varepsilon$$

Поймем, что  $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$

$$\text{Если } \|x\| < 1, \text{ то } \|\delta x\| < \delta \implies \|A(\delta x)\| < \varepsilon$$

$$\implies \delta \|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

□

**Теорема 2.25.**

$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (говорим про стандартную норму, т.е. корень из суммы квадратов)

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$$

**Доказательство.**

$\|Ax\|^2$ . Как эта штука устроена?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k)^2 \leq \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2) = \|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$$

Тогда:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\sqrt{\|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}}{\|x\|} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$$

□

**2.5. §5. Длина кривой**

**Определение 2.32.**

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ,  $X$  – метрическое пространство.  $\gamma$  – непрерывно.

Тогда это отображение называется путём.

Начало пути –  $\gamma(a)$ .

Конец пути –  $\gamma(b)$ .

Носитель пути –  $\gamma([a, b])$ .

Замкнутый путь –  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Простой путь –  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ , если  $t \neq s$ .

Простой замкнутый путь –  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ , если  $t \neq s$ , кроме точек  $a, b$  но  $\gamma(a) = \gamma(b)$

Противоположный путь –  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$ , где  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$

Конец  $\gamma$  = начало  $\tilde{\gamma}$

Начало  $\gamma$  = конец  $\tilde{\gamma}$

Эквивалентные пути.  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ,  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$ , если  $\exists \tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$  строго монотонна, непрерывна и  $\tau(a) = c$   $\tau(b) = d$ , такое что  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau$ .

**Замечание.**

Это действительно отношение эквивалентности.



$\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies \tilde{\gamma} \sim \gamma$ , т.к.  $\exists \tau^{-1}$  – обратная к  $\tau$ , тоже строго монотонна, непрерывна и  $\tau^{-1}(c) = a$ ,  $\tau^{-1}(d) = b$

Тогда  $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \tau^{-1}$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\tilde{\gamma}}$

$\exists \tau \ \gamma = \tilde{\gamma} \tau \ \exists \tilde{\tau} \ \tilde{\gamma} = \tilde{\tilde{\gamma}} \tilde{\tau}$

$\implies \gamma = \tilde{\gamma} \tau = \tilde{\tilde{\gamma}} \tilde{\tau} \tau$

**Определение 2.33.**

Кривая – класс эквивалентных путей.

Представитель этого класса – параметризация кривой

Носитель кривой – носитель путей из этого класса.

**Определение 2.34.**

Длина пути  $l(\gamma)$ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  какими-то промежуточными точками.

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

$l(\gamma) := \sup \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$

Пояснение. Супремум берется от множества, в которое входят все суммы такого вида. Т.е. участвует и  $n$ , и само разбиение.

**Замечание.**

Длины эквивалентных путей равны, длины противоположных путей тоже равны.

**Определение 2.35.**

Длина кривой – длина любого пути из класса эквивалентности.

**Свойства.**

1.  $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2.  $l(\gamma) \geq$  длине любой вписанной в нее ломаной.

**Теорема 2.26** (об аддитивности длины кривой).

$\gamma : [a, b] \rightarrow X \ c \in (a, b)$

$\implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$

**Доказательство.**

“ $\geq$ ”

Возьмем разбиение для  $[a, c]$   $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c$

И разбиение для  $[c, b]$   $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$

$\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leq l(\gamma)$

Припишем  $\sup$  по всем  $t$ . (От  $t$  зависит лишь одна сумма). Получим

$l(\gamma|_{[a,c]}) + \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leq l(\gamma)$

Припишем  $\sup$  по всем разбиениям  $s$ .

$$l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}) \leq l(\gamma)$$

“ $\leq$ ”

Снова возьмем разбиение. Только теперь – всего отрезка  $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Возможно, одна из  $t_i$  попала на  $c$ . Тогда надо просто разбить и понять по отдельности.

А что если нет?

$$\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leq$$

Пусть  $t_j < c < t_{j+1}$ .

Заметим, что по неравенству треугольника  $\rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leq \rho(\gamma(t_j), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{j+1}))$

Можем тогда добавить точку  $c$  в разбиение.

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) = \sum_{k=1}^{j+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) + \sum_{k=j+2}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) \leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$$

Переходим к суп по  $t$  и получаем:

$$l(\gamma) \leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$$

□

Дальше кривые и пути в  $\mathbb{R}^m$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

**Определение 2.36.**

$$\gamma = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m)$$

$\gamma$  –  $r$ -гладкий путь, если все  $\lambda_k \in C^r[a, b]$

Гладкий путь –  $r = 1$ .

Гладкая кривая, если в классе эквивалентности есть гладкая параметризация.

**Определение 2.37.**

Кусочно гладкий путь – можно нарезать на конечное число кусочков, на каждом из которых путь гладкий.

**Лемма.**

$\gamma$  – гладкий путь.

$\Delta \subset [a, b]$  – отрезок,  $l(\Delta)$  – длина этого отрезка.

$$m_{\Delta}^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$M_{\Delta}^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$m_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m (m_{\Delta}^{(i)})^2}$$

$$M_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_{\Delta}^{(i)})^2}$$

Тогда  $m_{\Delta} l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} l(\Delta)$

**Доказательство.**

Возьмем разбиение  $\Delta : t_0, t_1, \dots, t_n$

$a_k$  – длина  $k$ -го звена ломаной. (От  $\gamma(t_{k-1})$  до  $\gamma(t_k)$ )

$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma'_i(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})$   $\xi_{ik} \in (t_{k-1}, t_k)$  по теореме Лагранжа.

$$|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| = |\gamma'_i(\xi_{ik})| (t_k - t_{k-1}) \leq M_{\Delta}^{(i)}(t_k - t_{k-1})$$

$$a_k^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|^2 \leq \sum_{i=1}^m (M_{\Delta}^{(i)})^2 (t_k - t_{k-1})^2$$

$$\implies a_k \leq M_{\Delta}(t_k - t_{k-1})$$

Аналогично  $a_k \geq m_{\Delta}(t_k - t_{k-1})$

$$m_{\Delta}l(\Delta) = m_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq M_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M_{\Delta}l(\Delta)$$

А теперь переходим к sup по  $t$ .

$$m_{\Delta}l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta}l(\Delta)$$

□

**Теорема 2.27.**

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  – гладкий путь.

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \dots + \gamma'_m(t)^2} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Доказательство.**

Рассмотрим разбиения  $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$$

$$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$$

Тогда уже знаем, что

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

Заметим, что так же верно будет и

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

Теперь все сложим.

$$\sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1})$$

И

$$\sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1})$$

Осталось понять, что  $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ , когда мелкость разбиения  $\rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k} (t_k - t_{k-1}) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)2} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)2}}{M_k + m_k} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} + m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}}{M_k + m_k} (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}) (t_k - t_{k-1}) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}) (t_k - t_{k-1}) \leq \end{aligned}$$

Заметим, что  $M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} \leq w_{\gamma'_i}(t_k - t_{k-1}) \leq w_{\gamma'_i}(|\tau|)$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_{\gamma'_i}(|\tau|)(t_k - t_{k-1}) = (b - a) \sum_{i=1}^m w_{\gamma'_i}(|\tau|) \rightarrow 0$$

□

**Следствие.**

1. Длина графика функции.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

**Доказательство.**

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'_1(t) = 1$$

$$\gamma'_2(t) = f'(t) \text{ и подставим.} \quad \square$$

2. Длина в полярных координатах.

$$r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

(по углу задаем длину, получаем путь, заданный полярными координатами)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$

**Доказательство.**

$$\gamma_1(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$\gamma_2(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\|^2 = ((r(\varphi) \cos \varphi)')^2 + ((r(\varphi) \sin \varphi)')^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \quad \square$$

3.  $l(\gamma) \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\|$

**Доказательство.**

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \square$$

**Определение 2.38.**

Точка  $t_0$ , в которой  $\gamma'(t_0) = 0$  называется особой точкой.

**Определение 2.39.**

$\gamma$  – кривая, имеющая конечную длину  $S$ .

Натуральная параметризация кривой

$$\tilde{\gamma} : [0, S] \rightarrow X, \text{ т.ч. } \forall s \in [0, S] \quad l(\tilde{\gamma}|_{[0, s]}) = s$$

**Теорема 2.28.**

Любая гладкая кривая без особых точек имеет натуральную параметризацию.

**Доказательство.**

$\gamma$  – какая-то гладкая параметризация без особых точек.

$S = l(\gamma) \leq (b - a) \max \|\gamma'\|$ , т.е. кривая имеет конечную длину.

$$\tau : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

$$\tau(t) = l(\gamma|_{[a,t]})$$

$$\tau(a) = 0 \quad \tau(b) = S$$

Поймем, что  $\tau$  строго монотонно возрастает и непрерывна.

$$\tau(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \text{ – непрерывная функция.}$$

$$\tau'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \implies \tau \text{ строго монотонна.}$$

$$\implies \text{существует } \tau^{-1}$$

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau^{-1}$  – натуральная параметризация.

Задана на том отрезке, на котором надо.

$$\text{Надо понять, что такое } l(\tilde{\gamma}|_{[0,s]}) = l(\gamma\tau^{-1}|_{[0,s]}) = l(\gamma|_{[a,\tau^{-1}(s)]}) =$$

Если  $\tau^{-1}(s) = t$ , то

$$= l(\gamma|_{[a,t]}) = \tau(t) = \tau(\tau^{-1}(s)) = s$$

□

**Свойства натуральной параметризации.**

Если  $\gamma$  – натуральная параметризация, то  $\|\gamma'(t)\| = 1$

**Доказательство.**

$$s = l(\gamma|_{[0,s]}) = \int_0^s \|\gamma'(t)\| dt$$

Продифференцируем по  $s$

$$1 = \|\gamma'(t)\|$$

□

**Определение 2.40.**

$E \subset X$  – линейно связное. (Часто слово линейно будет опускаться, т.к. других связностей не будет)

Если:

$\forall u, v \in E$  существует путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ , т.ч.  $u$  – его начало, а  $v$  – его конец.

**Определение 2.41.**

Область – открытое линейно связное множество.

**Теорема 2.29.**

$\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда между любыми двумя ее точками существует ломаная, целиком содержащаяся в  $\Omega$  и соединяющая эти точки.

**Доказательство.**

$$u, v \in \Omega$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma(a) = u \quad \gamma(b) = v$$

$\gamma([a, b])$  – компакт.

У каждой точки пути можно выбрать шарик с центром в ней, что  $B_{2r_x}(x) \subset \Omega$

Выберем конечное подпокрытие.

$B_{2r_{x_1}}(x_1), \dots, B_{2r_{x_n}}(x_n)$  покрывают  $\gamma([a, b])$

И

$\overline{B}_{r_{x_1}}(x_1), \dots, \overline{B}_{r_{x_n}}(x_n) \subset \Omega$  (в силу уполовинивания радиуса)

$\gamma([a, b]) \cap \overline{B}_{r_{x_1}}(x_1)$

Тогда можно выбрать последнюю точку на пути из каждого шарика и построить по ним ломаную.  $\square$

**Теорема 2.30** (Больцано-Коши).

$E$  – связное множество

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна

$a, b \in E \quad f(a) = A \quad f(b) = B$

Тогда  $\forall C$  между  $A$  и  $B$  существует  $c \in E$ , т.ч.  $f(c) = C$

**Доказательство.**

Пусть  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$  – кривая, соединяющая  $a$  и  $b$ .

$g := f \circ \gamma \quad g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция

$g(\alpha) = f(\gamma(\alpha)) = f(a) = A$

$g(\beta) = f(\gamma(\beta)) = f(b) = B$

$\implies$  существует  $t \in [\alpha, \beta]$ , т.ч.  $f(\gamma(t)) = g(t) = C$

$c := \gamma(t) \in E$   $\square$

## 3. 7. Ряды

### 3.1. §0. Расширенное напоминание

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Частичная сумма  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$

Сходимость –  $\exists$  конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  означает  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Были еще всякие свойства (их доказательства в конспекте предыдущего семестра)

Линейность

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Группировка членов ряда

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \dots$$

не меняет суммы сходящегося ряда.

Необходимое условие сходимости.

$$\sum a_n \text{ – сходится} \implies a_n \rightarrow 0$$

А теперь – расширение:

**Теорема 3.1** (Критерий Коши).

$$\sum a_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum a_n \text{ – сходится} \iff \exists \text{ конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\iff (\text{по критерию Коши для предела последовательностей}) \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$S_m - S_n = \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad \square$$

**Теорема 3.2.**

$$\sum a_n$$

1. Если в каждой группе не более, чем  $M$  членов и  $a_n \rightarrow 0$ , то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).
2. Если в каждой группе члены одного знака, то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).

**Доказательство.**

1.  $S_{n_k} \rightarrow S$  при  $k \rightarrow \infty$

(Т.к. группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k \geq K |S - S_{n_k}| < \varepsilon$$

$$\text{Найдем } N, \text{ т.ч. } \forall n > N |S - S_n| < 2\varepsilon$$

$$N \geq N_K$$

Если  $n > N$

$$n_k \leq n < n_{k+1} \quad k \geq K$$

$$S_n - S_{n_k} = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_n - \text{тут } \leq M \text{ слагаемых.}$$

Возьмем  $N_1$ , т.ч.

$$\forall n \geq N_1 |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$N \geq N_1 + M$  – второе условие на  $N$ .

$$\text{Тогда } |S_n - S_{n_k}| \leq |a_{n_k+1}| + |a_{n_k+2}| + \dots + |a_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$$|S - S_n| \leq |S - S_{n_k}| + |S_{n_k} - S_n| \leq 2\varepsilon$$

2.  $S_{n_k} \rightarrow S$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k \geq K |S_{n_k} - S| < \varepsilon$$

$$N := n_K$$

если  $n \geq N$ , то  $n_k \leq n < n_{k+1}$

$$S_n = S_{n_k} + a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_n$$

если в группе все члены  $\geq 0$ , то  $S_n \geq S_{n_k}$

$$S_n = S_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}-1} - \dots - a_{n+1}$$

$$S_{n_{k+1}} \geq S_n$$

$$\text{Тогда } |S_n - S| < \varepsilon$$

Если в группе отрицательные члены

$$S_n \leq S_{n_k} \text{ и } S_n \geq S_{n_{k+1}}$$

и тот же вывод.

□

### 3.2. §1. Знакопостоянные ряды

**Теорема 3.3.**

$$a_n \geq 0$$

$\sum a_n$  сходится  $\iff$  последовательность частичных сумм ограничена.

**Доказательство.**

“ $\implies$ ” – очевидная

Ряд сходится, значит, частичные суммы имеют предел, значит ограничены.

“ $\impliedby$ ”

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$



$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$$

А монотонно возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел.  $\square$

**Теорема 3.4** (Признак сравнения).

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

1.  $\sum b_n$  сходится  $\implies \sum a_n$  сходится
2.  $\sum a_n$  расходится  $\implies \sum b_n$  расходится.

**Доказательство.**

1.  $\sum b_n$  – сходится  
 $\implies B_n := \sum_{k=1}^n b_k$  – ограничена  
 $\implies A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq B_n$   
 – ограничены  
 $\implies$  у  $A_n$  есть конечный предел  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.
2. От противного.  
 $\sum b_n$  сходится  $\implies \sum a_n$  сходится.

$\square$

**Следствие.**

$$a_n, b_n \geq 0$$

1. Если  $a_n = O(b_n)$  и  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n$  сходится
2. Если  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  ведут себя одинаково.

**Доказательство.**

1.  $0 \leq a_n \leq Cb_n$
2. Выкидываем все нолики из  $b_n$   
 Тогда  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$   
 $\implies$  с некоторого места  $\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$   
 $\implies a_n < 2b_n < 4a_n$   
 Снова получили неравенство

$\square$

**Теорема 3.5** (признак Коши).

$$a_n \geq 0$$

1. Если  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , то ряд сходится
2. Если  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится

$$3. q^* := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Если  $q^* < 1$  сходится, то и ряд сходится.

Если  $q^* > 1$  расходится, то и ряд расходится.

**Доказательство.**

$$1. 0 \leq a_n \leq q^n$$

ряд мажорируется геометрической прогрессией, а значит сходится

2.  $a_n \geq 1$  не выполняется необходимое условие.

$$3. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q^* < 1$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$$

$$q := \frac{q^* + 1}{2}$$

начиная с некоторого момента  $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q$

Т.е.  $\sqrt[k]{a_k} < q$  при  $k \geq K$ , тогда по пункту 1 ряд сходится.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q^* > 1$$

$\implies \exists n_k$ , т.ч.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q^* > 1$$

$\implies$  начиная с некоторого номера  $K$

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

$$\implies a_{n_k} > 1 \text{ при } k \geq K$$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0$$

$\implies$  ряд расходится.

□

**Замечание.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  - сходится

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

**Теорема 3.6** (признак Даламбера).

$$a_n > 0$$

1. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$ , то ряд сходится.

2. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.

$$3. d^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если  $d^* < 1$ , то ряд сходится.

Если  $d^* > 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.**

$$1. a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$$\implies a_n \leq d^{n-1} a_1$$

Ряд, мажорирующийся геометрической прогрессией.

$$2. \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_n \leq a_{n+1} \implies$$

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \text{расходится}$$

$$3. d^* < 1$$

$$d := \frac{d^*+1}{2} < 1$$

$\implies$  начиная с некоторого номера  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$  попали в первый пункт, сходится

$$d^* > 1$$

$\implies$  с некоторого номера  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$\implies$  ряд расходится.

□

Упражнение. Если  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , то ряд сходится.

Если  $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , то ряд расходится.

**Пример.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

$$\text{По Даламберу } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

$\implies$  ряд сходится

По Коши.

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

**Теорема 3.7.**

$$a_n > 0$$

Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d^*$ , то существует и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  и он равен  $d^*$

**Доказательство.**

Применяем Штольца!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln d^*$$

□

Упражнение. Придумать ряд, про который критерий Коши позволяет выяснить, что он сходится, а критерий Даламбера нет.

**Теорема 3.8.**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и монотонна.

Тогда

$$\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$$

**Доказательство.**

Пусть функция монотонно возрастает. (В другом случае аналогично)

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=a+1}^b f(k)$$

$$-f(b) \leq \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=a}^b f(k) \leq -f(a)$$

$$\implies \left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$$

□

**Теорема 3.9 (Интегральный признак сходимости).**

$f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

И  $f$  монотонно убывает, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ и } \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Ведут себя одинаково.

**Доказательство.**

Из сходимости интеграла получим сходимость ряда.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \rightarrow L$$

$$\left| \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) \right| \leq \max\{f(1), f(n)\} \leq f(1)$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \leq F(n) - F(1) + f(1)$$

Но т.к.  $F(x)$  имеет предел, то правая часть ограничена.

А раз частичные суммы ограничены и слагаемые неотрицательны, то  $\sum f(n)$  сходится.

Теперь из сходимости ряда получим сходимость интеграла.

$$\left| \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) \right| \leq \max\{f(1), f(n)\} \leq f(1)$$

$$F(n) \leq S_n + f(1) + F(1)$$

Т.к.  $S_n$  имеет предел, то ограничена, значит,  $F(n)$  – ограниченная последовательность.

$$F(x) \leq F(\lfloor x \rfloor + 1) \leq M$$

$\implies F(x)$  монотонно возрастают и ограничены  $\implies$  предел есть.

$\implies$  интеграл сходится.

□

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Если  $p \leq 0$ , то  $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies$  ряд расходится

Если  $p > 0$ , то

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ , монотонно убывает

Тогда по интегральному признаку

Смотрим на  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

А он сходится при  $p > 1$ .

Т.е. ряд сходится  $\iff p > 1$

**Следствие.**

Если  $a_n \geq 0$  и  $a_n = O(\frac{1}{n^p})$ , при  $p > 1$ , то ряд сходится.

**Пример.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  монотонно убывает.

Можно смотреть на интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \infty$$

### 3.3. §2. Знакопеременные ряды

**Определение 3.1.**

$$z_n \in \mathbb{C}$$

$\sum \operatorname{Re} z_n$   $\sum \operatorname{Im} z_n$  – сходятся, то по определению сходится  $\sum z_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

$S_n := \sum_{k=1}^n z_k$  если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то ряд сходится и его сумма  $S$ .

Т.к.  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

**Определение 3.2.**

$\sum_{k=1}^{\infty} z_n$  – абсолютно сходится, если  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_n|$  сходится.

**Свойства.**

- $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  абсолютно сходятся, то  $\sum \alpha a_n + \beta b_n$  абсолютно сходится.
- $\sum z_n$  абсолютно сходится  $\iff \sum \operatorname{Re} z_n, \sum \operatorname{Im} z_n$  абсолютно сходятся
- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то  $|S| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Доказательство.**

$$1. |\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha| |a_n| + |\beta| |b_n|$$

2. “ $\implies$ ”

$$|\operatorname{Re} z_n| \leq |z_n|$$

$$|\operatorname{Im} z_n| \leq |z_n|$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$|z_n| \leq |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$$

$$3. |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

□

**Теорема 3.10.**

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

**Доказательство.**

$$(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$$

$$(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$$

$$a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$$

$$|a_n| = (a_n)_+ + (a_n)_-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

$\implies \sum (a_n)_+$  и  $\sum (a_n)_-$  сходятся, т.к. все положительно.

$\implies$  сходится и их разность, что есть  $\sum a_n$

□

Упражнение. Доказать теорему с помощью критерия Коши.

**Определение 3.3.**

$\sum a_n$  – условно сходящийся, если он сходится, но не абсолютно.

**Теорема 3.11** (Преобразование Абеля).

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{j=1}^n A_{j-1} b_j = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$

Заметим, что  $A_0 = 0$ ,

$$= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

**Теорема 3.12** (Признак Дирихле).

$$1. \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M \text{ при всех } n \in \mathbb{N}$$

2.  $b_n$  монотонна

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Доказательство.**

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$|A_n b_n| \leq M |b_n| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Осталось понять, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  – сходится.

Пусть  $b$  убывают.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M |b_k - b_{k+1}| = M \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$$

Заметим, что это сходится, т.к.

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \rightarrow b_1 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\implies \sum |A_k| |b_k - b_{k+1}| \text{ сходится} \implies \sum A_k (b_k - b_{k+1}) \text{ сходится.} \quad \square$$

**Теорема 3.13** (Признак Абеля).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится
2.  $b_n$  монотонна
3.  $|b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Из этого всего следует сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

**Доказательство.**

$b_n$  монотонна и ограничена  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$

$\tilde{b}_n := b_n - b$  монотонна и стремится к 0.

$$\sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\implies \sum_{k=1}^n a_k \text{ ограничена}$$

Т.е. для  $a$  и  $\tilde{b}$  выполнено условие признака Дирихле.

Значит, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$  сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_n + b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Первое слагаемое сходится по доказанному, второе слагаемое сходится по условию

Получаем, что и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится. □

**Определение 3.4.**

Знакопередающийся ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad a_n \geq 0$$

**Теорема 3.14** (Признак Лейбница).

Если  $a_n$  монотонно убывают и стремятся к 0, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  сходится.

Причем

$$S_{2n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq S_{2n+1}$$

**Доказательство.**

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$$

$$\text{Т.е. } 0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \dots$$

$$a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \dots + (-a_{2n} + a_{2n+1}) = S_{2n-1} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$$

$$\text{Т.е. } S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \dots$$

Получили последовательность вложенных отрезков.

$$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \dots$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$$

Тогда у них есть единственная точка пересечения и концы к ней стремятся.

Пусть  $S$  – та точка. Тогда

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$$

□

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

Если  $p \leq 0$ , то  $\left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| \geq 1$  и  $\not\rightarrow 0 \implies$  ряд расходится.

Если  $p > 0$   $a_n := \frac{1}{n^p} \searrow 0 \implies$  ряд сходится

**Пример (Ряд Лейбница).**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n = \ln 2n + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

**Пример.**

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{\ln 2}{2}$$

**Определение 3.5.**

$\sum a_n$  и  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – биекция.

$\sum a_{\varphi(n)}$  – перестановка ряда  $\sum a_n$

**Теорема 3.15.**

Если ряд  $\sum a_n$  абсолютно сходится, то  $\sum a_{\varphi(n)}$  тоже абсолютно сходится, и сумма рядов одинакова.

**Доказательство.**



$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$$

Случай 1.  $a_n \geq 0$   $S := \sum_{k=1}^n a_k$

$$\tilde{S}_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \dots + a_{\varphi(n)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m = S_m \leq S$$

$$m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$$

Т.е.  $\tilde{S} \leq S \implies$  ряд  $\sum a_{\varphi(n)}$  сходится  $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leq S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \leq S \implies \sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} \leq \sum a_{\varphi(n)} \leq S$$

Но  $\sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} = S$

$\implies$  сумма не поменялась.

Случай 2.  $a_n \in \mathbb{R}$   $\sum |a_n|$  сходится  $\implies \sum (a_n)_{\pm}$  сходятся

$$\sum (a_{\varphi(n)})_{\pm} \text{ сходятся и } \sum (a_{\varphi(n)})_{\pm} = \sum (a_n)_{\pm}$$

$$\implies \sum a_{\varphi(n)} = \sum (a_{\varphi(n)})_+ - \sum (a_{\varphi(n)})_- \text{ - сходится}$$

$$= \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_- = \sum a_n$$

Случай 3.  $a_n \in \mathbb{C}$   $\sum |a_n|$  сходится  $\implies |\operatorname{Re} a_n|$  и  $|\operatorname{Im} a_n|$  сходятся. □

**Замечание.**

1.  $a_n \geq 0$  и  $\sum a_n$  расходится  $\implies \sum a_{\varphi(n)}$  расходится.
2.  $\sum a_n$  - условно сходится, то  $\sum (a_n)_+$  и  $\sum (a_n)_-$  расходятся.

**Доказательство.** Обе эти штуки сходитья не могли, иначе бы сошлась сумма модулей, т.е. тогда бы сошелся модуль.

Ровно одна из них тоже сходитья не могла. Т.к. иначе бы ряд  $\sum a_n = \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_-$  расходился. □

**Теорема 3.16** (Римана).

$$a_n \in \mathbb{R} \quad \sum a_n \text{ условно сходится.}$$

Тогда для любого  $S \in \overline{\mathbb{R}}$  существует такая перестановка  $\varphi$ , что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$ .

И существует такая перестановка  $\varphi$ , что частичные суммы ряда  $\sum a_{\varphi(n)}$  вообще не имеют предела.

**Доказательство.**

Пусть  $S \in \mathbb{R}$ .

$b_1, b_2, b_3, \dots$  - неотрицательные члены ряда в порядке их следования в  $\{a_k\}$ .

$c_1, c_2, c_3, \dots$  - отрицательные члены ряда в порядке их следования в  $\{a_k\}$ .

$\sum b_n$  и  $\sum c_n$  расходятся.

Более того,  $\sum b_n = +\infty$   $\sum c_n = -\infty$

$\sum a_n$  сходится  $\implies a_n \rightarrow 0 \implies b_n \rightarrow 0, c_n \rightarrow 0$

$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > S \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1}$

$$\begin{aligned}
 & b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} < S \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1-1} \\
 & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > S \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \\
 & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2} > S \geq \\
 \geq & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2-1}
 \end{aligned}$$

И так далее.

$$|S_{\dots} - S| \leq |\text{последнего взятого элемента}| \rightarrow 0$$

$$S = +\infty$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > 1 \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - 1$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > 2 \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1}$$

И так далее. □

**Теорема 3.17 (Коши).**

$\sum a_n$   $\sum b_n$  – абсолютно сходятся.

$$A := \sum a_n, \quad B := \sum b_n$$

Тогда ряд, образованный из слагаемых  $a_n b_k$  в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна  $AB$

**Доказательство.**

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\tilde{A}_n := \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \tilde{B}_n := \sum_{k=1}^n |b_k|$$

$$\tilde{A} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \tilde{B} := \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

$\tilde{S}_m$  – частичная сумма ряда из  $|a_n b_k|$

Рассмотрим  $\tilde{S}_m$  и пусть  $l$  – наибольший номер, встречающийся в индексах из суммы  $\tilde{S}_m$

$$\tilde{S}_m \leq \sum_{j,k=1}^l |a_j| |b_k| = \sum_{j=1}^l |a_j| \sum_{k=1}^l |b_k| = \tilde{A}_l \tilde{B}_l \leq \tilde{A} \tilde{B} < +\infty$$

Частичные суммы  $\tilde{S}_m$  ограничены  $\implies$  ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала  $a_1 b_1$ , потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д.

$S_m$  – частичная сумма такого ряда

$$S_{n^2} = \sum_{j,k=1}^n a_j b_k = A_n B_n \rightarrow AB$$

Пусть  $n^2 \leq m \leq (n+1)^2$

$$S_m = S_{n^2} + \sum_{k=1}^{\dots} a_{n+1} b_k + \sum_{k=n}^{\dots} a_k b_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_{n+1}| |b_k| + \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n+1}| = |a_{n+1}| \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}| \tilde{A}_n \leq |a_{n+1}| \tilde{B} + |b_{n+1}| \tilde{A} \rightarrow 0$$

$$\implies S_n \rightarrow AB$$

□

**Определение 3.6.**

$$\sum a_n \text{ и } \sum b_n$$

Произведением рядов называется ряд  $\sum c_n$ , где  $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \dots + a_nb_1$

**Замечание.**

Пояснение, почему именно такое:

$$\sum_{k=1}^n a_k t^k \sum_{k=1}^n b_n t^k = \sum_{k=1}^{2n} c_k t^k$$

$$c_{n+1} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \dots + a_nb_1$$

**Теорема 3.18** (Мертенса).

$\sum a_n$  абсолютно сходится,  $\sum b_n$  сходится

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  (произведение рядов) сходится и его сумма равна  $AB$ .

**Замечание.**

Теорема идет без доказательства, но вот вам несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок.
2. Просто сходимости рядов не хватает.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + \dots + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-2} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$$

$n - 1$  слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \geq \frac{1}{n-1}$$

$|c_n| \geq 1 \implies$  ряд  $\sum c_n$  расходится.

**Теорема 3.19** (Абеля).

$$\sum a_n = A, \quad \sum b_n = B, \quad \sum c_n = C$$

И  $\sum c_n$  – произведение  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$

Тогда  $AB = C$ .

**Лемма.**

$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \dots + x_ny_1}{n} \rightarrow xy$$

**Доказательство.**

Пусть  $y = 0$ . надо доказать, что  $\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \dots + x_ny_1}{n} \rightarrow 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа  $M$ , что  $|x_n| \leq M \quad |y_n| \leq M \quad \forall n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n \geq N \quad |y_n| < \varepsilon$$

Возьмем  $n > N$ .

$$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + \dots + |x_ny_1|$$

Первые  $n - N$  слагаемых оценим сверху, как  $(n - N)M\varepsilon$ . Оставшиеся оценим как  $\leq M^2N$

$$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + \dots + |x_n y_1| \leq M\varepsilon(n-N) + M^2 N$$

$$\left| \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \right| \leq \frac{M\varepsilon(n-N) + M^2 N}{n} < \varepsilon M + \varepsilon M$$

(Последнее – при достаточно больших  $n$ ).

Пусть  $y_n = y$

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} y \rightarrow xy$$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$$\tilde{y}_n := y_n - y \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 \tilde{y}_n + x_2 \tilde{y}_{n-1} + \dots + x_n \tilde{y}_1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 y + x_2 y + \dots + x_n y}{n} \rightarrow xy$$

И сложим. Получим ровно то, что надо. □

**Доказательство.** (теоремы)

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB \text{ по лемме.}$$

Но что же написано в числителе?

$$a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b_1 =$$

$$= na_1 b_1 + (n-1)(a_1 b_2 + a_2 b_2) + (n-2)(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots =$$

$$= nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + \dots + c_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Получается, что знаем, что  $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow AB$

Но с другой стороны,  $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C$

$$\implies C = AB \quad \square$$

### 3.4. §3. Бесконечные произведения

**Определение 3.7.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

$P_n := \prod_{k=1}^n p_k$  – частичные произведения.

Если  $\exists P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ , т.ч.  $P \neq 0$  и  $P \neq \infty$ , то произведение сходится и  $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = P$

**Пример.**

1.  $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$

$$P_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdot \dots \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

2.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2})$

$$P_n = (1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{6^2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}{((2n)!!)^2} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}, \text{ при } 0 < x < 1$$

**Свойства.**

Считаем, что  $p_n \neq 0 \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ - сходится } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

**Доказательство.**

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$$

□

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ и } p_n > 0 \forall n$$

$$\text{Тогда } \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится } \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

**Доказательство.**

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

$$\ln P_n = \ln \left( \prod_{k=1}^n p_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln p_k =: S_n$$

$$S_n \text{ имеет предел } \iff \ln P_n \text{ имеет предел } \iff P_n \text{ имеет предел.}$$

□

**Пример.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}, \text{ где } p_n \text{ - } n\text{-ое простое число.}$$

$$\frac{p_n}{p_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$$P_n = \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geq \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

$$\text{Вывод: } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится.}$$

$$\text{Более того } P_n \geq \ln n + o(1)$$

**Теорема 3.20.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ расходится, где } p_n \text{ - } n\text{-ое простое число.}$$

**Доказательство.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{p_n}{p_n - 1} \right) \text{ - расходится}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{x-1} &= \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \\ &-2t \leq \ln(1-t) \text{ при достаточно малых } t. \\ &\leq -2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \\ &\implies \sum \frac{1}{p_n} \text{ расходится.} \end{aligned}$$

□

*Замечание.*

На самом деле

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$$

### 3.5. §4. Функциональные последовательности и ряды.

**Определение 3.8.**

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$f_n$  поточечно сходится к  $f$  на множестве  $E$ , если  $\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

**Определение 3.9.**

$f_n$  равномерно сходится к  $f$  на множестве  $E$ .

$f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*Замечание переформулировка.*

Поточечная

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Пример.**

$$f_n(x) = x^n \quad E = (0, 1)$$

$f \equiv 0$   $f_n$  сходится к  $f$  поточечно.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in (0, 1) \quad x^n < \varepsilon$  – выполняться не будет уже при  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , значит, равномерной сходимости нет.

*Замечание.*

Если  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ , то  $f_n$  поточечно сходится к  $f$  на  $E$ .

**Теорема 3.21.**

$f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что это:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Но } \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)| \forall x \in E$$

□

**Следствие.**

$$1. |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Тогда  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ .

$$2. \text{ Если } \exists x_n \in E, \text{ т.ч. } f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0, \text{ то } f_n \not\rightrightarrows f$$

**Доказательство.**

$$1. \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$2. \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

□

**Пример.**

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \neq 0$$

**Определение 3.10.**

$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  – равномерно ограничена, если

$$\exists M \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq M$$

**Теорема 3.22.**

$f_n$  равномерно ограничена,  $g_n \rightrightarrows 0$  на  $E$  ( $f_n, g_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ )

Тогда  $f_n g_n \rightrightarrows 0$  на  $E$

**Доказательство.**

$$\sup_{x \in E} |g_n(x)| \rightarrow 0$$

$$|f_n(x)g_n(x)| \leq M |g_n(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)g_n(x)| \leq M \cdot \sup_{x \in E} |g_n(x)| \rightarrow 0$$

□

**Теорема 3.23** (критерий Коши).

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$f_n$  равномерно сходится на  $E$  к некоторой функции  $\iff$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

Пусть  $f_n \rightrightarrows f$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > N \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

“ $\impliedby$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Зафиксируем  $x \in E$  и рассмотрим числовую последовательность  $f_n(x)$ .

$f_n(x)$  – фундаментальная последовательность, тогда у нее есть предел.

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$\implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (т.к. } f_m(x) \rightarrow f(x))$$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \text{ на } E. \quad \square$$

**Определение 3.11.**

$$E \quad l^\infty(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

т.е. это ограниченные функции

$$\|f\|_{l^\infty(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

Покажем неравенство треугольника:

$$\|f + g\|_{l^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| = \|f\|_{l^\infty(E)} + \|g\|_{l^\infty(E)}$$

$$\|g\|_{l^\infty(E)}$$

$$f_n \rightrightarrows f \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Заметим, что это равносильно сходимости  $f_n$  к  $f$  в нормированном пространстве (по нашей же норме).

**Теорема 3.24.**

$l^\infty(E)$  – полное.

**Доказательство.**

Пусть  $f_n$  фундаментальная последовательность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} < \varepsilon$$

$$\text{Но } \|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| > |f_n(x) - f_m(x)| \quad \forall x \in E$$

$$\implies \text{по критерию Коши } f_n \rightrightarrows f, \text{ где } f \text{ – некоторая функция : } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Осталось понять, что  $f \in l^\infty(E)$ , т.е. что  $f$  – ограниченная функция.

$$\varepsilon = 1 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < 1$$

Зафиксируем  $n$ .

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x)| + 1 \leq \|f_n\| + 1 \quad \square$$

**Теорема 3.25.**

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$



И  $f_n$  непрерывна в точке  $a \in E$ ,  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$   
 $\implies f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Доказательство.**

Если  $a$  не предельная точка в  $E$ , то все функции там непрерывны.

Пусть  $a$  – предельная точка множества  $E$ .

Тогда надо проверить, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

По определению равномерной сходимости  $\exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Зафиксируем  $n > N$ . Функция  $f_n$  непрерывна в точке  $a$ .

$$\exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \quad |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Если  $|x - a| < \delta$  и  $x \in E$ , то

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \square$$

**Следствие теорема Стокса-Зайделя.**

$f_n \in C(E)$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$

$\implies f \in C(E)$ .

**Определение 3.12.**

Пусть  $K$  – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ непрерывные}\}$

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|.$$

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

**Замечание.**

$C(K)$  подпространство  $l^\infty(K)$ .

**Теорема 3.26.**

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

**Доказательство.**

$Y \subset X$   $Y$  – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$  – фундаментальная последовательность в  $X$ .

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$

$\implies x$  – предельная точка множества  $Y$ .

И т.к.  $Y$  замкнуто, то  $x \in Y$ .

$\implies x_n$  сходится к  $x$  в пространстве  $Y$ . □

**Следствие.**

$C(K)$  – полное

**Доказательство.**

Надо доказать, что  $C(K)$  замкнуто в  $l^\infty(K)$ .

Т.е. если  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ , то  $f \in C(K)$ .

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

**Определение 3.13.**

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  – функциональный ряд

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ – частичная сумма.}$$

Если  $S_n$  поточечно сходится к  $S$ , то ряд поточечно сходится, если  $S_n \rightrightarrows S$ , то ряд равномерно сходится.

**Определение 3.14.**

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится поточечно

$$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x) \text{ – остаток функции ряда.}$$

**Теорема 3.27.**

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

$$\iff r_n \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

**Доказательство.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \iff S_n \rightrightarrows S \text{ на } E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0 \quad \square$$

**Теорема 3.28 (Критерий Коши).**

$\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

$\sum u_n(x)$  равномерно сходится  $\iff S_n \rightrightarrows S$  на  $E$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = |S_{n+p} - S_n| \quad \square$$

**Следствие Необходимое условие сходимости функции ряда.**

Если ряд  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится, то  $u_n \rightrightarrows 0$ .

**Доказательство.**

Возьмем критерий Коши и  $p = 1$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E |u_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

Это определение равномерной сходимости  $u_n \rightrightarrows 0$ . □

**Замечание.**

1. Если  $x_n \in E$ , для которой  $u_n(x_n) \not\rightarrow 0$ , то  $\sum u_n(x)$  не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд  $\sum u_n(x_n)$  расходится ничего не следует

**Пример.**

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n} - \text{расходится.}$$

**Теорема 3.29** (признак сравнения).

$$u_n, v_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

$$|u_n(x)| \leq v_n(x) \quad \forall x \in E \text{ и } \sum v_n(x) \text{ равномерно сходится на } E.$$

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

**Доказательство.**

$$\sum v_n(x) \text{ равномерно сходится на } E \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right|$$

$$\implies \text{выполнен критерий Коши для } \sum u_n(x)$$

$$\implies \sum u_n(x) \text{ равномерно сходится на } E \quad \square$$

**Следствие Признак Вейерштрасса.**

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } |u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in E$$

и  $\sum c_n$  сходится.

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

**Доказательство.**

$$v_n(x) := c_n \implies \sum v_n(x) \text{ равномерно сходится} \quad \square$$

**Следствие.**

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } \sum |u_n(x)| - \text{равномерно сходится на } E.$$

Тогда  $\sum u_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

**Доказательство.**

$$v_n(x) := |u_n(x)| \quad \square$$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \text{ равномерно сходится.}$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится по признаку Вейерштрасса.}$$

**Теорема 3.30** (Признак Дирихле).

$$a_n, b_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

1.  $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K \quad \forall n \quad \forall x \in E$

2.  $b_n \Rightarrow 0$  на  $E$ .

3. При любом фиксированном  $x \in E$   $b_n(x)$  монотонно по  $n$ .

Тогда  $\sum a_n(x)b_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

**Доказательство.**

$$\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

$$A_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$$

Надо доказать, что эта сумма равномерно сходится.

$A_n(x)b_n(x)$  – произведение равномерно ограничено на  $\Rightarrow 0$

$$\Rightarrow A_n(x)b_n(x) \Rightarrow 0$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \Rightarrow$$

Т.е. надо доказать, что  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$  равномерно сходится.

А для этого достаточно  $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))|$  равномерно сходится.

$$\sum_{k=1}^n |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leq K \sum_{k=1}^n |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = K \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| = K |b_1(x) - b_{n+1}(x)|$$

$$K \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| - \text{равномерно сходится к } K |b_1(x)|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \text{ равномерно сходится.} \quad \square$$

**Следствие Признак Лейбница.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$$

$$b_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

1.  $b_n(x)$  монотонная по  $n$  при любом фиксированном  $x \in E$
2.  $b_n \Rightarrow 0$  на  $E$ .

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

**Доказательство.**

$$a_n := (-1)^{n-1} \quad A_n = \begin{cases} 1 & n - \text{нечетно} \\ 0 & n - \text{четно} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  по признаку Дирихле равномерно сходится. □

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad x \in (0, 1)$$

Равномерно сходится по признаку Лейбница  $\frac{x^n}{n} \searrow \quad \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n} \Rightarrow 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ сходится по признаку Коши } \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} \rightarrow x < 1$$

$\Rightarrow$  ряд абсолютно сходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  не сходится равномерно.

По критерию Коши:

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} > \frac{1}{2} \text{ при } x \text{ близких к } 1.$$

**Теорема 3.31** (Признак Абеля).

$$a_n, b_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

1.  $\sum_{k=1}^n a_k(x)$  равномерно сходится
2.  $|b_n(x)| \leq K \quad \forall x \in E \quad \forall n.$
3. При любом фиксированном  $x \in E$   $b_n(x)$  монотонно по  $n$ .

Тогда  $\sum a_n(x)b_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

**Доказательство.**

Критерий Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Напишем для  $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)$  преобразование Абеля.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=1}^p a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) = (A_{n+p}(x) - A_n(x))b_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))$$

$$|(A_{n+p}(x) - A_n(x))b_{n+p}(x)| \leq K |A_{n+p}(x) - A_n(x)| = K \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходится} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$$

Выбираем  $N$  и  $\forall n > N \implies$  первое слагаемое  $< K\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}(x) - A_n(x)| |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k}(x)|$$

$$\varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| = \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)| \leq 2K\varepsilon$$

$$\exists N \forall n > N \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < K\varepsilon + 2K\varepsilon = 3K\varepsilon$$

Проверили критерий Коши, получили равномерную сходимость. □

### 3.6. §5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

**Теорема 3.32.**

$$f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$a$  – предельная точка множества  $E$ .

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E.$$

$$\text{И } b_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Тогда пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существуют и равны.

$$\text{Т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

**Доказательство.**

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E$$

$\implies$  по Критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| \leq \varepsilon$$

– критерий Коши для последовательности  $\{b_n\} \implies$  существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Функции  $g_n$  непрерывны в точке  $a$ .

$$g_n \rightrightarrows g \text{ на } E \cap \{a\}$$

$\implies g$  непрерывна в точке  $a$

$$\implies b = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

□

**Следствие.**

$$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывна и } f_n \rightrightarrows f \text{ на } (a, b)$$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a, b]$$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ нет равномерной сходимости на } (0, 1)$$

От противного. Пусть есть равномерная сходимость на таком промежутке. Тогда есть и на  $[0, 1]$ .

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{сходится. Получили противоречие.}$$

**Теорема 3.33.**

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ а предельная точка } E \quad b_n := \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \text{равномерно сходится. Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится.}$$

$$\text{И } \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

**Доказательство.**

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow B_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n \text{ при } x \rightarrow a.$$

$$S_n \rightrightarrows S := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$$\text{Тогда по предыдущей теореме } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{x \rightarrow a} S(x)$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

□

**Следствие.**

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$u_n$  непрерывная в точке  $a$ .

И  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится

$\implies \sum u_n(x)$  непрерывная в точке  $a$ .

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$$

□

**Теорема 3.34.**

$$f_n \in C[a, b] \stackrel{\text{н.с.}}{\implies} f \text{ на } [a, b] \quad c \in [a, b]$$

Тогда  $\int_c^x f_n(t) dt \implies \int_c^x f(t) dt$  равномерно по  $x \in [a, b]$

$$\text{В частности, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

**Доказательство.**

$$\left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| = \left| \int_c^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon(b-a)$$

$$f_n \implies f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall t \in [a, b] \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

□

**Следствие.**

$$u_n \in [a, b] \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ равномерно сходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt \text{ равномерно сходится к } \int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

$$\text{В частности, } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

**Доказательство.**

$$\text{Теорема для } f_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

□

**Пример.**

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \text{ на } [0, 1]$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x \in [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-nx^2}}{2} \right|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

**Теорема 3.35.**

$$f_n \in C^1[a, b] \quad f'_n \text{ равномерно сходятся к } g.$$

$$f_n(c) \rightarrow A \quad c \in [a, b]$$

Тогда  $f_n$  равномерно сходится на  $[a, b]$ . Если  $f$  – предельная функция, то  $f' = g$ .

Т.е. в частности

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

**Доказательство.**

$$\int_c^x g(t) dt \Leftarrow \int_c^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(c)$$

$$f'_n \Rightarrow g$$

$$f_n(x) = (f_n(x) - f_n(c)) + f_n(c) \Rightarrow \int_c^x g(t) dt + A = f(x)$$

$$\Rightarrow f' = g$$

□

**Следствие.**

$u_n \in C'[a, b]$   $c \in [a, b]$   $\sum u'_n(x)$  равномерно сходится.

$\sum u_n(x)$  сходится. Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

**Доказательство.**

$$f_n := \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

□

**Пример.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\right)' \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  – расходится при  $x = 2\pi k$

Т.е. равенства нет.

### 3.7. §6. Степенные ряды

**Определение 3.15.**

Степенной ряд с центром в  $z_0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

$$w := z - z_0$$

Степенной ряд с центром в 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

**Теорема 3.36.**

Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится при  $z = z_0$ .

Тогда он сходится при  $\forall |z| < |z_0|$

**Доказательство.**

$$\sum a_n z_0^n \text{ сходится} \Rightarrow a_n z_0^n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a_n z_0^n - \text{ограничена, т.е. } |a_n z_0^n| \leq M$$

$$\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n - \text{абсолютно сходится.}$$

$$\left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n - \text{геометрическая прогрессия с основанием } < 1 \Rightarrow \text{сходится.}$$

□

**Следствие.**

$\sum a_n z^n$  расходится при  $z = z_0$ , то он расходится и при  $|z| > |z_0|$



**Доказательство.**

От противного. □

**Определение 3.16.**

Радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  – такое  $R \in [0, +\infty]$ , что ряд сходится при  $|z - z_0| < R$  и расходится при  $|z - z_0| > R$

Круг сходимости – круг радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$ .

**Лемма.**

$$x_n, y_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, +\infty)$$

$$\text{Тогда } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

**Доказательство.**

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad B := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad C := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$$

Надо доказать, что  $AB = C$

“ $\leq$ ”

$B$  – верхний предел  $\implies \exists n_1, n_2, \dots$ , т.ч.  $y_{n_k} \rightarrow B$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = AB$$

$AB$  – частичный предел  $x_n y_n$

$C$  – верхний предел = наибольший из частичных

$$AB \leq C$$

“ $\geq$ ”

$C$  – верхний предел.

$$\implies \exists n_1, n_2, \dots \quad x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C$$

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k} \implies \frac{C}{A} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k}}{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$$

$\frac{C}{A}$  – частичный предел для  $y_n$

$B$  – -верхний предел = наибольший из частичных.

$$\frac{C}{A} \leq B$$

□

**Замечание.**

$$\overline{\lim} x_n y_n \neq \overline{\lim} x_n \overline{\lim} y_n$$

$$x_n = \begin{cases} 0 & n - \text{четно} \\ 1 & n - \text{нечетно} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 1 & n - \text{четно} \\ 0 & n - \text{нечетно} \end{cases}$$

$$x_n y_n \equiv 0$$

$$\overline{\lim} x_n = \overline{\lim} y_n = 1$$

**Теорема 3.37** (Формула Коши-Адамара).

Радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  существует и равен  $\frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

**Доказательство.**

Применим признак Коши к ряду.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ряд сходится, если  $|z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |z| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ряд расходится, если  $|z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \iff |z| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$\implies R = |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |z| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  – радиус сходимости. □

**Замечание.**

Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно.

**Пример.**

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{1}{n/e} = \frac{e}{n} \rightarrow 0$$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad R = 0$

**Замечание.**

Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , то существует и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  и они равны.

$\implies$  если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , то  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

**Теорема 3.38.**

$R$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

и  $0 < r < R$ . Тогда в круге  $|z| \leq r$  ряд сходится равномерно.

**Доказательство.**

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  – сходится абсолютно.

Если  $|z| \leq r$ , то

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$$

$\implies$  по признаку Вейерштрасса будет равномерная сходимость. □

**Следствие.**

Сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости.

**Доказательство.**

$$|z_0| < R$$

И берем  $r : |z_0| < r < R$

Ряд равномерно сходится в круге  $|z| < r$

$\implies$  его сумма непрерывна в круге  $|z| < r$

$\implies$  непрерывна в точке  $z_0$  (т.к. это внутренняя точка круга) □

**Теорема 3.39 (Абеля).**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и  $R$  – его радиус сходимости.

Если он сходится при  $z = R$ , то он равномерно сходится на  $[0, R]$ .

В частности,  $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

**Доказательство.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  сходится (равномерно, т.к. от  $x$  не зависит)

$\left(\frac{x}{R}\right)^n$  монотонно убывает при любом фиксированном  $x$ .

$$0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$$

$\implies$  по признаку Абеля ряд сходится равномерно.

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  непрерывна на  $[0, R]$ . □

**Лемма.**

Радиусы сходимости  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  одинаковы.

**Доказательство.**

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n+1]} \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$
□

**Теорема 3.40.** Радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$$\text{Тогда } \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

$$|x - x_0| < R$$

**Доказательство.**

$$r := |x - x_0| < R.$$

В круге  $|t - x_0| \leq r$  ряд сходится равномерно.

Тогда можно менять местами  $\int$  и  $\sum$  □

**Определение 3.17.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{C} \quad E \subset \mathbb{C}$$

$$a \in \text{Int } E$$

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

**Определение 3.18.**

$$F : E \rightarrow \mathbb{C} \quad E \subset \mathbb{C}$$

$$a \in \text{Int } E$$

$f$  – комплексно дифференцируема в точке  $a$ .

Если  $\exists k \in \mathbb{C}$

$$f(z) = f(a) + k(z - a) + o(z - a) \text{ при } z \rightarrow a$$

**Замечание.**

$$k = f'(a)$$

И существование производной равносильно дифференцируемости.

**Теорема 3.41.**

$R$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z)$

Тогда  $f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\dots(n-m+1)(z - z_0)^{n-m}$

При  $|z - z_0| < R$

**Доказательство.**

Докажем для  $m = 1$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Берем  $r : |z - z_0| < r < R$

Знаем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$  сходится в круге  $|z - z_0| < R$ .

$\implies$  он равномерно сходится в круге  $|z - z_0| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w z^{n-2} + z^{n-1}) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{w \rightarrow z} (w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w z^{n-2} + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

Осталось проверить равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w z^{n-2} + z^{n-1})$  при  $|w| \leq r$

$|a_n (w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w z^{n-2} + z^{n-1})| \leq |a_n| n r^{n-1}$  такой ряд сходится. Пользуемся признаком Вейерштрасса.

Для  $m = 1$  показали. А дальше по индукции.

При дифференцировании радиус сходимости не меняется

$$f''(z) = (f'(z))' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

И так далее... □

**Теорема 3.42** (о единственности разложения функции в степенной ряд).

Пусть  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  в круге  $|z - z_0| < R$

Тогда  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

**Доказательство.**

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n (z - z_0)^{n-m}$$

Подставим  $z = z_0$

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 a_m = m! a_m$$
□

**Определение 3.19.**

Ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

**Пример.**

Бесконечно дифференцируемости не достаточно для того, чтобы функция разложилась в ряд Тейлора:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Если она бесконечно дифференцируема в нуле, то все ее производные  $f^{(n)}(0) = 0$

$\implies$  ряд Тейлора  $\equiv 0$ .

$$(e^{-1/x^2})' = e^{-1/x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3}$$

$(\dots)' = e^{-1/x^2}(\dots)$  – в скобочках – какая-то рациональная функция.

Такого же вида и останется.

Т.е. все производные устроены одинаково

$$(e^{-1/x^2})^{(n)} = e^{-1/x^2} \cdot \text{рациональная функция} = e^{-1/x^2} P_n(x)$$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} P_n(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \text{рациональная функция} = 0.$$

### 3.7.1. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Уже знаем, что при любом  $x \in \mathbb{R}$ :

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

#### Определение 3.20.

Определим все для комплексных чисел:

$x \in \mathbb{C}$ :

$$1. e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$2. \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

#### Утверждение 3.43 (Формула Эйлера).

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad z \in \mathbb{C}$$

Упражнение:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Продолжим про то, что знаем (или почти знаем)

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad x \in (-1, 1)$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1, 1)$$

**Доказательство.**

$$4. \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{при } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$5. \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

$$6. (1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n =: S(x) \quad \text{при } x \in (-1, 1)$$

**Доказательство.**

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p(p-1)\dots(p-n+1) \cdot (n+1)!}{n! \cdot p(p-1)\dots(p-n+1)(p-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(p-n)} \right| = 1$$

Хотим доказать, что  $S(x) = (1+x)^p$  при  $x \in (-1, 1)$

$$f(x) := \frac{S(x)}{(1+x)^p} \quad \text{при } x \in (-1, 1)$$

$$f(0) = 1$$

Надо доказать, что  $f'(x) \equiv 0$   $f'(x) = S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1}(S'(x)(1+x) - pS(x))$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \cdot x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \cdot x^n$$

$$(1+x)S'(x) = S'(x) + xS'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!} x^n \stackrel{?}{=} pS(x)$$

Смотрим на коэффициент при  $x^n$

$$\text{Слева} - \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!}$$

$$\text{Справа} - p \cdot \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}$$

$$p(p-1)\dots(p-n) + p(p-1)\dots(p-n+1) \cdot n = p \cdot p(p-1)\dots(p-n+1)$$

$$(p-n) + n = p - \text{действительно.}$$

□

6'. Частный случай  $p = -\frac{1}{2}$

$$p(p-1)\dots(p-n+1) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n} = (-1)^n (2n-1)!! \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$$

$$1. \operatorname{arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

**Доказательство.**

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \square$$

## 4. 8. Функции многих переменных

### 4.1. §1. Дифференцируемость отображений

#### Определение 4.1.

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad a \in \text{Int } E$$

$f$  – дифференцируема в точке  $a$ , если существует такое линейное отображение  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , что

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \text{ при } h \rightarrow 0$$

Запись  $g(h) = o(\|h\|)$  означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0$$

$T$  – дифференциал  $d_a f$

#### Замечание.

$T$  определено однозначно.

Зафиксируем  $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a + th) = f(a) + T(th) + o(\|th\|) = f(a) + t \cdot T(h) + o(|t| \cdot \|h\|)$$

$$f(a + th) = f(a) + t \cdot Th + o(t)$$

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Th + o(1)$$

$$\implies Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

#### Определение 4.2.

Матрица отображения  $T$  размера  $n \times m$  – матрица Якоби. Обозначать ее будем  $f'(a)$

#### Замечание.

Если  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , то  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \quad h \xrightarrow{\rightarrow} 0 \quad f(a)$$

Важный частный случай  $m = 1$ .

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$$

$$f(a + h) = f(a) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$$

$v$  – градиент функции  $f$  в точке  $a$ .

$\text{grad } f$  или  $\nabla f$

#### Пример Дифференцируемых функций.

- $f(x) \equiv \text{const}$

$$f(a + h) = f(a) + 0 \cdot h + 0$$

- $f$  – линейно отображение

$$f(a + h) = f(a) + f(h) + o$$

$$d_a f = f$$

$f'(a)$  – матрица линейного отображения  $f$ .



**Замечание.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad f_k : E \rightarrow \mathbb{R} - \text{координатные функции.}$$

**Теорема 4.1.**

$f$  – дифференцируема в точке  $a \iff f_k$  – дифференцируема в точке  $a \quad \forall k = 1 \dots m$

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 h \\ T_2 h \\ \vdots \\ T_m h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix} = o(\|h\|) \iff \frac{\sqrt{g_1(h)^2 + \dots + g_m(h)^2}}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{g_1(h)}{\|h\|} \\ \frac{g_2(h)}{\|h\|} \\ \vdots \\ \frac{g_m(h)}{\|h\|} \end{pmatrix} \rightarrow 0 \iff \frac{g_k(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \forall k = 1 \dots m$$

$$f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + g_k(h)$$

$\implies$   $k$ -ая координата дифференцируема в точке  $a$ .

“ $\impliedby$ ”

Все рассуждения, которые мы провели, обращаются назад. □

**Следствие.**

Строки матрицы Якоби – градиенты координатных функций.

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

**Определение 4.3.**

Производная по направлению.

$$\|h\| = 1$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$  – производная функции  $f$  в точке  $a$  по направлению  $h$ .

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

**Замечание.**

$$g(t) = f(a+th) \quad \frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$$

**Теорема 4.2.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

$f$  – дифференцируема в точке  $a$ ,  $\|h\| = 1 \quad h \in \mathbb{R}^n$

Тогда  $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = (d_a f)(h) = \langle \text{grad } f, h \rangle$

**Доказательство.**

$$f(a + th) = f(a) + t \cdot d_a f(h) + o(t) \quad t \rightarrow 0$$

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = d_a f(h) + o(1)$$

Переходим к  $\lim_{t \rightarrow 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h)$$

□

**Следствие 1. Экстремальное свойство градиента.**

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E \quad f$  – дифференцируема в точке  $a$ .

Тогда  $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad \|h\| = 1$

$$-\|\text{grad}_a f\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\text{grad}_a f\|$$

Причем равенство  $\iff h = \pm \frac{\text{grad}_a f}{\|\text{grad}_a f\|}$

**Доказательство.**

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \text{grad}_a f, h \rangle$$

$|\langle \text{grad}_a f, h \rangle| \leq \|\text{grad}_a f\| \cdot \|h\| = \|\text{grad}_a f\|$  – неравенство Коши-Буняковского

Но равенство достигается  $\iff h$  и  $\text{grad}_a f$  пропорциональны.

□

**Определение 4.4.**

$$e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Частная производная по  $k$ -й координате

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k} := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_k)$$

$$f(x + te_k) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_k + t) - g(x_k)}{t} = g'(x_k)$$

**Следствие 2..**

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \text{grad}_a f, e_k \rangle$  –  $k$ -ая координата градиента

$$\text{grad}_a f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

**Следствие 3..**

$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } a \quad f$  дифференцируема в точке  $a$ .

То

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

**Пример.**

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

**Теорема 4.3** (линейность дифференцирования).

$$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

$f, g$  – дифференцируемы в точке  $a$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$f \pm g, \lambda f$  – дифференцируемы в точке  $a$

$$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$$

**Доказательство.**

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(\|h\|)$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(\|h\|)$$

□

**Теорема 4.4** (дифференцирование композиции).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad g : E \rightarrow \mathbb{R}^l \quad E \subset \mathbb{R}^m$$

$$a \in \text{Int } D \quad f(a) \in \text{Int } E \quad f(D) \subset E$$

Тогда  $g \circ f$  – дифференцируема в точке  $a$  и

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$$

**Замечание.**

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

**Доказательство.**

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\| \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$b := f(a) \quad g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| \quad \|k\| \rightarrow 0$$

$$k := d_a f(h) + o(\|h\|) \quad \|k\| \leq \|d_a f(h)\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \leq \|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

$$g(f(a+h)) = g(f(a)+k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| = g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) = \\ g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\|$$

$$\text{Хотим показать, что } d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| = o(\|h\|)$$

$$d_b g(\alpha(h)\|h\|) = \|h\| \cdot d_b g(\alpha(h))$$

$$\|d_b g(\alpha(h)\|h\|)\| = \|h\| \cdot \|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\|, \text{ а } \|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\| \rightarrow 0$$

$$\|\beta(k)\| \|k\| = \|k\| \cdot \|\beta(k)\| \leq \|\beta(k)\| (\|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\|) = \|h\| \cdot \|\beta(k)\| (\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|).$$

$$\text{А } \|\beta(k)\| (\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|) \rightarrow 0.$$

Все получили. □

**Теорема 4.5** (о дифференцировании произведения скаляра и векторной функции).

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  и  $\lambda$  – дифференцируемы в точке  $a$ , тогда  $\lambda f$  – дифференцируема в точке  $a$ .

$$d_a(\lambda f) = d_a \lambda f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f$$

**Доказательство.**

$$\lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a+h)(f(a+h) - f(a)) + (\lambda(a+h) - \lambda(a))f(a) =$$

$$f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + o(\|h\|)$$

$$\lambda(a+h) - \lambda(a) = d_a \lambda(h) + o(\|h\|)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda(a+h)(d_a f(h) + o(\|h\|)) + (d_a \lambda(h) + o(\|h\|))f(a) = (\lambda(a) + d_a \lambda(h) + o(\|h\|))(d_a f(h) + o(\|h\|)) + \\
 &(d_a \lambda(h) + o(\|h\|))f(a) = \\
 &= \lambda(a)d_a f(h) + d_a \lambda(h)f(a) + \lambda(a)o(\|h\|) + d_a \lambda(h) \cdot o(\|h\|) + o(\|h\|) \cdot o(\|h\|) + d_a \lambda(h)d_a f(h) + o(\|h\|)d_a f(h) + \\
 &o(\|h\|)f(a)
 \end{aligned}$$

Про последние много слагаемых хотим сказать, что они  $o(\|h\|)$ .

Самое не очевидное –

$$\|d_a \lambda(h) \cdot d_a f(h)\| = |d_a \lambda(h)| \|d_a f(h)\| \leq \|d_a \lambda\| \cdot \|h\| \cdot \|d_a f\| \cdot \|h\| = const \cdot h^2 = o(h) \quad \square$$

**Теорема 4.6** (о дифференцировании скалярного произведения).

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{int} E \quad f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$f, g$  – дифференцируемы в точке  $a$ .

Тогда  $\langle f, g \rangle$  – дифференцируема в точке  $a$  и:

$$d_a \langle f, g \rangle (h) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle$$

**Доказательство.**

$$F := \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^m f_k g_k$$

$d_a(f_k g_k) = d_a f_k \cdot g_k(a) + f_k(a) d_a g_k$  – частный случай предыдущей теоремы.

$$dF = \sum_{k=1}^m d_a(f_k g_k) = \sum_{k=1}^m (d_a f_k g_k(a) + f_k(a) d_a g_k)$$

$$dF(h) = \sum_{k=1}^m d_a f(h) g_k(a) + \sum_{k=1}^m f_k(a) d_a g_k(h) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle \quad \square$$

**Замечание.**

Частный случай, когда  $n = 1$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix}$$

$$(\langle f(x), g(x) \rangle)' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$$

**Теорема 4.7** (Лагранжа для векторзначных функций).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$   $f$  – непрерывна на всем отрезке, дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , т.ч.  $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b - a)$

**Доказательство.**

$$\varphi(t) = \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Напишем одномерную теорему Лагранжа для  $\varphi$

$$\exists c \in (a, b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle \leq (b - a) \|f'(c)\| \cdot \|f(b) - f(a)\|$$

Теперь можем сократить на  $\|f(b) - f(a)\|$  и получить нужное неравенство (если  $\|f(b) - f(a)\| = 0$ , то теорема очевидна)

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = (b - a) \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle \quad \square$$

**Замечание.**

Равенства может не быть ни в какой точке  $c$ .

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\|f(2\pi) - f(0)\| = 0 < 2\pi = (2\pi - 0)\|f'(t)\|$$

### 4.2. §2. Непрерывная дифференцируемость

**Теорема 4.8.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

И у функции  $f$  в точке  $a$  существуют все частные производные и они непрерывны.

Тогда функция  $f$  дифференцируема в точке  $a$ .

**Доказательство.**

$$R(h) = f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k \stackrel{?}{=} o(\|h\|)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$b_0 = a$$

$$b_1 = (a_1 + h, a_2, \dots, a_n)$$

$$b_2 = (a_1 + h, a_2 + h, \dots, a_n)$$

...

$$b_n = (a_1 + h, a_2 + h, \dots, a_n + h)$$

$$F_k(t) = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + th_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$$

$$f(a + h) - f(a) = F_0(1) - F_0(0) + F_1(1) - F_1(0) + \dots + F_{n-1}(1) - F_{n-1}(0) = F_{n-1}(1) - F_0(0)$$

$$F_k(1) - F_k(0) = F'_k(\theta_k) \quad \theta_k \in (0, 1)$$

$$F_k(1) - F_k(0) = F'_k(\theta_k) = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_k) \cdot h_k, \text{ где } e_k \text{ - вектор с единичкой на месте } k.$$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_{k+1})h_{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k\theta_{k-1}e_k)h_k$$

$$R(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k\theta_{k-1}e_k)h_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1}h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) h_k$$

$$\|R(h)\| \leq \|h\| \cdot \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1}h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Второй множитель стремится к 0 при  $h \rightarrow 0$ . □

**Замечание.**

Обратное неверно. Дифференцируемость не дает непрерывности частных производных и даже существование в окрестности.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{если ровно одно из чисел рационально} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$f$  - дифференцируема в нуле.

$$f(x, y) = f(0, 0) + o + 0(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Но  $f$  даже не будет непрерывна в точках, отличных от  $(0, 0)$ .

**Определение 4.5.**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } D$$

$f$  – непрерывно дифференцируема в точке  $a$ , если

$f$  дифференцируема в окрестности точки  $a$  и  $d_x f$  непрерывна в точке  $a$ .

(т.е.  $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ )

**Теорема 4.9.**

$f$  – непрерывно дифференцируема в точке  $a \iff$

все частные производные  $f$  существуют в окрестности точки  $a$  и непрерывны в точке  $a$ .

**Доказательство.**

“ $\implies$ ”

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = d_x f_j(e_k)$$

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right| = |d_x f_j(e_k) - d_a f_j(e_k)| = |(d_x f_j - d_a f_j)(e_k)| \leq \|d_x f_j - d_a f_j\| \leq \|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$$

“ $\impliedby$ ”

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0 \quad \square$$

**4.3. §3. Частные производные высших порядков.**

**Определение 4.6.**

$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D$  – открытое множество.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$$

**Пример.**

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$$

**Пример.**

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4 - y^4) - 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Но в силу антисимметричности  $x$  и  $y$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

**Теорема 4.10.**

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in \text{Int } E$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  существуют в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$

Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

**Доказательство.**

$$\Delta := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

$$\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$$

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$$

Применяем теорему Лагранжа для одномерного случая:

$$\Delta = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \theta_1 \in (0, 1)$$

$$\Delta = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right) = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0)) = hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$$

$$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$$

$$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

Получили, что

$$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

□

**Определение 4.7.**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad R \subset \mathbb{R}^n \quad D - \text{открыто}$$

$f - r$  раз непрерывно дифференцируем =  $r$ -гладкая,

если все частичные производные до  $r$ -ого порядка существуют и непрерывны.

Обозначение –  $C^r(D)$

**Теорема 4.11.**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D - \text{открыто} \quad f \in C^r(D)$$

$i_1, i_2, \dots, i_r$  – перестановка  $j_1, j_2, \dots, j_r$

Тогда  $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}}$

**Доказательство.**

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной. А значит, можем всегда переставить все в неубывающем порядке индексов. □

**Определение 4.8.**

Мультииндекс

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad k_j \in \mathbb{N}_0$$

Высота мультииндекса  $|k| = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$

$$k! := k_1! k_2! \dots k_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n \quad h^k = h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n}$$

$$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}$$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} := \frac{|k|!}{k_1! k_2! \dots k_n!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$  – количество способов покрасить  $|k|$  шаров в  $n$  цветов так, чтобы первого цвета было  $k_1$ ,  $k_2$  – второго и т.д.

**Лемма.**

$$f : d \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^r(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$[x, x + h]$  – отрезок с концами  $x$  и  $x + h$ . (на многомерном пространстве)

$$[x, x + h] \subset D$$

$$F(t) = f(x + th) \quad F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда  $F \in C^r[0, 1]$  и при  $0 \leq l \leq r$

$$F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x + th) h^k$$

**Доказательство.**

$$G(t) := g(x + th)$$

$$G'(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(x + th), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x + th) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + th) h_j$$
 – получили формулу для  $l = 1$ .

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}(x + th) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n} = \sum_{|k|=l} \binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x + th) h^k = \sum_{|k|=l} \frac{|k|!}{k!} f^{(k)}(x + th) h^k$$

$$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, \dots)$$

□

**Теорема 4.12** (многомерная формула Тейлора).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D \text{ – открыто.}$$

$$[a, x] \subset D \quad f \in C^{r+1}(D)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x-a))}{k!} (x - a)^k$$

Где  $\theta \in (0, 1)$ .

**Доказательство.**

$$h := x - a$$

$$F(t) := f(a + th) \in C^{r+1}[0, 1]$$

По одномерной формуле Тейлора:

$$F(1) = \sum_{l=0}^r \frac{F^{(l)}(0)}{l!} + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} = \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k!} f^{(k)}(a + \theta h) h^k$$

– получили ровно то, что хотели на самом деле.

□

*Замечание.*



1. Многочлен Тейлора степени  $r$ :

$$\sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

2. Формула Лагранжа  $r = 0$

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta(x - a))(x_j - a_j) = f(a) + \langle \text{grad}_{a+\theta(x-a)} f, x - a \rangle$$

3. Формула Тейлора при  $n = 2$ .

$$k = (k_1, k_2) \quad \binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k_1+k_2}{k_1}$$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 + \dots + \sum_{k=0}^l \frac{1}{l!} \cdot \binom{l}{k} \frac{\partial^l f(a, b)}{\partial x^k \partial y^{l-k}} (x - a)^k (y - b)^{l-k} + \dots$$

**Следствие.**

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $D \subset \mathbb{R}^n$   $D$  – открыто  $f \in C^r(D)$

$a \in D$ . Тогда:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(\|x - a\|^r) \text{ при } x \rightarrow a.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!} (x - a)^k = \\ &= \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \end{aligned}$$

Осталось понять, что  $\sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = o(\|x - a\|^r)$

Покажем для этого про каждое слагаемое:

$$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = o(\|x - a\|^r)$$

$$|(x - a)^k| = |(x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_n - a_n)^{k_n}| \leq \|x - a\|^{k_1} \dots \|x - a\|^{k_n} = \|x - a\|^r$$

$$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} \rightarrow 0$$

$\implies$  получили то, что надо. □

**Следствие Полиномиальная формула.**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = (g(x))^r$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = r g^{r-1}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = r g^{r-1}(x)$$

$\frac{\partial^l f}{\partial x \dots} = r(r-1)\dots(r-l+1)g^{r-l}(x)$  – если подставить это в формулу Тейлора, то получаем ровно нужную формулу.