Математический анализ

Никифоровская Анна

19 июня 2017 г.

Содержание

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.

1.1. §3. Свойства определенного интеграла

Теорема 1.1 (линейность определенного интеграла).

$f, g \in C[a,b] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство.

F – первообразная f.

G – первообразная g.

$\implies \alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g$.

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) =$$

$$= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g \qquad \square$$

Теорема 1.2 (ф-ла интегрирования по частям).

$u, v \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$$

Доказательство.

$\int uv' = uv - \int u'v$

F – первообразная $u'v \implies (uv - F)$ – первообразная uv'. (Проверка дифференцированием: $(uv - F)' = u'v + uv' - u'v = uv'$)

$$\int\limits_a^b uv' = (uv - F)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - F\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v \qquad \square$$

Теорема 1.3 (ф-ла замены переменной).

$f \in C\langle a, b\rangle \quad \varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx$$

Соглашение. С этого места и далее $a > b \quad \int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$

Доказательство.

F – первообразная для $f \implies F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx \qquad \square$$

Пример.

$$\int\limits_2^3 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \begin{bmatrix} \varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t \end{bmatrix} = \int\limits_2^3 \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t)\,dt}{1+\varphi^2(t)} = \int\limits_4^9 \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$$

Пример.

$$W_n := \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$$

$$W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t(\sin t)'\,dt = \cos^{n-1} t \sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t\,dt =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t\,dt = (n-1)(\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t\,dt - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt)$$

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Следствие (Формула Валлиса).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство.

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos^{2n+2} t \leqslant \cos^{2n+1} t \leqslant cos^{2n} t$

Проинтегрируем. Получим $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

И левая, и правая часть стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда по непрерывности $\sqrt{\cdot}$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ □

Следствие.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство.

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^n2^n} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$ □

Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.**

$f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle$ и $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Доказательство.

Индукция по n.

База $n = 0$.

$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ – формула Ньютона-Лейбница для f'.

Индукционный переход. $n \to n+1$

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = -\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(\tfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1})'\,dt = -\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)((x-t)^{n+1})'\,dt =$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!}\left((f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1})\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{(n+1)}\,dt\right) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt$$

На самом деле уже получили то, что надо.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt$$ □

Лемма (в помощь Ламберту).

$$H_j = \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j \cos x\,dx$$

1. $H_j > 0$ $H_j \leqslant \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\pi/2} ((\frac{\pi}{2})^2)^j \cos x\,dx = \frac{1}{j!}(\frac{\pi}{2})^{2j}$

2. При любом $c > 0$ $c^j H_j \to 0$ при $j \to \infty$

   Доказательство.

   $0 < c^j H_j \leqslant \frac{1}{j!}(\frac{\pi^2 c}{4})^j \to 0.$

   (Некогда уже доказывали, что $\frac{c^j}{j!} \to 0$) □

3. $H_0 = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$

   $$H_1 = \int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - \int\limits_{0}^{\pi/2} x^2(\sin x)'\,dx = \frac{\pi^2}{4} - x^2\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + 2\int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin x\,dx =$$

   $$= -2\int\limits_{0}^{\pi/2} x(\cos x)'\,dx = -2(x\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx) = 2$$

4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

   Доказательство.

   $$j!H_j = \int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j(\sin x)'\,dx = ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + 2j\int\limits_{0}^{\pi/2} x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\sin x\,dx =$$

   $$= -2j\int\limits_{0}^{\pi/2} x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}(\cos x)'\,dx = -2j\Big(x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\,dx +$$

   $$+ 2(j-1)\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x\,dx\Big) = 2j(2j-1)\int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\,dx -$$

   $$- 2j\cdot 2(j-1)(\tfrac{\pi}{2})^2\int\limits_{0}^{\pi/2} ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x\,dx = 2j(2j-1)(j-1)!H_{j-1} - j(j-1)\pi^2(j-2)!H_{j-2}$$

$\implies H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

В доказательстве в определенный момент воспользовались идеей $x^2 = -((\frac{\pi}{2})^2 - x^2) + (\frac{\pi}{2})^2$ □

5. Существует такой многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$

Доказательство.

Будем доказывать по индукции.

База. $j = 0, j = 1$

$H_0 = 1, H_1 = 2$ – многочлены степени 0 с целыми коэффициентами.

Индукционный переход.

$j-1, j-2 \to j$

$H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2} = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2)$

Скажем тогда, что $P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x)$ □

Теорема 1.5 (Теорема Ламберта)**.**

π и π^2 – иррациональны.

Доказательство.

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда

$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое}}{n^j}$

$\implies n^j H_j$ – целое и положительное число.

$\implies 1 \leqslant n^j H_j \to 0$. (стремится к нулю по одному из пунктов предыдущей леммы)

Противоречие. Значит, π^2 число иррациональное.

Тогда и число π иррациональное. □

1.2. §4. Интегральные суммы

***Определение* 1.1.**

$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in E \ \ |\,x - y\,| < \delta \implies |\,f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$

Замечание.

Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

***Определение* 1.2.**

$f : E \to \mathbb{R}$ липшицева (с константой M), если $\forall x, y \in E \implies |\,f(x) - f(y)\,| \leqslant M\,|\,x - y\,|$

Замечание.

Липшицевость $\implies$ равномерная непрерывность.

$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

Пример.

$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – равномерно непрерывны.

Пример.

$f(x) = x^2 \ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не равномерно непрерывна.

Доказательство.

$\varepsilon := 1$ Возьмем $x, y \ \ |\, x-y\,| < \delta$, например, x и $y = x + \frac{\delta}{2}$

$1 > |\, f(x) - f(y)\,| = |\, x^2 - (x+\delta/2)^2\,| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при $x > \frac{1}{\delta}$ □

Теорема 1.6 (Теорема Кантора)**.**

$f \in C[a,b] \implies f$ – равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x, y \in [a,b] \ \ \ |\, x-y\,| < \delta \ \ \ |\, f(x) - f(y)\,| \geqslant \varepsilon$

Возьмем это ε и зафиксируем.

$\delta := \frac{1}{n} \ \ \exists x_n, y_n \in [a,b] \ \ \ |\, x_n - y_n\,| < \frac{1}{n} \ \ \ |\, f(x_n) - f(y_n)\,| \geqslant \varepsilon$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$

$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \to c$

$\implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c.$

Эта функция непрерывна в точке c.

$\implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(c)$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}) = f(c)$

$0 \longleftarrow |\, f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\,| \geqslant \varepsilon$

Получили противоречие – константа стремиться к нулю не может. □

***Определение* 1.3.**

$f : E \to \mathbb{R}$

$w_f(\delta) := \sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in E \ \ \ |\, x-y\,| \leqslant \delta\}$

– модуль непрерывности функции f.

Свойства.

1. $w_f(0) = 0$
2. w_f монотонно возрастает.
3. $w_f \geqslant 0$
4. Если f – липшицева функция с константой M, то $w_f(\delta) \leqslant M\delta$

   Доказательство.

   $|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant M\,|\, x-y\,| \leqslant M\delta$, если $|\, x-y\,| \leqslant \delta$ □

5. $|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant w_f(|\, x-y\,|)$
6. f – равномерно непрерывна $\iff w_f$ – непрерывна в нуле. ($\lim\limits_{\delta\to 0+} w_f(\delta) = 0$)

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in E\quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Если $|x - y| \leqslant \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Тогда $w_f(\frac{\delta}{2}) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E\quad |x - y| \leqslant \frac{\delta}{2}\} \leqslant \varepsilon$

$w_f(\frac{\delta}{2}) \leqslant \varepsilon$

Т.е. сейчас получили, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall 0 < \alpha < \frac{\delta}{2}\quad w_f(\alpha) \leqslant \varepsilon$

– это определение предела $\lim\limits_{\alpha\to 0+} w_f(\alpha) = 0$.

"$\Longleftarrow$"

Пусть $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\quad w_f(\delta) < \varepsilon$

Если $|x - y| \leqslant \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant w_f(\delta) < \varepsilon$ □

7. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

Доказательство.

$f \in C[a, b] \iff f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \iff$ (по свойству 6) $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$. □

***Определение* 1.4.**

Дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$ – это такой набор точек, что

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$

Мелкость(ранг) дробления – это $\max\limits_{k=1,2,...,n}(x_k - x_{k-1})$

$|\tau|$ – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и оснащенное дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема 1.7 (об интегральных суммах).

$f \in C[a, b]$

Тогда $\left|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| \leqslant (b - a) w_f(|\tau|)$

Доказательство.

$\Delta := \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt)$

$|\Delta| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|\, dt \leqslant$

$|\, t - \xi_k \,| \leqslant |\, x_k - x_{k-1} \,| \leqslant |\, \tau \,|$

$\implies |\, f(t) - f(\xi_k) \,| \leqslant w_f(|\, \tau \,|)$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\, \tau \,|)\, dt = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) w_f(|\, \tau \,|)\, dt = (b-a) w_f(|\, \tau \,|)$ $\square$

Следствие.

1. $f \in C[a, b]$. Тогда

   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и любого его оснащения ξ

   $\implies \left| \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений τ_n, для которой $|\, \tau_n \,| \to 0$ и любой последовательности их оснащений ξ_n

   $\lim\limits_{n \to \infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int\limits_a^b f$

Пример.

$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p =: S_p(n)$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2} (\frac{n}{2})^p < S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^p$

Введем интегральную сумму...

$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^p$

$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$

Мелкость этих дроблений $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

***Определение* 1.5.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall$ дробления τ и мелкости $< \delta$ и любого его оснащения ξ
$\implies |\, I - S(f, \tau, \xi) \,| < \varepsilon$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$

I – это её интеграл Римана.

Теорема 1.8 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$\left| \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \frac{|\, \tau \,|^2}{8} \int\limits_a^b |\, f'' \,|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$\left| \int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n} \Big(\frac{f(x_0)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \Big) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int\limits_a^b |\, f'' \,|$

Лемма.

$\int\limits_\alpha^\beta f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t - \alpha)(\beta - t)\, dt$

Доказательство. (леммы.)

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})'\,dt = f(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt =$$

$$= f(\beta)\tfrac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\tfrac{\beta-\alpha}{2} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \tfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$$ □

Доказательство. (теоремы.)

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n\Big(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\Big) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt$$

$$|\,\Delta\,| \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f''(t)\,|\,(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f''(t)\,|\,\tfrac{|\,\tau\,|^2}{4}\,dt = \tfrac{|\,\tau\,|^2}{8}\int\limits_a^b |\,f''\,|$$

□

Теорема 1.9 (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай)**.**

$f \in C^2[m,n] \;\; m,n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \tfrac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Доказательство.

$n = m+1$

$$f(m)+f(m+1) = \tfrac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

$$f(m) = \tfrac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Суммируем от m до $n-1$.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \tfrac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(m) = ...$

Надо доказать ф-лу:

$$\tfrac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)(t-m)(m+1-t)\,dt$$

А это в точности лемма, которая уже была. □

Пример.

1. $S_p(n) = 1^p + 2^p + ... + n^p$

   $f(t) = t^p \;\; f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

   $$S_p(n) = \tfrac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p\,dt + \tfrac{p(p-1)}{2}\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) + \frac{p(p-1)}{2} \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Если $p \in (-1, 1)$, то $\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant C$.

Действительно.

$\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} \leqslant \frac{1}{1-p}$

И получили, что

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

Если $p > 1$:

$\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$

$\implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$

2. Гармонические числа. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

   $f(t) = \frac{1}{t}$ $f''(t) = \frac{2}{t^3}$ $m = 1$

   $H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$

   Последовательность a_n монотонно возрастает.

   $a_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\,dt \leqslant \int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{2}$

   $\implies$ (т.к. a_n возрастает и ограничена сверху) a_n имеет предел $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

   Получаем, что:

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1) = \ln n + (\frac{1}{2} + a) + o(1)$

   $\frac{1}{2} + a =: \gamma$ – постоянная Эйлера.

   $\gamma \approx 0,5772156649...$

3. Формула Стирлинга.

   $\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$.

   $f(t) = \ln t$ $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ $m = 1$

   $\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int\limits_1^n \ln t\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt$

   $\int\limits_1^n \ln t\,dt = t\ln t\Big|_1^n - \int\limits_1^n t(\ln t)'\,dt = n\ln n - n + 1$

   $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$

   b_n монотонно возрастают.

   $b_n = \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t})\Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant 1$

   $\implies$ у b_n есть предел b.

   $b_n = b + o(1)$

   $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 + b + o(1)$

$n! = \exp(n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b + o(1)) = n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} =$
$= n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-b}(1 + o(1)) \sim n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-b}$

Хотим понять, что такое $e^{1-b} = c$.

$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2n}c}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}c)^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2n}c}{\sqrt{n}^2 c^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}c}$

$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}c}$

$\implies c = \sqrt{2\pi}$

Итого формула Стирлинга:

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

1.3. §5. Несобственные интегралы

***Определение* 1.6.**

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$

$f \in C[a, b)$

$\lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$-\infty \leqslant a < b < +\infty$

$f \in C(a, b]$

$\lim\limits_{c\to a+} \int\limits_c^b f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{c\to a+} \int\limits_c^b f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

$\left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \right| = \left| \int\limits_c^b f \right| \leqslant \int\limits_c^b |\,f\,| \leqslant \int\limits_c^b M = M(b - c) \to 0$ при $c \to b-$

Теорема 1.10 (Критерий Коши сходимости интегралов)**.**

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

$\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tilde{b} \in (a, b): \ \ \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \quad \left| \int\limits_c^d f \right| < \varepsilon$

Доказательство.

"$\implies$"

$\lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c = \int\limits_a^b f$ – конечен.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall c \in (b-\delta, b)\ \ \left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon$

Аналогично получаем для $d \in (b-\delta, b)\ \ \left| \int\limits_a^d f - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon$

$\left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^d f \right| \leqslant \left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^b f \right| + \left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^d f \right| < 2\varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

$F(x) := \int\limits_a^x f(t)\, dt$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \tilde{b} \in (a, b)\ \ \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |\, F(c) - F(d)\, | < \varepsilon$

$\tilde{b} = b - \delta$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall c, d \in (b-\delta, b) \implies |\, F(c) - F(d)\, | < \varepsilon$

Это критерий Коши для $\lim\limits_{c \to b-} F(c)$. □

Следствие.

$f \in C[a, b)\quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b$

и $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int\limits_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \to b \implies \exists N\ \ \forall n > N\ \ c_n, d_n > \tilde{b}$

$\implies \left| \int\limits_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon.$

Значит, $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$f \in C[a, b)\quad -\infty < a < b \leqslant +\infty.$

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F.

$\int\limits_a^c f = F(c) - F(a)$

Существование $\int\limits_a^b f$ – существование $\lim\limits_{c\to b-} (F(c) - F(a)) = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b(слева)

Соглашение. Если F не определена в точке b, считать, что

$F\Big|_a^b := \lim\limits_{c\to b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int\limits_a^b f$ существует, то $\int\limits_a^b f = F\Big|_a^b$

Пример.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1}\Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim\limits_{c\to+\infty} \ln x\Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$

   $p = 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \to +\infty$

   Тогда интеграл расходится.

   Если $p \neq 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \to \frac{1}{p-1}$, если $p > 1$

   Если же $p < 1$, то $\to +\infty$.

   Получили, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to 0+} \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p}$

   Если $p = 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x\Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$

   Значит, интеграл расходится.

   Если же $p \neq 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$

   Если $p > 1 \implies \to +\infty$

   Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

   Получили, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

Свойства.

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

1. Аддитивность.

   $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \forall c \in (a, b) \quad \int\limits_c^b f$ сходится.

   Доказательство.

   $\int\limits_a^b f$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: \int\limits_a^b f$

   $\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B f \implies \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_c^B f$

   Вот и получили, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$. $\square$

2. $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \int\limits_c^b f \to 0$ при $c \to b-$.

   $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

   $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f$

   $\implies \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. Линейность. $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся $\implies \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

   И $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $\int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g$ при $B \to b-$
   $\implies$ предел конечен и

   $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ $\square$

Замечание.
$\int\limits_a^b f$ сходится $\int\limits_a^b g$ расходится $\implies \int\limits_a^b (f \pm g)$ расходится.
Доказательство – от противного.

Свойства (продолжение).

4. Монотонность $f, g \in C[a,b)$ $f \leqslant g \implies \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $c \in [a,b) \implies f, g \in C[a,c]$

   $\int\limits_a^c f \leqslant \int\limits_a^c g$

   Переходим к пределу в неравенстве. $c \to b-$

   $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   $\square$

5. Интегрирование по частям.

   $f, g \in C^1[a,b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

   (Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

Доказательство.

$c \in [a, b)\ \ f, g \in C^1[a, c]$

$\int\limits_a^c fg' = fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g$

Теперь напишем предел $c \to b-$

$$\implies \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c fg' = \lim_{c \to b-} (fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g) = \lim_{c \to b-} fg\Big|_a^c - \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f'g$$

$\square$

6. Замена переменной.

$f \in C[a, b)\ \ \varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ и φ непрерывна и дифференцируема. $c := \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma)$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

(Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

Доказательство.

$F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\,dx \quad y \in [a, b)$

$\Phi(\gamma) = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$

$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

Если существует предел в правой части. Т.е. $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

Тогда $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - \Phi(\alpha)$

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$\lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

$a \leqslant \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

Теперь надо понять, что $\lim\limits_{y \to c-} F(y) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

Возьмем $\gamma_n \to \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to c$ оба стремятся слева

$F(c_n) \to \lim\limits_{y \to c} F(y)$

$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma)$

Случай второй. Существует $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Т.е. существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta -} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{c} f(x)\,dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \to \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \to b$

Пусть $y_n \to b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta)\ \ \varphi(\delta_n) = y_n$.

$\varphi(\alpha) \leqslant y_n \leqslant \varphi(\gamma_m)$

$\implies$ по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \to \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \to [a, b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k}) \leqslant \varphi(p) < b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \to b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Замечание.

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.3.1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$f \geqslant 0\ \ f \in C[a, b)$

Интересуемся сходимостью $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Теорема 1.11.

$f \geqslant 0\ \ f \in C[a, b)\ \ F(y) = \int\limits_a^y f(x)\,dx$

Сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности F.

Доказательство.

$F(y_2) - F(y_1) = \int\limits_a^{y_2} f - \int\limits_a^{y_1} f = \int\limits_{y_1}^{y_2} f \geqslant 0$

$\implies F$ монотонно возрастает.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{y\to b} F(y) - F(a)$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. □

Следствие.

1. $0 \leqslant f \leqslant g \;\; f, g \in C[a, b)$

   Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то и $\int\limits_a^b f$ сходится.

   Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то и $\int\limits_a^b g$ расходится.

   Доказательство.
   $F(y) := \int\limits_a^y f \;\; G(y) := \int\limits_a^y g$

   $F \leqslant G$ на $[a, b)$ (по монотонности интеграла)

   $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху.

   $\implies F$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.

   (Второй пункт – переформулировка) □

2. $f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \quad \varepsilon > 0$.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f$ – сходится.

   Доказательство.
   $f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

   Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

   $\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится. □

   Замечание.
   Неравенства $f \leqslant g$ или $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ могут выполняться лишь при достаточно больших x.

   (Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

3. $f, g \geqslant 0 \;\; f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

   Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

   (или оба сходятся, или оба расходятся)

   Доказательство.
   $f = \varphi g$, где $\varphi(x) \to 1$, при $x \to b-$.

   $\implies$ существует такое c, что при $x \geqslant c \;\; \frac{1}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant 2$

   $\implies \frac{g}{2} \leqslant f = \varphi g \leqslant 2g$ при $x \geqslant c$

$\implies$ если $\int\limits_c^b g$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится. (и наоборот)

А значит, и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково. $\square$

Замечание.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$.

1.3.2. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

***Определение* 1.7** (Абсолютная сходимость.)**.**

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |\, f \,|$ сходится.

Теорема 1.12.

Если $\int$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.

$F(c) = \int\limits_a^c f = \int\limits_a^c f_+ - \int\limits_a^c f_-$

$\Phi(c) = \int\limits_a^c |\, f \,| = \int\limits_a^c f_+ + \int\limits_a^c f_-$

$\int\limits_a^c f_+ =: F_1(c)$

$\int\limits_a^c f_- =: F_2(c)$

Знаем, что $\Phi(c)$ сходится. Значит, Φ ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2,\; F_1 \geqslant 0 \; F_2 \geqslant 0 \implies F_1$ и F_2 ограничены.

$\implies \int\limits_a^b f_+$ и $\int\limits_a^b f_-$ сходятся $\implies \int\limits_a^b f$ сходится по линейности. $\square$

Следствие.

$\left| \int\limits_a^b f \right| \leqslant \int\limits_a^b |\, f \,|$, если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится.

Доказательство.

$-|\, f \,| \leqslant f \leqslant |\, f \,|$

и монотонность интеграла $\square$

Теорема 1.13 (признак Дирихле)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists K : \; \left| \int\limits_a^y f \right| \leqslant K$ при всех y.

2. g монотонна.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$ (В другом случае тоже верно, но нам доказывать не стали)

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^y fg = Fg\Big|_a^y - \int\limits_a^y Fg'$

Посмотрим на $F(y)g(y)$.

$|\, F(y)g(y) \,| \leqslant K \,|\, g(y) \,| \to 0$.

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что $\int\limits_a^{+\infty} Fg'$ сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть g монотонно возрастает.

$\int\limits_a^{+\infty} |\, Fg' \,|$

$|\, Fg' \,| = |\, F \,|\, g' \leqslant Kg'$.

Т.е. надо понять, что $\int\limits_a^{+\infty} Kg'$ сходится.

$\int\limits_a^y Kg' = Kg(y) - Kg(a) \to -Kg(a)$ □

Теорема 1.14 (признак Абеля)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ –сходится
2. $|\, g(x) \,| \leqslant K \;\; \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле.

g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ и $|\, A \,| \leqslant K$

$\widetilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim\limits_{y \to +\infty} \int\limits_a^y f(x)\,dx \implies \int\limits_a^y f(x)\,dx$ ограничена в окрестности $+\infty$ (т.е. при $y \geqslant b$).

Но при $y \in [a, b]$ она ограничена, т.к. непрерывна.

Т.е. показали, что f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx$ – сходится

$fg = fA + f\widetilde{g}$ и $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} fA + \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ $\square$

Следствие.

$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T.

g монотонна и стремится к 0 на бесконечности, и $\int\limits_a^{+\infty} |\,g(x)\,|\,dx$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$

Доказательство.

"$\Longleftarrow$"

$F(y) := \int\limits_a^{y} f(x)\,dx = \int\limits_{a+kT}^{y} f(x)\,dx = \int\limits_a^{y-kT} f(x)\,dx$

$a \leqslant y - kT \leqslant a + T$.

Т.е. множество значение $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a+T]$ совпадает.

Но F непрерывна $\implies$ ограничена на $[a, a+T]$

$\implies F$ ограничена на $\mathbb{R}$

$\implies$ по принципу Дирихле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

"$\implies$"

Докажем, что если $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx =: A \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится.

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ – периодическая.

$\int\limits_a^{a+T} \tilde{f} = \int\limits_a^{a+T} f - \int\limits_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0.$

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится.

Но $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g + A\int\limits_a^{+\infty} g$

Получили, что одно слагаемое сходится, а другое расходится(т.к. хвост знакопостоянен, а $\int\limits_a^{+\infty} |\,g\,|$ расходится и g монотонна)

$\square$

Пример.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

Случай 1.

$p > 1$ $\frac{|\sin x|}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p}$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится

$\implies \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ – абсолютно сходится.

Случай 2.

$0 < p \leqslant 1$

$\sin x$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \to 0$ и монотонна.

$\implies$ по следствию признака Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \neq 0$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^p}$ сходится $\iff \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$

(Т.к. если $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится, то пользуемся $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$, если же расходится, то есть следствие из признака Дирихле)

$\implies$ нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$p \leqslant 0$

Воспользуемся критерием Коши.

$\int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi}{3}$

$\implies$ нет сходимости.

2. 6. Метрические и нормированные пространства

2.1. §1. Открытые и замкнутые множества

***Определение* 2.1.**
(X, ρ) – метрическое пространство, если $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример.

1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |\, x - y\,|$
2. $\mathbb{R}^2$ $\rho(x, y)$ – длина отрезка xy.
3. X $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y \\ 1 & \text{если } x \neq y \end{cases}$
4. Множество – сфера. Расстояние – дуги.
5. Манхэттенская метрика. $\mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

   $\rho(x, y) = |\, x_1 - y_1\,| + |\, x_2 - y_2\,|$
6. Французская железнодорожная метрика. Есть город Париж и радиальные дороги от него. Больше никто никак между собой не связан.

   Если A и B лежат на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

   Если A и B лежат на разных лучах, то $\rho(A, B) = AP + BP$

   Упражнение – проверить, что это метрика.

***Определение* 2.2.**
Открытый шар радиуса r с центром в точке a $B_r(a) = \{x \in X :\ \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар радиуса r с центром в точке a $\overline{B}_r(a) = \{x \in X :\ \rho(x, a) \leqslant r\}$

Свойства.

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0$

   $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing$

   Доказательство.
   Возьмем радиус $r := \frac{\rho(a,b)}{3}$. Он подходит.

   От противного. Пусть пересекаются, т.е. $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$

   $\implies \rho(x, a) < r,\ \rho(x, b) < r \implies \rho(a, b) \leqslant \rho(x, a) + \rho(x, b) < 2r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$

   Получили противоречие. □

***Определение* 2.3.**

$A \subset X$ – метрическое пространство.

$a \in A$ – внутренняя точка, если $\exists r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset A$

***Определение* 2.4.**

Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства открытых множеств.

1. $\varnothing, X$ – открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
4. $B_r(a)$ – открытое множество.

Доказательство.

2. A_α – открытые, $\alpha \in I$.

   $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

   Возьмем $a \in A$, тогда $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$

   A_β открытое $\implies \exists r > 0 \;\; B_r(a) \subset A_\beta \subset A$

3. $A_1, A_2, ..., A_n$ – открытые. $A := \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$

   Возьмем $a \in A \implies a \in A_k \;\; \forall k = 1, .., n$

   A_k – открытое $\implies \exists r_k > 0 \;\; B_{r_k}(a) \subset A_k$

   $r := \min\{r_1, r_2, ..., r_n\} > 0 \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$

   $\implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A$

4. Пусть $x \in B_r(a)$

   Возьмем $\tilde{r} := r - \rho(x, a) > 0$

   Проверим, что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$.

   Возьмем $y \in B_{\tilde{r}}(x) \implies \rho(y, x) < \tilde{r} = r - \rho(x, a)$

   $\rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < \tilde{r} + \rho(x, a) = r$

$\square$

Замечание.

Конечность в третьем свойстве существенна.

$A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$

***Определение* 2.5.**

Внутренность множества $int\, A$ – множество всех внутренних точек A

(другое обозначение – $\mathring{A}$)

Свойства.

1. $int\, A \subset A$
2. $int\, A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A.
3. $int\, A$ – открытое множество.
4. $int\, A = A \iff A$ открыто
5. $A \subset B \implies int\, A \subset int\, B$
6. $int\,(A \cap B) = int\, A \cap int\, B$
7. $int\,(int\, A) = int\, A$

Доказательство.

2. $G := \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открытое из A.

   Надо доказать, что $int\, A = G$

   "$\supset$"

   Берем $x \in G \implies x \in U_\alpha \subset A \implies \exists r > 0\ :\ \ B_r(x) \subset U_\alpha \subset A$

   $\implies x$ – внутренняя точка $\implies x \in int\, A$

   "$\subset$"

   Берем $x \in int\, A \implies \exists r > 0\ \ B_r(x) \subset A$

   $B_r(x)$ – открытое множество, которое содержится в A и содержит x.

   $\implies x \in G$.

3. По пункту 2 $int\, A$ – объединение открытых множеств $\implies$ открыто

4. "$\implies$"

   $int\, A$ открыто по пункту 3 $\implies A$ открыто.

   "$\impliedby$"

   A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies int\, A = A$.

6. "$\subset$"

   $A \cap B \subset A\ \ int\,(A \cap B) \subset int\, A$

   $A \cap B \subset B\ \ int\,(A \cap B) \subset int\, B$

   $\implies int\,(A \cap B) \subset int\, A \cap int\, B$

   "$\supset$"

   $x \in int\, A \cap int\, B \implies x \in int\, A\ ,\ x \in int\, B \implies B_{r_1}(x) \subset A,\ \ B_{r_2}(x) \subset B$

   $\implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies x \in int\,(A \cap B)$

7. $int\, A$ открыто $\implies int\,(int\, A) = int\, A$ по пункту 4.

$\square$

***Определение* 2.6.**

Замкнутое множество.

$A \subset X$ – замкнутое, если $X \setminus A$ – открытое.

Свойства.

1. $\varnothing,\ X$ – замкнутое.
2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств – замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
4. $\overline{B}_r(a)$ – замкнутое множество.

Доказательство.

2. $A_\alpha \implies X \setminus A_\alpha =: B_\alpha$ – открытое.
   $\implies B := \bigcup B_\alpha$ – открыто
   $X \setminus B = \bigcap (X \setminus B_\alpha) = \bigcap A_\alpha$ – замкнуто.
3. $X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$ – открыто.
4. $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X :\ \rho(x,a) > r\}$ – открыто?
   Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$
   $\tilde{r} := \rho(x,a) - r$
   $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \varnothing$
   От противного. Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) \implies$
   $\rho(y,x) < \tilde{r}$ и $\rho(y,a) \leqslant r$
   $\implies \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a) < \tilde{r} + r = \rho(x,a)$
   Противоречие.

□

Замечание.

В пункте 3 существенна конечность.

$\mathbb{R}\ \ A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$

$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$ – не является замкнутым.

***Определение* 2.7.**

Замыкание множества A – $Cl\,A$ (другое обозначение – $\overline{A}$)

– пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Свойства.

1. $A \subset Cl\,A$
2. $Cl\,A$ – замкнутое множество

3. $Cl\,A = A \iff A$ – замкнуто
4. $A \subset B \implies Cl\,A \subset Cl\,B$
5. $Cl\,(A \cup B) = Cl\,A \cup Cl\,B$
6. $Cl\,(Cl\,A) = Cl\,A$

Теорема 2.1.
$Cl\,A = X \setminus int\,(X \setminus A)$

Доказательство. (теоремы)
$X \setminus Cl\,A = int\,(X \setminus A)$
$int\,(X \setminus A) = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset X \setminus A$ и открыт.
$X \setminus int\,(X \setminus A) = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha} (X \setminus U_\alpha) = Cl\,A$
$X \setminus U_\alpha \supset A$ и замкнуто. □

Доказательство. (свойств)

3. $Cl\,A = A \iff X \setminus A = X \setminus Cl\,A \ \ (= int\,(X \setminus A))$
   $\iff X \setminus A = int\,(X \setminus A) \iff X \setminus A$ – открыто $\iff A$ замкнуто.
4. $A \subset B \implies X \setminus B \subset X \setminus A \implies int\,(X \setminus B) \subset int\,(X \setminus A)$
   $\implies X \setminus int\,(X \setminus A) \subset X \setminus int\,(X \setminus B)$
   $\implies Cl\,A \subset Cl\,B$

□

Пример в $\mathbb{R}$.
$int\,[0, 1] = (0, 1)$
$Cl\,(0, 1] = [0, 1]$
$int\,\mathbb{Q} = \varnothing$
$Cl\,\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Упражнение. A, $\quad int\,(Cl\,(int\,(Cl\,...(A)...)))$. Какое количество различных множеств таким образом может быть получено?

Теорема 2.2.
$a \in Cl\,A \iff \forall r > 0 \ \ B_r(a) \cap A \neq \varnothing$

Доказательство.
“$\implies$”
Пусть для некоторого $r > 0 \ \ B_r(a) \cap A = \varnothing$
$\implies a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A \implies a$ – внутренняя точка $X \setminus A$
$\implies a \in int\,(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus int\,(X \setminus A) = Cl\,A$
Противоречие.
“$\impliedby$”

Пусть $a \notin Cl\,A = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$, где F_α – замкнуто и $\supset A$

$\implies$ существует β, что $a \notin F_\beta \supset A \implies a \in X \setminus F_\beta$ – открыто.

$\implies$ возьмем $r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset X \setminus F_\beta \subset X \setminus A$

$\implies B_r(a) \cap A = \varnothing$

Получили противоречие. □

Следствие.

$A \subset X$ и U – открытое множество, $U \cap A = \varnothing$

Тогда $U \cap Cl\,A = \varnothing$

Доказательство.

Если $x \in U \cap Cl\,A$, то $x \in U$ – открытое

$\implies$ для некоторого $r > 0$ $B_r(x) \subset U$

$\implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin Cl\,A$

Противоречие. □

***Определение* 2.8.**

Проколотая окрестность точки – шарик без центра.

$\mathring{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

***Определение* 2.9.**

$A \subset X$ a – предельная точка, если в любой проколотой окрестности точки a есть точка из A.

***Определение* 2.10** (Обозначения)**.**

A' – множество предельных точек A.

Свойства.

1. $Cl\,A = A \cup A'$
2. $A \subset B \implies A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4. A – замкнутое $\iff A' \subset A$

Доказательство.

1. $a \in Cl\,A \iff \forall r > 0 \;\; B_r(a) \cap A \neq \varnothing$

   $$\iff \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \notin A \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \;\; \forall r > 0 \end{array}\right.$$

   $$\iff \left[\begin{array}{c} a \in A \\ a \notin A, \text{ но } a \in A' \end{array}\right.$$

2. Пусть $a \in A'$. Тогда $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \;\; \forall r > 0$

   но $A \subset B \implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \;\; \forall r > 0 \implies a \in B'$

3. $A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$

   $B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$

   $\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$

   Обратное включение.

   Возьмем $x \in (A \cup B)'$. Пусть $x \notin A'$

   $\implies \exists r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \varnothing$

   Но $\mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$

   $\implies \mathring{B}_r(x) \cap B \neq \varnothing \implies \forall R \geqslant r \ \ \mathring{B}_R(x) \cap B \neq \varnothing$

   Заметим, что сие верно и для радиусов, меньших r. Ведь для всех меньших радиусов будет верно $\mathring{B}_r(x) \cap A = \varnothing$. А значит, для них можно провести те же рассуждения.

4. A – замкнутое $\iff A = Cl\, A.$ $(= A \cup A')$

   $\iff A = A \cup A' \iff A' \subset A.$

□

Теорема 2.3.

$a \in A' \iff \forall r > 0 \ \ B_r(a)$ содержит бесконечное множество точек из A.

Доказательство.

"$\implies$"

$a \in A' \implies \forall r > 0 \ \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$

$\exists a \neq x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A \implies r > \rho(x_1, a) > 0$. Пусть $\rho(x_1, a) = r_1$.

$\implies \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_2 \in \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A$ и $x_1 \neq x$.

$r_2 := \rho(a, x_2)$

Ну и делаем так далее.

"$\impliedby$"

Возьмем $B_r(a)$. $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек.

$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек, т.к. выкинули одну точку.

$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \implies a$ – предельная точка. □

Следствие.

Конечное множество не содержит предельных точек.

Замечание.

Можно было выбирать последовательность x_n, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ и $\rho(x_n, a) \downarrow$

***Определение* 2.11.**

(X, ρ) – метрическое пространство. $Y \subset X$.

$(Y, \tilde{\rho})$ – подпространство метрического пространства X.

$\tilde{\rho} = \rho\Big|_{Y \times Y}$

Теорема 2.4 (об открытых и замкнутых множествах в подпространстве)**.**

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – подпространство. Тогда

1. $A \subset Y$ – открыто в $Y \iff \exists G$ – открытое в X множество, т.ч. $A = G \cap Y$

2. $A \subset Y$ – замкнуто в $Y \iff \exists F$ – замкнутое в X множество, т.ч. $A = F \cap Y$

Доказательство.

1. "$\implies$"

   A – открыто в Y.

   $\forall a \in A \;\; \exists r(a) > 0 \;\; B^Y_{r(a)}(a) \subset A$

   $A = \bigcup\limits_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) \subset \bigcup\limits_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G$ – открыто в X.

   Это то самое G, которое нам надо.

   $B^Y_{r(a)}(a) = B^X_{r(a)}(a) \cap Y$

   $A = A \cap Y = \bigcup\limits_{a \in A} (B^X_{r(a)}(a) \cap Y) = G \cap Y$

   "$\impliedby$"

   Пусть $A = G \cap Y$. Возьмем $a \in A$, тогда

   $a \in G$ – открыто в $X \implies \exists r > 0 \;\; B^X_r(a) \subset G$.

   $\implies B^Y_r(a) = B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$

   $\implies a$ – внутренняя точка $\implies A$ – открыто в Y.

2. A – замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ – открыто в Y

   $\iff \exists G$ – открыто в X, т.ч. $Y \setminus A = G \cap Y$

   $A = (X \setminus G) \cap Y$.

   И положим $F := X \setminus G$.

   И все получилось.

□

Пример.

$X = \mathbb{R} \;\; Y = [0, 2)$

$[0, 1)$ – открыто в Y.

$B^Y_r(0) = [0, r)$ при маленьких r.

$[1, 2)$ – замкнуто в Y.

$[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$

$[1, 2) = [1, 2] \cap [0, 2)$

***Определение* 2.12.**

X – линейное пространство (над $\mathbb{R}$).

Тогда норма $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\,\lambda\,|\,\|x\| \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \;\; \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Пример.

1. $X = \mathbb{R}$ $\|x\| := |\, x \,|$
2. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_\infty := \max\limits_{k=1,..,d} |\, x_k \,|$
3. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_1 := \sum\limits_{k=1}^{d} |\, x_k \,|$
4. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} |\, x_k \,|^2}$
5. $X = C[a, b]$

   $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\, f(x) \,|$

   Комментарий к неравенству треугольника.

   $\|f + g\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\, f(x) + g(x) \,| = |\, f(x_0) + g(x_0) \,| \leqslant |\, f(x_0) \,| + |\, g(x_0) \,| \leqslant$

   $\leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} |\, f(x) \,| + \max\limits_{x\in[a,b]} |\, g(x) \,| = \|f\| + \|g\|$

***Определение* 2.13.**

Скалярное произведение.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ и $\forall x, y \in X$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Если над $\mathbb{C}$, то $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Пример.

1. $\mathbb{R}^d$ $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$
2. Если $w_1, .., w_d > 0$, то $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} w_k x_k y_k$
3. $C[a, b]$ $\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx$

Свойства скалярного произведения над $\mathbb{R}$.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

   $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского

   $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Доказательство.
$t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty, x + ty\rangle \geqslant 0$

$\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \geqslant 0$

Квадратный трехчлен относительно t

$\implies$ его дискриминант $\leqslant 0$

$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leqslant 0$

$\implies \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$ □

Замечание.
Когда равенство?

Когда есть корень у трехчлена $\langle x + t_0 y, x + t_0 y\rangle \geqslant 0$ относительно t_0.

$\implies x + t_0 y = 0 \implies x = (-t_0)y$

3. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ – норма.

Доказательство.
$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{|\,\lambda\,|^2\langle x, x\rangle} = |\,\lambda\,|\sqrt{\langle x, x\rangle}$

Неравенство треугольника.

$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$

$\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ – это неравенство Коши-Буняковского. □

Следствие.
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2}$ – норма.

Упражнение. Доказать, что норма по формуле выше задается некоторым скалярным произведением $\iff \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Свойства нормы.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика

   $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |\,(-1)\,|\,\|y - x\|$

   $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$

2. $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.
$-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$ – надо доказать.

$\|y\| \leqslant \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|$

$\|x\| \leqslant \|y\| + \|x - y\|$ □

***Определение* 2.14.**
Предел последовательности в метрическом пространстве.

(X, ρ) – метрическое пространство, $x_n \in X$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geqslant N \;\; \rho(x_n, a) < \varepsilon$

***Определение* 2.15.**
$E \subset X$ – ограничено, если E содержится в каком-то шаре.

Свойства предела последовательности в метрическом пространстве.

1. Единственность предела.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \rho(x_n, a) \to 0$

   Доказательство.
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$
   Это просто и есть определение того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ □

3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

   Доказательство.
   Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\rho(x_n, a) \to 0$
   $\implies \rho(x_n, a)$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.
   $\implies \exists R\ :\ \ \rho(x_n, a) \leqslant R$
   $\implies x_n \in \overline{B}_R(a)$ при всех n. □

4. Если a – предельная точка множества A, то $\exists\{x_n\} \subset A\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   Более того можно выбрать такую последовательность, что $\rho(x_n, a) \downarrow$

Теорема 2.5 (об арифметических свойствах в нормированном пространстве)**.**
X – пространство с нормой $\|\cdot\|$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda,\ \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},$
Тогда.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda a$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

5. Если есть скалярное произведение, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$

Доказательство.
$\|x_n - a\| \to 0$
$\|y_n - b\| \to 0$

1. $0 \leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \to 0$
   $\implies \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \to 0$

2. $\|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \leqslant \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \leqslant$
   $\leqslant |\,\lambda_n\,|\,\|x_n - a\| + |\,\lambda_n - \lambda\,|\,\|a\| \leqslant$

   λ_n – имеет предел $\implies$ ограничена $\implies$ $|\,\lambda_n\,| \leqslant K$

   $\leqslant K\|x_n - a\| + |\,\lambda_n - \lambda\,|\,\|a\| \to 0$

4. $|\,\|x_n\| - \|a\|\,| \leqslant \|x_n - a\| \to 0$

5. Для доказательства этого факта введем новую норму $|||\,a\,||| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ – уже показывали где-то, что это норма.

   Тогда верно, что

   $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|||\,x + y\,|||^2 - |||\,x - y\,|||^2)$

   $\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n, y_n - b\rangle + \langle x_n - a, b\rangle =$
   $= \frac{1}{4}(|||\,x_n + y_n - b\,|||^2 - |||\,x_n - y_n + b\,|||^2 + |||\,x_n - a + b\,|||^2 - |||\,x_n - a - b\,|||^2) \to$
   $\to \frac{1}{4}(|||\,a\,|||^2 - |||\,a\,|||^2 + |||\,b\,|||^2 - |||\,b\,|||^2) = 0$

□

***Определение* 2.16.**
$\mathbb{R}^d$ $x_n \in \mathbb{R}^d$ $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(d)})$

x_n покоординатно сходится к x_0,

если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$ $\forall k = 1, 2, .., d$

Теорема 2.6.
В $\mathbb{R}^d$ покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство.
“ $\implies$ ”

$\|x_n - x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \to 0$

“$\impliedby$”

$0 \leqslant (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0$ □

2.2. §2. Компактность

***Определение* 2.17.**
$A \subset X$ $U_\alpha \subset X$ $\alpha \in I$

U_α образуют покрытие A, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$

***Определение* 2.18.**
U_α – открытое покрытие A (= покрытие открытыми множествами),

если это покрытие и все U_α – открытые множества.

***Определение* 2.19.**
$K \subset X$ – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2.7.

Пусть X – метрическое пространство, Y – его подпространство.

$K \subset Y$.

Тогда компактность K в метрическом пространстве X и в метрическом пространстве Y равносильны.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

Берем U_α – открытые множества из Y, образующие покрытие K.

Тогда $U_\alpha = Y \cap G_\alpha$, где G_α – открытые множества в X.

$K \subset \bigcup U_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$ – покрытие открытыми множествами из X.

$\Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \ : \ K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$

$\Longrightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \cap Y) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$

"$\Longleftarrow$"

Берем открытые множества G_α из X, которые покрывают K.

$\Longrightarrow K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y)$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, т.ч. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \cap Y) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$ □

Теорема 2.8.

K – компактное $\Longrightarrow$ K – замкнуто и ограничено.

Доказательство.

Ограниченность. Возьмем $a \in K$

$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ – покрытие открытыми множествами

Выберем конечное подпокрытие $B_{n_1}(a), .., B_{n_m}(a)$

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{n_j}(a) = B_r(a) \ \ r = \max\{n_1, ..., n_m\}$

Замкнутость. $X \setminus K$ – открыто?

Берем $a \in X \setminus K$ и хотим проверить, что лежит там вместе с окрестностью.

$x \in K$ и шар $B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) \not\ni a$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$

Выберем конечное подпространство.

$K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$

$B_r(a) \cap K = \varnothing$, где $r = \min\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$ □

Следствие из теоремы.

$\tilde{K} \subset K$

Если K – компакт и $\tilde{K}$ – замкнуто, то $\tilde{K}$ – компакт.

Доказательство.

$\tilde{K} \subset \bigcup U_\alpha$ – покрыто открытыми множествами

$\bigcup U_\alpha \cup (X \setminus \tilde{K})$ – покрытие открытыми множествами для K.

Можно выбрать конечное подпокрытие.

$\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K}$

$\implies \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \supset \tilde{K}$ – конечное подпокрытие. □

Теорема 2.9.

K_α – семейство компактов и любой конечный набор этих компактов имеет непустое пересечение.

Тогда $\bigcap K_\alpha \neq \varnothing$

Доказательство.

От противного. Пусть $\bigcap K_\alpha = \varnothing$

$K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_0} X \setminus K_\alpha$ – все множества в объединении открытые.

Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие.

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_j} = X \setminus \bigcap\limits_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}$

$\implies \bigcap\limits_{j=0}^{n} K_{\alpha_j} = \varnothing$

Получили противоречие с условием, где сказано, что любое конечное покрытие не пусто. □

Следствие.

$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ – непустые компакты

$\implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов – самый маленький компакт.

$\implies \neq \varnothing$ □

***Определение* 2.20.**

$a, b \in \mathbb{R}^d$

$a = (a_1, a_2, ..., a_d)$

$b = (b_1, b_2, ..., b_d)$

Замкнутый параллелепипед $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_d, b_d)$

Теорема 2.10 (о вложенных параллелепипедах)**.**

$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset ...$ – замкнутые параллелепипеды.

$\implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$

Доказательство.

$P_n = [a^{(n)}, b^{(n)}]$

На самом деле есть цепочка вложенных отрезков

$[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \supset [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] \supset ...$

Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists c_k \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

$c = (c_1, c_2, ..., c_d) \in P_n \ \ \forall n$

$a_k^{(n)} \leqslant c_k \leqslant b_k^{(n)} \forall k \ \ \forall n$ □

Теорема 2.11 (Гейне-Бореля)**.**
Замкнутый куб в $\mathbb{R}^d$ – компакт.

Доказательство.
K – замкнутый куб и $\bigcup U_\alpha$ – его покрытие открытыми множествами.

Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разобьем все стороны пополам. Получим 2^d кубиков. $\bigcup U_\alpha$ – покрытие каждого из них.

Найдется маленький кубик, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Назовем его K_1.

Каждую сторону этого кубика располовиним. Т.к. K_1 не покрывается конечным подпокрытием, то найдется меньший кубик, который тоже нельзя покрыть конечно. Обозначим его K_2.

Делаем так далее.

$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$

По теореме о вложенных параллелепипедах есть точка, которая принадлежит всем K_i.

Рассмотрим ее. $c \in \bigcap K_n$

Точка c покрыта каким-то U_{α_0}.

$\implies \exists r > 0 \ \ B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$

Длина ребра K_n – $\frac{l}{2^n}$

$\implies$ максимальное расстояние между точками $\sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n}$.

Эта штука стремится к 0.

$\implies$ найдется такой номер n, что $\sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n} < r$.

$\implies K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Но это противоречит тому, как мы выбирали кубики, т.к. нашлось множество одно, которое покрывает какой-то кубик целиком.

Получили, что куб – компакт. □

Теорема 2.12 (о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$)**.**
$K \subset \mathbb{R}^d \implies$ следующие условия равносильны.

1. K – компакт.
2. K – замкнуто и ограничено.
3. Из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к точке из K.

Замечание.
Третье свойство называется секвенциальная компактность.

Доказательство.

1) $\implies$ 2) – было.

2) $\implies$ 1)

K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. (Куб замкнутен и компактен)

$\implies K$ – замкнутое подмножество компакта $\implies K$ – компактно.

1) $\implies$ 3)

Пусть есть какая-то последовательность точек $\{x_n\} \subset K$.

D – множество $\{x_n : n \in N\}$.

Есть два случая.

Если D конечно, то какая-то точка повторилась бесконечно много раз.

Возьмем подпоследовательность, состоящую из этой точки – она имеет предел.

D бесконечно. Тогда есть ситуация хорошая – когда там есть предельная точка. Обозначим ее a.

Там есть точка x_{n_1}.

$r_1 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), .., \rho(a, x_{n_1}), 1\}$

$B_{r_1}(a)$ содержит точку из последовательности. Назовем ее x_{n_2}.

$n_2 > n_1$

$r_2 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), .., \rho(a, x_{n_2}), \frac{1}{2}\}$

Делаем и так далее.

$n_1 < n_2 < n_2 < ...\ \ \rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$

$\implies \rho(a, x_{n_k}) \to 0$ и $x_{n_k} \to a$.

Поймем, что $a \in K$. a – предельная в $D \implies a \in Cl\, D \subset K$.

Пусть у D нет предельной точки. Тогда D замкнуто (т.к. $Cl\, D = D \cap D'$, где $D' = \varnothing$)

$\implies D$ – компакт. Покроем его шариками, каждый из которых содержит ровно одну точку.

$x_n \in D$ и это не предельная точка, ибо их нет.

$\implies \exists \mathring{B}_{r_n}(x_n)$ не содержит точек из D.

$\implies B_{r_n}(x_n)$ содержит ровно одну точку из D.

$\implies D \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$ – покрытие множествами, из которого не выбрать конечное подпокрытие.

Получили противоречие.

3) $\implies$ 2)

K – замкнуто. Пусть нет. Тогда $Cl\, K = K \cup K'$.

Возьмем такую $a \in Cl\, K \setminus K$. a – это предельная точка. Тогда $\exists x_1, x_2, ... \in K$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Но у любой подпоследовательности x_{n_k} будет тот же предел. Противоречие, т.к. по условию у любой последовательности из K должна быть подпоследовательность, имеющая предел в K.

Значит, K действительно замкнуто.

K ограничено. От противного. K не лежит в $B_n(0)\ \ \forall n$.

$\implies \exists x_n \in K \setminus B_n(0) \implies \rho(x_n, 0) \geqslant n$.

Пусть x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies x_{n_k}$ ограничена, а это не так.

$\square$

Замечание.

1) $\implies$ 3) доказана для произвольного метрического пространства.

3) $\implies$ 1) верна для произвольного метрического пространства. (Но это слишком сложно)

2) $\implies$ 1) для произвольного метрического пространства не верна.

Пример.

$\mathbb{R}$ с дискретной метрикой (лентяя)

$[0,1]$ – замкнуто и ограничено. Поймем, что нет компактности.

$[0,1] \subset \bigcup\limits_{x\in[0,1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$

Следствие.

$K \subset \mathbb{R}^d$ – компакт

$\implies$ всякое бесконечное множество точек из K имеет предельные точки, принадлежащие K.

Доказательство.

$x_1, x_2, x_3, ...$ – выбрали последовательность в этом бесконечном множестве.

А у нее есть предельная точка из K. $\square$

Теорема 2.13 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности точек из $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничена $\implies$ $\{x_n\} \subset \overline{B}_R(a)$ – замкнуто и ограничено $\implies$ компакт.

$\implies$ по пункту 3 из теоремы о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

***Определение* 2.21.**

(X, ρ) – метрическое пространство.

$x_1, x_2, x_3, ...$ – фундаментальная последовательность, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

***Определение* 2.22.**

(X, ρ) – полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Замечание.

Фундаментальная последовательность ограничена.

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ – полное.

2. K – компакт в (X, ρ), то (K, ρ) – полное.

Доказательство.

1. Пусть x_n – фундаментальная последовательность. $\implies \{x_n\}$ ограничена.

   $\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

   $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

   Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   $\forall\varepsilon\ \exists M\ \ \forall k \geqslant M\ \ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$

   $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m, n \geqslant N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

   Пусть $n \geqslant \max\{N, n_M\}$

   $\implies$ существует $n_k > n$. $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

   $\implies \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

2. x_n – фундаментальная последовательность в K

   $\implies$ существует x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies$ x_n – сходится.

□

2.3. §3. Непрерывные функции

***Определение* 2.23.**
(X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства.

$f : E \to Y \quad E \subset X.$

a – предельная точка множества E.

$A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \forall a \neq x \in E$ и $\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$

Это было определение по Коши.

Запишем определение по Гейне предела функции в точке.

$\forall x_n \in E,\ x_n \neq a\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теорема 2.14 (равносильность определения по Коши и по Гейне)**.**
Коши $\implies$ Гейне.

Покажем, что если выполняется определение по Коши, то выполняется и по Гейне.

Берем подпоследовательность, стремящуюся к a:

$x_n \in E\ \ x_n \neq a\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \rho_X(x_n, a) \to 0$

$\implies \forall\delta > 0\ \exists N\ \ \forall n \geqslant N\ \ \rho_X(x_n, a) < \delta.$

Тогда это в том числе выполняется для того δ, которое выбрали для какого-то ε. А тогда по данному определению Коши $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$.

$\implies \rho_Y(f(x), A) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Гейне $\implies$ Коши

От противного. Пусть нашелся ε, для которого нет δ. (Т.е. условие Коши не выполняется для любого δ, значит можем построить последовательность, выбирая $\delta = \frac{1}{n}$)

$\delta = \frac{1}{n}\ \ \exists x_n \in E\ x_n \neq a\ \ \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$, но $\rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon$

$\rho_X(x_n, a) \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но $\rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon$

Но мы знаем из определения по Гейне $\rho_Y(f(x_n), A) \to 0$

Противоречие.

Следствие.

Предел единственен.

Действительно. Пусть он не единственен. Тогда у функции от одной и той же последовательности есть два предела в разных точках. Функция от последовательности – последовательность. А для последовательностей в метрическом пространстве уже доказали единственность предела.

Теорема 2.15.

$f : E \to Y \;\; E \subset X \;\; a$ – предельная точка E.

$A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Тогда $\exists B_r(a)$, т.ч. функция на $B_r(a)$ ограничена.

Доказательство.

$\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; x \neq a$ и $\rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < 1$

Переформулируем, что получили в предыдущей строке:

$r := \delta \;\; f(\mathring{B}_r(a) \cap E) \subset B_1(A)$

Тогда:

$f(B_r(a) \cap E) \subset B_R(A) \;\; R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\}$ $\square$

Теорема 2.16 (об арифметических действиях с пределами)**.**

$f, g : E \to Y \;\; E \subset X$

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – нормированное пространство.

a – предельная точка множества E.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A$
3. $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)\| = \|A\|$
4. Если $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lambda$, то $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)f(x) = \lambda A$
5. Если в Y есть скалярное произведение, то

   $\lim\limits_{x\to a} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle A, B\rangle$

Теорема 2.17 (Критерий Коши)**.**

$(X, \rho_X), \; (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, Y – полное.

$f : E \to Y \;\; E \subset X$ и a – предельная точка множества E.

Существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

$\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \; x \neq a \;\; \forall y \in E \; y \neq a \;\; \rho_X(x, a) < \delta \; \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Доказательство.

"$\implies$"

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in E \ x \neq a \ \ \forall y \in E \ y \neq a \ \ \rho_X(x,a) < \delta \ \rho_X(y,a) < \delta \implies \rho_Y(f(x),A) < \varepsilon \ \rho_Y(f(y),A) < \varepsilon$

$\implies \rho_Y(f(x),f(y)) \leqslant \rho_Y(f(x),A) + \rho_y(A,f(y)) < 2\varepsilon$

"$\impliedby$"

Проверим определение по Гейне. Возьмем $x_n \in E \ x_n \neq a \ \ x_n \to a$.

Проверим, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность в Y.

Возьмем ε и выберем по нему $\delta > 0$ из условия критерия Коши.

$\implies \exists N \ \ \forall n,m \geqslant N \ \ \rho_X(x_n,a) < \delta \ \rho_X(x_m,a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$

$\implies \{f(x_n)\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, т.к. Y – полное.

Если на разных последовательностях оказались разные пределы, то смешаем их, будет та сходящаяся последовательность. Отсюда узнаем, что пределы функции от них должны были быть равны. ☐

***Определение* 2.24.**

$f : E \to Y \ \ E \subset X \ \ a \in E$

f непрерывна в точке a, если либо a – изолированная точка, либо a – предельная точка множества E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Замечание.

$f : E \to Y \ E \subset X$ и непрерывна в точке a.

$g : \tilde{E} \to Z \ \ \tilde{E} \supset f(E)$ и непрерывна в точке $f(a)$.

Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Теорема 2.18.

$f : X \to Y$

f непрерывна на $X \iff$

$\forall$ открытого в Y множества $U \ \ f^{-1}(U)$ открыто в X.

Доказательство.

"$\implies$"

$V := f^{-1}(U) = \{x \in X \ : \ f(x) \in U\}$

Хотим доказать, что V открыто. Берем $a \in V$.

$\implies f(a) \in U$ – открытое множество.

$\exists \varepsilon > 0 \ \ B_\varepsilon(f(a)) \subset U$

По непрерывности в точке $a \ \ \exists \delta > 0 \ \ f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

А это определение непрерывности в "шариках".

$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$

$\implies B_\delta(a) \subset V$, т.е. a – внутренняя точка множества V.

$\implies$ все точки множества V – внутренние $\implies V$ открыто.

"$\impliedby$"

Берем $a \in X$. Надо проверить непрерывность в точке a.

$U := B_\varepsilon(f(a))$ – открытое множество.

$\implies f^{-1}(U)$ открыто. $a \in f^{-1}(U)$.

$\implies \exists \delta > 0 \;\; B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\implies f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$ – это определение непрерывности в точке a. □

Теорема 2.19.

Непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство.

$f : X \to Y \;\; K \subset X \;\; K$ – компакт.

$\implies f(K)$ – компакт.

Возьмем покрытие $f(K) \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ открытыми множествами

$V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ – открытые множества.

Это покрытие $K \subset \bigcup V_\alpha$

(если $x \in K$, но $x \notin V_\alpha \;\; \forall \alpha$, то $f(x) \in f(K)$, но $f(x) \notin U_\alpha$)

$\implies \exists V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n} \;\; K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{\alpha_j}$

$\implies f(K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} f(V_{\alpha_j}) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ – конечное покрытие. □

Следствие.

Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие (теорема Вейерштрасса).

$f : K \to \mathbb{R} \;\; K \subset X$ непрерывна $\implies \exists u, v \in K$, т.ч. $\forall x \in K \;\; f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$

Доказательство.

$f(K)$ – компакт. $\implies$ замкнут и ограничен.

Раз ограничен, то $\inf f(K)$ и $\sup f(K)$ – конечные числа.

Пусть $b := \sup f(K)$ и $b \notin f(K)$.

$\implies \exists y_n \in f(K) \;\; y_n \to b$.

b – предельная точка $\implies b \in Cl\, f(K) = f(K)$.

$\implies \exists v \in K \;\; f(v) = b$.

Аналогично найдем $a := \inf f(K)$. □

Теорема 2.20.

$f : X \to Y$.

f – непрерывная, биекция, X – компакт.

Тогда

$f^{-1} : Y \to X$ – непрерывно.

Доказательство.

$g := f^{-1}$ и надо проверить, что $\forall U$ – открытого множества в X множество $g^{-1}(U)$ открыто в Y.

$f(U) = g^{-1}(U)$ – открыто.

$f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта, значит и сам компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – замкнуто.

$\implies Y \setminus f(X \setminus U)$ – открыто. □

***Определение* 2.25.**

$f : E \to Y \ \ E \subset X$

f равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in E$ и $\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Теорема 2.21 (Кантора)**.**

$f : K \to Y \ \ K$ – компакт, f – непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

Пусть нашлось $\varepsilon > 0$, для которого не походит ни одно $\delta > 0$.

$\delta = \frac{1}{n}$. Оно не подошло, т.е. $\exists x_n, y_n \in K \ \ \rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$

x_n – последовательность точек из компакта K.

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность

$a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

$\rho_X(x_{n_k}, a) \to 0 \ \ \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$

$\implies \rho_X(y_{n_k}, a) \leqslant \rho_X(x_{n_k}, a) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$

$\implies \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = a$

По непрерывности функции f в точке a.

$\exists \delta > 0 \ \ \forall \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\rho_X(x_{n_k}, a) \to 0, \ \ \rho_X(y_{n_k}, a) \to 0$

$\implies \exists$ номер, для которого $\rho_X(x_n, a) < \delta, \ \rho_X(y_n, a) < \delta$

$\implies \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \varepsilon \leqslant \rho_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) + \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \varepsilon$

А так не бывает. □

***Определение* 2.26.**

X – линейное пространство и $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X.

Эти нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$, т.ч.

$C_1\|x\| \leqslant |||\,x\,||| \leqslant C_2\|x\| \ \ \forall x \in X$

Замечание.

Сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

$x_n \to a$ в смысле $\|\cdot\| \ \ \|x_n - a\| \to 0$

$x_n \to a$ в смысле $|||\cdot||| \ \ |||\,x_n - a\,||| \to 0$

$C_1\|x_n - a\| \leqslant |||\,x - a\,||| \leqslant C_2\|x_n - a\|$

Теорема 2.22.
В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.

Доказательство.
$\|\cdot\|$ – стандартная норма.

$p(x)$ – другая норма, e_k – элемент стандартного базиса пространства (стоит 1 на месте k).

$p(x-y) = p(\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - y_k)e_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} p((x_k-y_k)e_k) = \sum\limits_{k=1}^{d} |\, x_k - y_k \,|\, p(e_k) \leqslant$

$\leqslant (\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k-y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2)^{\frac{1}{2}} = C\|x-y\|$

Правое неравенство доказано.

В частности, этим неравенством получили, что

$\forall x \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2C} \ \ \forall y \ \ \|x-y\| < \delta \implies |\, p(x) - p(y)\,| \leqslant p(x-y) \leqslant C\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\implies p(x)$ – непрерывная функция.

S – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ – компакт.

p достигает на S наименьшего значения.

Это значение $\neq 0$ и неотрицательно $\implies > 0$.

$\min\limits_{x\in S} p(x) =: C_1 > 0$

$p(x) = p(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| \cdot p(\frac{x}{\|x\|}) \geqslant \|x\| \cdot C_1$, т.к $\frac{x}{\|x\|}$ – точка на сфере S.

Левое неравенство доказали. □

2.4. §4. Линейные операторы

***Определение* 2.27.**
X, Y – линейные пространства. $A : X \to Y$

A – линейный оператор, если

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \forall x, y \in X \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Свойства.

1. $A(0_X) = 0_Y$

   Доказательство.
   $A(0_X) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y$ □

2. $A(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$

   Доказательство.
   По индукции. □

***Определение* 2.28.**
$A, B : X \to Y$

$(A \pm B)(x) := A(x) \pm B(x)$

$(\lambda A)(x) := \lambda \cdot A(x)$

Замечание.

Такими операция получили снова линейные операторы.

Доказательство.

$(A+B)(\alpha x+\beta y) = A(\alpha x+\beta y)+B(\alpha x+\beta y) = \alpha A(x)+\beta A(y)+\alpha B(x)+\beta B(y) = \alpha(A+B)(x)+\beta(A+B)(y)$ □

Замечание.

На самом деле сейчас получили, что операторы из X в Y образуют линейное пространство.

***Определение* 2.29.**

Композиция линейных операторов

$A : X \to Y,\ B : Y \to Z$

$(BA)(x) := B(A(x))$

Обратный оператор

$A^{-1}A = Id_X$ и $AA^{-1} = Id_Y$

$A^{-1} : Y \to X$

Свойства.

1. Композиция линейных операторов – линейный оператор.
2. Обратный оператор, если он существует, единственный.
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
4. Множество обратимых линейных операторов из X в X образуют группу относительно композиции.

Доказательство.

2. Пусть B и C – обратимые к A.

   $C = Id_X \circ C = (BA)C = BAC = B(AC) = B \circ Id_Y = B$

   $\implies B = C$

4. Id_X – единица.

   $A(B \circ C(x)) = A(B(Cx)) = A \circ B(Cx)$

   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

   $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}Id_XB = B^{-1}B = Id_X$

□

Замечание.

Важный частный случай. $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Матричная запись.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

A_i – линейное отображение, дающее i-ю координату Ax.

$a_{ik} = A_i \cdot e_k$, где

e_k – столбик нулей, на k-й позиции 1.

***Определение* 2.30.**

Норма оператора. $A : X \to Y$, X, Y – нормированные пространства.

$\|A\| := \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$

***Определение* 2.31.**

Если $\|A\| \neq \infty$, то A называется ограниченным оператором.

Замечание.

Ограниченный оператор и ограниченное отображение – совершенно разные вещи.

Ограниченное линейное отображение – лишь тождественный ноль.

Свойства.

1. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = |\,\lambda\,|\,\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
4. $\|\cdot\|$ – норма в пространстве линейных ограниченных операторов.

Доказательство.

1. $\|A + B\| = \sup\|(A + B)x\| = \sup\|Ax + Bx\| \leqslant \sup(\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup\|Ax\| + \sup\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = \sup\|\lambda Ax\| = \sup|\,\lambda\,|\,\|Ax\| = |\,\lambda\,|\sup\|Ax\| = |\,\lambda\,|\,\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \implies \sup\|Ax\| = 0 \implies \|Ax\| = 0\ \ \forall x\ \ \|x\| \leqslant 1$

   Пусть $x \in X\ \ x = \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$

   $Ax = A(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$
4. Следует из предыдущих трех.

$\square$

Теорема 2.23.

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{c > 0\ :\ \|Ax\| \leqslant C\|x\| \text{ при всех } x \in X\}$

Доказательство.

Пронумеруем их $N_1, ...N_5$.

$N_1 = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$

$N_1 \geqslant N_2\ \ N_1 \geqslant N_3$

$N_3 = N_4$, т.к. $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|\frac{1}{\|x\|}Ax\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$

$N_4 = N_5$

$N_4 = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leqslant N_4\|x\|$

$N_2 \geqslant N_1$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Возьмем $x : \|x\| \leqslant 1 \implies \|\frac{x}{1+\varepsilon}\| < 1$

$\implies \|A(\frac{x}{1+\varepsilon})\| \leqslant N_2$

$\implies \frac{1}{1+\varepsilon}\|Ax\| \leqslant N_2$

$\implies \|Ax\| \leqslant (1+\varepsilon)N_2$

$\implies \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant (1+\varepsilon)N_2$

$\implies N_1 \leqslant (1+\varepsilon)N_2$ и устремим ε к 0.

$N_5 \geqslant N_1$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$\implies \|Ax\| \leqslant (N_5 + \varepsilon)\|x\|$

$\implies$ если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ax\| \leqslant N_5 + \varepsilon$

$\implies \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant N_5 + \varepsilon$

$\implies N_1 \leqslant N_5 + \varepsilon$ и устремим $\varepsilon \to 0$. □

Следствие.

1. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \ \ \forall x \in X$
2. $\|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$

   Доказательство.
   $\|BA\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|B(Ax)\| \leqslant \sup\limits_{\|y\| \leqslant \|A\|} \|By\| = \sup\limits_{\|y\| \leqslant \|A\|} \|B \cdot \frac{y}{\|A\|} \cdot \|A\|\| = \|A\| \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} \|By\| = \|A\|\|B\|$ □

Теорема 2.24.

$A : X \to Y$ – линейный оператор.

Тогда следующие условия равносильны:

1. A – ограниченный оператор.
2. A – непрерывен в 0.
3. A – непрерывен.
4. A – равномерно непрерывен.

Доказательство.

$4 \implies 3 \implies 2$ – очевидно.

$1 \implies 4$

$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\|x-y\|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \forall \|x-y\| < \delta \implies \|Ax - Ay\| < \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$2 \implies 1$

$A0_X = 0_Y$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \|x\| = \|x - 0_X\| < \delta \implies \|Ax\| = \|Ax - A0_X\| < \varepsilon$

Поймем, что $\|A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$

Если $\|x\| < 1$, то $\|\delta x\| < \delta \implies \|A(\delta x)\| < \varepsilon$

$\implies \delta\|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$ □

Теорема 2.25.

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (говорим про стандартную норму, т.е. корень из суммы квадратов)

$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$

Доказательство.

$\|Ax\|^2$. Как эта штука устроена?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$\|Ax\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2) = \|x\|^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

Тогда:

$\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\sqrt{\|x\|^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2}}{\|x\|} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$ □

2.5. §5. Длина кривой

***Определение* 2.32.**

$\gamma : [a, b] \to X$, X – метрическое пространство. γ – непрерывно.

Тогда это отображение называется путём.

Начало пути – $\gamma(a)$.

Конец пути – $\gamma(b)$.

Носитель пути – $\gamma([a, b])$.

Замкнутый путь – $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Простой путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$.

Простой замкнутый путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$, кроме точек a, b но $\gamma(a) = \gamma(b)$

Противоположный путь – $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, где $\tilde{\gamma} : [a, b] \to X$

Конец γ = начало $\tilde{\gamma}$

Начало γ = конец $\tilde{\gamma}$

Эквивалентные пути. $\gamma : [a, b] \to X, \;\; \tilde{\gamma} : [c, d] \to X$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$, если $\exists \tau : [a, b] \to [c, d]$ строго монотонна, непрерывна и $\tau(a) = c \;\; \tau(b) = d$, такое что $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau$.

Замечание.

Это действительно отношение эквивалентности.

$\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies \tilde{\gamma} \sim \gamma$, т.к. $\exists \tau^{-1}$ – обратная к τ, тоже строго монотонна, непрерывна и $\tau^{-1}(c) = a \ \ \tau^{-1}(d) = b$

Тогда $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \tau^{-1}$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\tilde{\gamma}}$

$\exists \tau \ \ \gamma = \tilde{\gamma}\tau \ \ \exists \tilde{\tau} \ \ \tilde{\gamma} = \tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tau}$

$\implies \gamma = \tilde{\gamma}\tau = \tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tau}\tau$

***Определение* 2.33.**

Кривая – класс эквивалентных путей.

Представитель этого класса – параметризация кривой

Носитель кривой – носитель путей из этого класса.

***Определение* 2.34.**

Длина пути $l(\gamma)$.

$\gamma : [a, b] \to X$

Разобьем отрезок $[a, b]$ какими-то промежуточными точками.

$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$

$l(\gamma) := \sup \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$

Пояснение. Супремум берется от множества, в которое входят все суммы такого вида. Т.е. участвует и n, и само разбиение.

Замечание.

Длины эквивалентных путей равны, длины противоположных путей тоже равны.

***Определение* 2.35.**

Длина кривой – длина любого пути из класса эквивалентности.

Свойства.

1. $l(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2. $l(\gamma) \geqslant$ длине любой вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.26 (об аддитивности длины кривой)**.**

$\gamma : [a, b] \to X \ \ c \in (a, b)$

$\implies l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$

Доказательство.

"$\geqslant$"

Возьмем разбиение для $[a, c]$ $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = c$

И разбиение для $[c, b]$ $c = s_0 < s_1 < ... < s_n = b$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leqslant l(\gamma)$

Припишем sup по всем t. (От t зависит лишь одна сумма). Получим

$l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leqslant l(\gamma)$

Припишем sup по всем разбиениям s.

$l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]}) \leqslant l(\gamma)$

"$\leqslant$"

Снова возьмем разбиение. Только теперь – всего отрезка $[a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

Возможно, одна из t_i попала на c. Тогда надо просто разбить и понять по отдельности.

А что если нет?

$\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leqslant$

Пусть $t_j < c < t_{j+1}$.

Заметим, что по неравенству треугольника $\rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leqslant \rho(\gamma(t_j), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{j+1}))$

Можем тогда добавить точку c в разбиение.

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) = \sum\limits_{k=1}^{j+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) + \sum\limits_{k=j+2}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) \leqslant l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$

Переходим к sup по t и получаем:

$l(\gamma) \leqslant l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$ □

Дальше кривые и пути в $\mathbb{R}^m$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

***Определение* 2.36.**

$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$

γ – r-гладкий путь, если все $\lambda_k \in C^r[a, b]$

Гладкий путь – $r = 1$.

Гладкая кривая, если в классе эквивалентности есть гладкая параметризация.

***Определение* 2.37.**

Кусочно гладкий путь – можно нарезать на конечное число кусочков, на каждом из которых путь гладкий.

Лемма.

γ – гладкий путь.

$\Delta \subset [a, b]$ – отрезок, $l(\Delta)$ – длина этого отрезка.

$m_\Delta^{(i)} := \min\limits_{t \in \Delta} |\, \gamma_i'(t) \,|$

$M_\Delta^{(i)} := \max\limits_{t \in \Delta} |\, \gamma_i'(t) \,|$

$m_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (m_\Delta^{(i)})^2}$

$M_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (M_\Delta^{(i)})^2}$

Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_{\Delta}) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$

Доказательство.

Возьмем разбиение $\Delta : t_0, t_1, ..., t_n$

a_k – длина k-го звена ломаной. (От $\gamma(t_{k-1})$ до $\gamma(t_k)$)

$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma_i'(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})$ $\xi_{ik} \in (t_{k-1}, t_k)$ по теореме Лагранжа.

$|\,\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})\,| = |\,\gamma_i'(\xi_{ik})\,|\,(t_k - t_{k-1}) \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

$a_k^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} |\,\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})\,|^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} (M_\Delta^{(i)})^2 (t_k - t_{k-1})^2$

$\implies a_k \leqslant M_\Delta(t_k - t_{k-1})$

Аналогично $a_k \geqslant m_\Delta(t_k - t_{k-1})$

$m_\Delta l(\Delta) = m_\Delta \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant M_\Delta \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = M_\Delta l(\Delta)$

А теперь переходим к sup по t.

$m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_\Delta) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$ □

Теорема 2.27.

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – гладкий путь.

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + ... + \gamma_m'(t)^2}\, dt = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Доказательство.

Рассмотрим разбиения $[a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$

$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$

Тогда уже знаем, что

$m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant l(\gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leqslant M_k(t_k - t_{k-1})$

Заметим, что так же верно будет и

$m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant M_k(t_k - t_{k-1})$

Теперь все сложим.

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

И

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

Осталось понять, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \to 0$, когда мелкость разбиения $\to 0$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k}(t_k - t_{k-1}) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{{M_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)}}^2 - {m_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)}}^2}{M_k + m_k}(t_k - t_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{M_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)} + m_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)}}{M_k + m_k}(M_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)})(t_k - t_{k-1}) \leqslant$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} (M_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1},t_k]}^{(i)})(t_k - t_{k-1}) \leqslant$

Заметим, что $M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]} - m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]} \leqslant w_{\gamma_i'}(t_k - t_{k-1}) \leqslant w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|)$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|)(t_k - t_{k-1}) = (b-a)\sum\limits_{i=1}^{m} w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|) \to 0$ □

Следствие.

1. Длина графика функции. $f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

   $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$

   Доказательство.
   $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$
   $\gamma_1'(t) = 1$
   $\gamma_2'(t) = f'(t)$ и подставим. □

2. Длина в полярных координатах.
   $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
   (по углу задаем длину, получаем путь, заданный полярными координатами)
   $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$

   Доказательство.
   $\gamma_1(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$
   $\gamma_2(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$
   $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$
   $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$
   $\|\gamma'(\varphi)\|^2 = ((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2$
   □

3. $l(\gamma) \leqslant (b-a) \max\limits_{t\in[a,b]} \|\gamma'(t)\|$

   Доказательство.
   $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$ □

***Определение* 2.38.**
Точка t_0, в которой $\gamma'(t_0) = 0$ называется особой точкой.

***Определение* 2.39.**
γ – кривая, имеющая конечную длину S.

Натуральная параметризация кривой

$\tilde{\gamma} : [0, S] \to X$, т.ч. $\forall s \in [0, S] \;\; l(\tilde{\gamma}\big|_{[0,s]}) = s$

Теорема 2.28.

Любая гладкая кривая без особых точек имеет натуральную параметризацию.

Доказательство.

γ – какая-то гладкая параметризация без особых точек.

$S = l(\gamma) \leqslant (b-a)\max\|\gamma'\|$, т.е. кривая имеет конечную длину.

$\tau : [a,b] \to [0,S]$

$\tau(t) = l(\gamma\Big|_{[a,t]})$

$\tau(a) = 0 \;\; \tau(b) = S$

Поймем, что τ строго монотонно возрастает и непрерывна.

$\tau(t) = \int\limits_a^t \|\gamma'(u)\|\, du$ – непрерывная функция.

$\tau'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \implies \tau$ строго монотонна.

$\implies$ существует τ^{-1}

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau^{-1}$ – натуральная параметризация.

Задана на том отрезке, на котором надо.

Надо понять, что такое $l(\tilde{\gamma}\Big|_{[0,s]}) = l(\gamma\tau^{-1}\Big|_{[0,s]}) = l(\gamma\Big|_{[a,\tau^{-1}(s)]}) =$

Если $\tau^{-1}(s) = t$, то

$= l(\gamma\Big|_{[a,t]}) = \tau(t) = \tau(\tau^{-1}(s)) = s$ $\square$

Свойства натуральной параметризации.

Если γ – натуральная параметризация, то $\|\gamma'(t)\| = 1$

Доказательство.

$s = l(\gamma\Big|_{[0,s]}) = \int\limits_0^s \|\gamma'(t)\|\, dt$

Продифференцируем по s

$1 = \|\gamma'(t)\|$ $\square$

***Определение* 2.40.**

$E \subset X$ – линейно связное. (Часто слово линейно будет опускаться, т.к. других связностей не будет)

Если:

$\forall u, v \in E$ существует путь $\gamma : [a,b] \to E$, т.ч. u – его начало, а v – его конец.

***Определение* 2.41.**

Область – открытое линейно связное множество.

Теорема 2.29.

Ω – область в $\mathbb{R}^m$. Тогда между любыми двумя ее точками существует ломаная, целиком содержащаяся в Ω и соединяющая эти точки.

Доказательство.

$u, v \in \Omega$

$\gamma : [a,b] \to \Omega$

$\gamma(a) = u \quad \gamma(b) = v$

$\gamma([a, b])$ – компакт.

У каждой точки пути можно выбрать шарик с центром в ней, что $B_{2r_x}(x) \subset \Omega$

Выберем конечное подпокрытие.

$B_{2r_{x_1}}(x_1), ..., B_{2r_{x_n}}(x_n)$ покрывают $\gamma([a, b])$

И

$\overline{B}_{r_{x_1}}(x_1), ..., \overline{B}_{r_{x_n}}(x_n) \subset \Omega$ (в силу уполовинивания радиуса)

$\gamma([a, b]) \cap \overline{B}_{r_{x_1}}(x_1)$

Тогда можно выбрать последнюю точку на пути из каждого шарика и построить по ним ломаную. □

Теорема 2.30 (Больцано-Коши)**.**

E – связное множество

$f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна

$a, b \in E \quad f(a) = A \;\; f(b) = B$

Тогда $\forall C$ между A и B существует $c \in E$, т.ч. $f(c) = C$

Доказательство.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$ – кривая, соединяющая a и b.

$g := f \circ \gamma \quad g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция

$g(\alpha) = f(\gamma(\alpha)) = f(a) = A$

$g(\beta) = f(\gamma(\beta)) = f(b) = B$

$\implies$ существует $t \in [\alpha, \beta]$, т.ч. $f(\gamma(t)) = g(t) = C$

$c := \gamma(t) \in E$ □

3. 7. Ряды

3.1. §0. Расширенное напоминание

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Частичная сумма $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Сходимость – $\exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ означает $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Были еще всякие свойства(их доказательства в конспекте предыдущего семестра)

Линейность

$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

Группировка членов ряда

$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + ...$

не меняет суммы сходящегося ряда.

Необходимое условие сходимости.

$\sum a_n$ – сходится $\implies a_n \to 0$

А теперь – расширение:

Теорема 3.1 (Критерий Коши)**.**
$\sum a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m > n > N \quad \left| \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

Доказательство.
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\sum a_n$ – сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$\iff$ (по критерию Коши для предела последовательностей) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n > N \, | \, S_m - S_n \, | < \varepsilon$

$S_m - S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$ □

Теорема 3.2.
$\sum a_n$

1. Если в каждой группе не более, чем M членов и $a_n \to 0$, то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).

2. Если в каждой группе члены одного знака, то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).

Доказательство.

1. $S_{n_k} \to S$ при $k \to \infty$
   (Т.к. группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)
   $n_1 < n_2 < n_3 < ...$
   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall k \geqslant K \quad |\, S - S_{n_k} \,| < \varepsilon$
   Найдем N, т.ч. $\forall n > N \quad |\, S - S_n \,| < 2\varepsilon$
   $N \geqslant N_K$
   Если $n > N$
   $n_k \leqslant n < n_{k+1} \quad k \geqslant K$
   $S_n - S_{n_k} = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + ... + a_n$ – тут $\leqslant M$ слагаемых.
   Возьмем N_1, т.ч.
   $\forall n \geqslant N_1 \quad |\, a_n \,| < \frac{\varepsilon}{M}$
   $N \geqslant N_1 + M$ – второе условие на N.
   Тогда $|\, S_n - S_{n_k} \,| \leqslant |\, a_{n_k+1} \,| + |\, a_{n_k+2} \,| + ... + |\, a_n \,| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$
   $|\, S - S_n \,| \leqslant |\, S - S_{n_k} \,| + |\, S_{n_k} - S_n \,| \leqslant 2\varepsilon$
2. $S_{n_k} \to S$
   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall k \geqslant K \quad |\, S_{n_k} - S \,| < \varepsilon$
   $N := n_K$
   если $n \geqslant N$, то $n_k \leqslant n < n_{k+1}$
   $S_n = S_{n_k} + a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + ... + a_n$
   если в группе все члены $\geqslant 0$, то $S_n \geqslant S_{n_k}$
   $S_n = S_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}-1} - ... - a_{n+1}$
   $S_{n_{k+1}} \geqslant S_n$
   Тогда $|\, S_n - S \,| < \varepsilon$
   Если в группе отрицательные члены
   $S_n \leqslant S_{n_k}$ и $S_n \geqslant S_{n_{k+1}}$
   и тот же вывод.

$\square$

3.2. §1. Знакопостоянные ряды

Теорема 3.3.
$a_n \geqslant 0$
$\sum a_n$ сходится $\iff$ последовательность частичных сумм ограничена.

Доказательство.
"$\implies$" – очевидная
Ряд сходится, значит, частичные суммы имеют предел, значит ограничены.
"$\impliedby$"
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$

$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant ...$

А монотонно возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. □

Теорема 3.4 (Признак сравнения)**.**

$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

1. $\sum b_n$ сходится $\implies \sum a_n$ сходится
2. $\sum a_n$ расходится $\implies \sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. $\sum b_n$ – сходится

   $\implies B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ – ограничена

   $\implies A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leqslant B_n$

   – ограничены

   $\implies$ у A_n есть конечный предел $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

2. От противного.

   $\sum b_n$ сходится $\implies \sum a_n$ сходится.

□

Следствие.

$a_n, b_n \geqslant 0$

1. Если $a_n = O(b_n)$ и $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится
2. Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

1. $0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$
2. Выкидываем все нолики из b_n

   Тогда $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

   $\implies$ с некоторого места $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant 2$

   $\implies a_n < 2b_n < 4a_n$

   Снова получили неравенство

□

Теорема 3.5 (признак Коши)**.**

$a_n \geqslant 0$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится

3. $q^* := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

   Если $q^* < 1$ сходится, то и ряд сходится.

   Если $q^* > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

1. $0 \leqslant a_n \leqslant q^n$

   ряд мажорируется геометрической прогрессией, а значит сходится

2. $a_n \geqslant 1$ не выполняется необходимое условие.

3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q^* < 1$

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$

   $q := \frac{q^*+1}{2}$

   начиная с некоторого момента $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < q$

   Т.е. $\sqrt[k]{a_k} < q$ при $k \geqslant K$, тогда по пункту 1 ряд сходится.

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q^* > 1$

   $\implies \exists n_k$, т.ч.

   $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q^* > 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера K

   $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$

   $\implies a_{n_k} > 1$ при $k \geqslant K$

   $\implies a_n \not\to 0$

   $\implies$ ряд расходится.

$\square$

Замечание.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

Теорема 3.6 (признак Даламбера)**.**

$a_n > 0$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.

2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

3. $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot ... \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$

   $\implies a_n \leqslant d^{n-1} a_1$

   Ряд, мажорирующий геометрической прогрессией.

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \leqslant a_{n+1} \implies$

   $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$

   $\implies a_n \not\to 0 \implies$ расходится

3. $d^* < 1$

   $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

   $d^* > 1$

   $\implies$ с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$

   $\implies$ ряд расходится.

$\square$

Упражнение. Если $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится.

Если $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд расходится.

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

По Даламберу $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

По Коши.

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{xe}{n} \to 0$

Теорема 3.7.

$a_n > 0$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d^*$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d^*

Доказательство.

Применяем Штольца!

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d^*$

$\square$

Упражнение. Придумать ряд, про который критерий Коши позволяет выяснить, что он сходится, а критерий Даламбера нет.

Теорема 3.8.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и монотонна.

Тогда

$$\left| \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \max\{|\, f(a)\,|\,, |\, f(b)\,|\}$$

Доказательство.

Пусть функция монотонно возрастает. (В другом случае аналогично)

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

$$-f(b) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=a}^{b} f(k) \leqslant -f(a)$$

$$\Longrightarrow \left| \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \max\{|\, f(a)\,|\,, |\, f(b)\,|\}$$

□

Теорема 3.9 (Интегральный признак сходимости)**.**

$f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

И f монотонно убывает, тогда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$

Ведут себя одинаково.

Доказательство.

Из сходимости интеграла получим сходимость ряда.

$$F(x) = \int_a^X f(t)\,dt \to L$$

$$\left| \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right| \leqslant \max\{f(1), f(n)\} \leqslant f(1)$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant F(n) - F(1) + f(1)$$

Но т.к. $F(x)$ имеет предел, то правая часть ограничена.

А раз частичные суммы ограничены и слагаемые неотрицательны, то $\sum f(n)$ сходится.

Теперь из сходимости ряда получим сходимость интеграла.

$$\left| \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right| \leqslant \max\{f(1), f(n)\} \leqslant f(1)$$

$$F(n) \leqslant S_n + f(1) + F(1)$$

Т.к. S_n имеет предел, то ограничена, значит, $F(n)$ – ограниченная последовательность.

$$F(x) \leqslant F(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant M$$

$\Longrightarrow$ $F(x)$ монотонно возрастают и ограничены $\Longrightarrow$ предел есть.

$\Longrightarrow$ интеграл сходится.

□

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Если $p \leqslant 0$, то $\frac{1}{n^p} \not\to 0 \implies$ ряд расходится

Если $p > 0$, то

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, монотонно убывает

Тогда по интегральному признаку

Смотрим на $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

А он сходится при $p > 1$.

Т.е. ряд сходится $\iff p > 1$

Следствие.

Если $a_n \geqslant 0$ и $a_n = O(\frac{1}{n^p})$, при $p > 1$, то ряд сходится.

Пример.

$\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ монотонно убывает.

Можно смотреть на интеграл

$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_{\ln 2}^\infty \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \infty$

3.3. §2. Знакопеременные ряды

***Определение* 3.1.**

$z_n \in \mathbb{C}$

$\sum \operatorname{Re} z_n \quad \sum \operatorname{Im} z_n$ – сходятся, то по определению сходится $\sum z_n$

$\sum\limits_{n=1}^\infty z_n := \sum\limits_{n=1}^\infty \operatorname{Re} z_n + i \sum\limits_{n=1}^\infty \operatorname{Im} z_n$

$S_n := \sum\limits_{k=1}^n z_k$ если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд сходится и его сумма S.

Т.к. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

***Определение* 3.2.**

$\sum\limits_{k=1}^\infty z_n$ – абсолютно сходится, если $\sum\limits_{k=1}^\infty |\, z_n \,|$ сходится.

Свойства.

1. $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то $\sum \alpha a_n + \beta b_n$ абсолютно сходится.
2. $\sum z_n$ абсолютно сходится $\iff \sum \operatorname{Re} z_n, \ \sum \operatorname{Im} z_n$ абсолютно сходятся
3. $S = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$, то $|\, S \,| \leqslant \sum\limits_{n=1}^\infty |\, a_n \,|$

Доказательство.

1. $|\, \alpha a_n + \beta b_n \,| \leqslant |\, \alpha \,|\,|\, a_n \,| + |\, \beta \,|\,|\, b_n \,|$
2. “ $\Longrightarrow$ ”

   $|\operatorname{Re} z_n \,| \leqslant |\, z_n \,|$

   $|\operatorname{Im} z_n \,| \leqslant |\, z_n \,|$

"$\Longleftarrow$"

$|\, z_n \,| \leqslant |\, \mathrm{Re}\, z_n \,| + |\, \mathrm{Im}\, z_n \,|$

3. $|\, S_n \,| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\, a_k \,| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$

$\left| \lim\limits_{n\to\infty} S_n \right| = \lim\limits_{n\to\infty} |\, S_n \,| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$

□

Теорема 3.10.
Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.
$(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$

$(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$

$a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$

$|\, a_n \,| = (a_n)_+ + (a_n)_-$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, a_n \,|$ сходится

$\Longrightarrow$ $\sum (a_n)_+$ и $\sum (a_n)_-$ сходятся, т.к. все положительно.

$\Longrightarrow$ сходится и их разность, что есть $\sum a_n$ □

Упражнение. Доказать теорему с помощью критерия Коши.

***Определение* 3.3.**
$\sum a_n$ – условно сходящийся, если он сходится, но не абсолютно.

Теорема 3.11 (Преобразование Абеля)**.**
$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j-1} b_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} =$

Заметим, что $A_0 = 0$,

$= \sum\limits_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Теорема 3.12 (Признак Дирихле)**.**

1. $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$
2. b_n монотонна
3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k-1})$

$|\, A_n b_n \,| \leqslant M \,|\, b_n \,| \to 0$ при $n \to \infty$

Осталось понять, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ – сходится.

Пусть b убывают.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, A_k \,| \,|\, b_k - b_{k+1} \,| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} M \,|\, b_k - b_{k+1} \,| = M \sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$

Заметим, что это сходится, т.к.

$\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \to b_1$ при $n \to \infty$

$\implies \sum |\, A_k \,| \,|\, b_k - b_{k+1} \,|$ сходится $\implies \sum A_k(b_k - b_{k+1})$ сходится. □

Теорема 3.13 (Признак Абеля)**.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонна
3. $|\, b_n \,| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Из этого всего следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Доказательство.

b_n монотонна и ограничена $\implies \exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n =: b$

$\tilde{b}_n := b_n - b$ монотонна и стремится к 0.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

$\implies \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничена

Т.е. для a и $\tilde{b}$ выполнено условие признака Дирихле.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\tilde{b}_n + b) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Первое слагаемое сходится по доказанному, второе слагаемое сходится по условию

Получаем, что и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. □

***Определение* 3.4.**

Знакочередующийся ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad a_n \geqslant 0$

Теорема 3.14 (Признак Лейбница)**.**

Если a_n монотонно убывают и стремятся к 0, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Причем

$S_{2n} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant S_{2n+1}$

Доказательство.

$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geqslant S_{2n-2}$

Т.е. $0 \leqslant S_2 \leqslant S_4 \leqslant ...$

$a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + ... + (-a_{2n} + a_{2n+1}) = S_{2n-1} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) \leqslant S_{2n-1}$

Т.е. $S_1 \geqslant S_3 \geqslant S_5 \geqslant ...$

Получили последовательность вложенных отрезков.

$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset ...$

$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$

Тогда у них есть единственная точка пересечения и концы к ней стремятся.

Пусть S – та точка. Тогда

$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$

$\square$

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$

Если $p \leqslant 0$, то $\left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| \geqslant 1$ и $\not\to 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$ $a_n := \frac{1}{n^p} \searrow 0 \implies$ ряд сходится

Пример (Ряд Лейбница).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n = \ln 2n + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

Пример.

$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12})...$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{\ln 2}{2}$

***Определение* 3.5.**

$\sum a_n$ и $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция.

$\sum a_{\varphi(n)}$ – перестановка ряда $\sum a_n$

Теорема 3.15.

Если ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, то $\sum a_{\varphi(n)}$ тоже абсолютно сходится, и сумма рядов одинакова.

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \quad \tilde{S}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$

Случай 1. $a_n \geqslant 0 \quad S := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\tilde{S}_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + ... + a_{\varphi(n)} \leqslant a_1 + a_2 + ... + a_m = S_m \leqslant S$

$m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\}$

Т.е. $\tilde{S} \leqslant S \implies$ ряд $\sum a_{\varphi(n)}$ сходится $\implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leqslant S$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \leqslant S \implies \sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} \leqslant \sum a_{\varphi(n)} \leqslant S$

Но $\sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} = S$

$\implies$ сумма не поменялась.

Случай 2. $a_n \in \mathbb{R} \quad \sum |\, a_n \,|$ сходится $\implies \sum (a_n)_{\pm}$ сходятся

$\sum (a_{\varphi(n)})_{\pm}$ сходятся и $\sum (a_{\varphi(n)})_{\pm} = \sum (a_n)_{\pm}$

$\implies \sum a_{\varphi(n)} = \sum (a_{\varphi(n)})_+ - \sum (a_{\varphi(n)})_-$ – сходится

$= \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_- = \sum a_n$

Случай 3. $a_n \in \mathbb{C} \quad \sum |\, a_n \,|$ сходится $\implies |\operatorname{Re} a_n\,|$ и $|\operatorname{Im} a_n\,|$ сходятся. □

Замечание.

1. $a_n \geqslant 0$ и $\sum a_n$ расходится

   $\implies \sum a_{\varphi(n)}$ расходится.

2. $\sum a_n$ – условно сходится, то $\sum (a_n)_+$ и $\sum (a_n)_-$ расходятся.

   Доказательство. Обе эти штуки сходиться не могли, иначе бы сошлась сумма модулей, т.е. тогда бы сходился модуль.

   Ровно одна из них тоже сходиться не могла. Т.к. иначе бы ряд $\sum a_n = \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_-$ расходился. □

Теорема 3.16 (Римана)**.**

$a_n \in \mathbb{R} \quad \sum a_n$ условно сходится.

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует такая перестановка φ, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$.

И существует такая перестановка φ, что частичные суммы ряда $\sum a_{\varphi(n)}$ вообще не имеют предела.

Доказательство.

Пусть $S \in \mathbb{R}$.

$b_1, b_2, b_3, ...$ – неотрицательные члены ряда в порядке их следования в $\{a_k\}$.

$c_1, c_2, c_3, ...$ – отрицательные члены ряда в порядке их следования в $\{a_k\}$.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ расходятся.

Более того, $\sum b_n = +\infty \quad \sum c_n = -\infty$

$\sum a_n$ сходится $\implies a_n \to 0 \implies b_n \to 0, \;\; c_n \to 0$

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} > S \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1}$

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1} < S \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1 - 1}$

$b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} > S \geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1}$

$b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} + c_{m_1+1} + ... + c_{m_2} > S \geqslant$
$\geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + ... + c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} + c_{m_1+1} + ... + c_{m_2-1}$

И так далее.

$|\, S_{...} - S \,| \leqslant |\,$последнего взятого элемента$\,| \to 0$

$S = +\infty$

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} > 1 \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1}$

$b_1 + ... + b_{n_1} + c_1$

$b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} > 2 \geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1}$

И так далее. □

Теорема 3.17 (Коши)**.**

$\sum a_n \quad \sum b_n$ – абсолютно сходятся.

$A := \sum a_n, \ \ B := \sum b_n$

Тогда ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \ \ B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$

$\tilde{A}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |\, a_k \,| \ \ \tilde{B}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |\, b_k \,|$

$\tilde{A} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,| \ \ \tilde{B} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, b_k \,|$

$\tilde{S}_m$ – частичная сумма ряда из $|\, a_n b_k \,|$

Рассмотрим $\tilde{S}_m$ и пусть l – наибольший номер, встречающийся в индексах из суммы $\tilde{S}_m$

$\tilde{S}_m \leqslant \sum\limits_{j,k=1}^{l} |\, a_j \,|\,|\, b_k \,| = \sum\limits_{j=1}^{l} |\, a_j \,| \sum\limits_{k=1}^{l} |\, b_k \,| = \tilde{A}_l \tilde{B}_l \leqslant \tilde{A}\tilde{B} < +\infty$

Частичные суммы $\tilde{S}_m$ ограничены $\implies$ ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д.

S_m – частичная сумма такого ряда

$S_{n^2} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_j b_k = A_n B_n \to AB$

Пусть $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$

$S_m = S_{n^2} + \sum\limits_{k=1}^{...} a_{n+1} b_k + \sum\limits_{k=n}^{...} a_k b_{n+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} |\, a_{n+1} \,|\,|\, b_k \,| + \sum\limits_{k=1}^{n} |\, a_k \,|\,|\, b_{n+1} \,| = |\, a_{n+1} \,| \tilde{B}_{n+1} + |\, b_{n+1} \,| \tilde{A}_n \leqslant |\, a_{n+1} \,| \tilde{B} + |\, b_{n+1} \,| \tilde{A} \to 0$

$\implies S_n \to AB$ □

***Определение* 3.6.**

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + ... + a_nb_1$

Замечание.

Пояснение, почему именно такое:

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_kt^k \sum\limits_{k=1}^{n} b_nt^k = \sum\limits_{k=1}^{2n} c_kt^k$

$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + ... + a_nb_1$

Теорема 3.18 (Мертенса)**.**

$\sum a_n$ абсолютно сходится, $\sum b_n$ сходится

$A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \ \ B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (произведение рядов) сходится и его сумма равна AB.

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот вам несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок.

2. Просто сходимости рядов не хватает.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

   $c_n = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + ... + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$
   $= (-1)^{n-2}(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}})$

   $n-1$ слагаемых

   $\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{n-1}$

   $|\, c_n \,| \geqslant 1 \implies$ ряд $\sum c_n$ расходится.

Теорема 3.19 (Абеля)**.**

$\sum a_n = A, \ \ \sum b_n = B, \ \ \sum c_n = C$

И $\sum c_n$ – произведение $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Тогда $AB = C$.

Лемма.

$x_n \to x, \ \ y_n \to y$ при $n \to \infty$.

Тогда

$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + ... + x_ny_1}{n} \to xy$

Доказательство.

Пусть $y = 0$. надо доказать, что $\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + ... + x_ny_1}{n} \to 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа M, что $|\, x_n \,| \leqslant M \quad |\, y_n \,| \leqslant M \ \ \forall n$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \ \forall n \geqslant N \quad |\, y_n \,| < \varepsilon$

Возьмем $n > N$.

$|\, x_1y_n \,| + |\, x_2y_{n-1} \,| + ... + |\, x_{n-N}y_{N+1} \,| + |\, x_{n-N+1}y_N \,| + ... + |\, x_ny_1 \,|$

Первые $n - N$ слагаемых оценим сверху, как $(n - N)M\varepsilon$. Оставшиеся оценим как $\leqslant M^2N$

$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + ... + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + ... + |x_ny_1| \leqslant M\varepsilon(n-N) + M^2N$

$\left|\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+...x_ny_1}{n}\right| \leqslant \frac{M\varepsilon(n-N)+M^2N}{n} < \varepsilon M + \varepsilon M$

(Последнее – при достаточно больших n).

Пусть $y_n = y$

$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+...+x_ny_1}{n} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}y \to xy$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$\tilde{y}_n := y_n - y \to 0$

$\frac{x_1\tilde{y}_n+x_2\tilde{y}_{n-1}+...+x_n\tilde{y}_1}{n} \to 0$

$\frac{x_1y+x_2y+...+x_ny}{n} \to xy$

И сложим. Получим ровно то, что надо.

$\square$

Доказательство. (теоремы)

$\frac{A_1B_n+A_2B_{n-1}+...+A_nB_1}{n} \to AB$ по лемме.

Но что же написано в числителе?

$a_1(b_1+b_2+...+b_n) + (a_1+a_2)(b_1+b_2+...+b_{n-1}) + ... + (a_1+a_2+...+a_n)b_1 =$
$= na_1b_1 + (n-1)(a_1b_2+a_2b_2) + (n-2)(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1) + ... =$
$= nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + ... + c_n = C_1 + C_2 + ... + C_n$

Получается, что знаем, что $\frac{C_1+C_2+...+C_n}{n} \to AB$

Но с другой стороны, $\frac{C_1+C_2+...+C_n}{n} \to C$

$\implies C = AB$ $\square$

3.4. §3. Бесконечные произведения

***Определение* 3.7.**

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$

$P_n := \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ – частичные произведения.

Если $\exists P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$

   $P_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2}) \cdot ... \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot ... \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}$

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4n^2})$

   $P_n = (1-\frac{1}{4^2})(1-\frac{1}{6^2}) \cdot ... \cdot (1-\frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot ... \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n)!!)^2} \to \frac{2}{\pi}$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}$, при $0 < x < 1$

Свойства.

Считаем, что $p_n \neq 0 \ \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ – сходится $\implies \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

   Доказательство.
   $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ □

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $p_n > 0 \ \forall n$

   Тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится.

   Доказательство.
   $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$

   $\ln P_n = \ln(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_k =: S_n$

   S_n имеет предел $\iff \ln P_n$ имеет предел $\iff P_n$ имеет предел. □

Пример.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$, где p_n – n-ое простое число.

$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geqslant \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$

Вывод: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится.

Более того $P_n \geqslant \ln n + o(1)$

Теорема 3.20.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится, где p_n – n-ое простое число.

Доказательство.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{p_n}{p_n-1})$ – расходится

$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln(1-\frac{1}{x}) \leqslant$

$-2t \leqslant ln(1-t)$ при достаточно малых t.

$\leqslant -2(-\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} \leqslant C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$

$\implies \sum \frac{1}{p_n}$ расходится. □

Замечание.

На самом деле

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$

3.5. §4. Функциональные последовательности и ряды.

***Определение* 3.8.**

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

f_n поточечно сходится к f на множестве E, если $\forall x \in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

***Определение* 3.9.**

f_n равномерно сходится к f на множестве E.

$f_n \rightrightarrows f$ на E.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Замечание (переформулировка).

Поточечная

$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Равномерная

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Пример.

$f_n(x) = x^n \quad E = (0, 1)$

$f \equiv 0 \ \ f_n$ сходится к f поточечно.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in (0, 1) \ \ x^n < \varepsilon$ – выполняться не будет уже при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, значит, равномерной сходимости нет.

Замечание.

Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f_n поточечно сходится к f на E.

Теорема 3.21.

$f, f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \sup\limits_{x\in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| \to 0$ при $n \to \infty$

Доказательство.

“$\implies$”

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Заметим, что это:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \varepsilon$

$\implies \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| = 0$

"$\Longleftarrow$"

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

Но $\sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| \geqslant |\, f_n(x) - f(x)\,| \ \ \forall x \in E$ ☐

Следствие.

1. $|\, f_n(x) - f(x)\,| \leqslant a_n \ \ \forall x \in E$ и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

   Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на E.

2. Если $\exists x_n \in E$, т.ч. $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, то $f_n \not\rightrightarrows f$

Доказательство.

1. $\sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| \leqslant a_n \to 0$ при $n \to \infty$

2. $\sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) - f(x)\,| \geqslant |\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \not\to 0$ при $n \to \infty$

☐

Пример.

$f_n(x) = x^n$

$f_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \neq 0$

***Определение* 3.10.**

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – равномерно ограничена, если

$\exists M \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ |\, f_n(x)\,| \leqslant M$

Теорема 3.22.

f_n равномерно ограничена, $g_n \rightrightarrows 0$ на E $(f_n, g_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}))$

Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство.

$\sup\limits_{x \in E} |\, g_n(x)\,| \to 0$

$|\, f_n(x) g_n(x)\,| \leqslant M\,|\, g_n(x)\,|$

$\sup\limits_{x \in E} |\, f_n(x) g_n(x)\,| \leqslant M \cdot \sup\limits_{x \in E} |\, g_n(x)\,| \to 0$ ☐

Теорема 3.23 (критерий Коши)**.**

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

f_n равномерно сходится на E к некоторой функции $\iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, f_n(x) - f_m(x)\,| < \varepsilon$

Доказательство.

"$\implies$"

Пусть $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \forall x \in E\ \ |\,f_n(x) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m > N\ \ \forall x \in E\ \ |\,f_m(x) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies |\,f_n(x) - f_m(x)\,| \leqslant |\,f_n(x) - f(x)\,| + |\,f_m(x) - f(x)\,| < \varepsilon$

"$\impliedby$"

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m, n > N\ \ \forall x \in E\ \ |\,f_n(x) - f_m(x)\,| < \varepsilon$

Зафиксируем $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

$f_n(x)$ – фундаментальная последовательность, тогда у нее есть предел.

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m, n > N\ \ \forall x \in E\ \ |\,f_n(x) - f_m(x)\,| < \varepsilon$

$\implies |\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \varepsilon$ (т.к. $f_m(x) \to f(x)$)

$\implies f_n \rightrightarrows f$ на E. $\square$

***Определение* 3.11.**

$E \quad l^\infty(E) = \{f : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})\ \ \sup\limits_{x\in E}|\,f(x)\,| < +\infty\}$

т.е. это ограниченные функции

$\|f\|_{l^\infty(E)} := \sup\limits_{x\in E}|\,f(x)\,|$

Покажем неравенство треугольника:

$\|f+g\|_{l^\infty(E)} = \sup\limits_{x\in E}|\,f(x)+g(x)\,| \leqslant \sup\limits_{x\in E}(|\,f(x)\,| + |\,g(x)\,|) \leqslant \sup\limits_{x\in E}|\,f(x)\,| + \sup\limits_{x\in E}|\,g(x)\,| = \|f\|_{l^\infty(E)} + \|g\|_{l^\infty(E)}$

$f_n \rightrightarrows f \iff \sup\limits_{x\in E}|\,f_n(x) - f(x)\,| \to 0$

Заметим, что это равносильно сходимости f_n к f в нормированном пространстве(по нашей же норме).

Теорема 3.24.

$l^\infty(E)$ – полное.

Доказательство.

Пусть f_n фундаментальная последовательность.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m, n > N\ \ \|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} < \varepsilon$

Но $\|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} = \sup\limits_{x\in E}|\,f_n(x) - f_m(x)\,| > |\,f_n(x) - f_m(x)\,|\ \ \forall x \in E$

$\implies$ по критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$, где f – некоторая функция : $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Осталось понять, что $f \in l^\infty(E)$, т.е. что f – ограниченная функция.

$\varepsilon = 1\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \forall x \in E\ \ |\,f_n(x) - f(x)\,| < 1$

Зафиксируем n.

$|\,f(x)\,| \leqslant |\,f_n(x)\,| + |\,f(x) - f_n(x)\,| \leqslant |\,f_n(x)\,| + 1 \leqslant \|f_n\| + 1$ $\square$

Теорема 3.25.

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a не предельная точка в E, то все функции там непрерывны.

Пусть a – предельная точка множества E.

Тогда надо проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$

По определению равномерной сходимости $\exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in E \;\; |\, f_n(x) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a.

$\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; |\, x - a\,| < \delta \;\; |\, f_n(x) - f_n(a)\,| < \frac{\varepsilon}{3}$

Если $|\, x - a\,| < \delta$ и $x \in E$, то

$|\, f(x) - f(a)\,| \leqslant |\, f(x) - f_n(x)\,| + |\, f_n(x) - f_n(a)\,| + |\, f_n(a) - f(a)\,| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ □

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f \in C(E)$.

***Определение* 3.12.**

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \text{непрерывные}\}$

$\|f\|_{C(K)} := \max\limits_{x\in K} |\, f(x)\,|$.

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 3.26.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X \;\; Y$ – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$

$\implies x$ – предельная точка множества Y.

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\implies x_n$ сходится к x в пространстве Y. □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $\|f_n - f\| \to 0$, где $f_n \in C(k)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

***Определение* 3.13.**

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ – частичная сумма.

Если S_n поточечно сходится к S,то ряд поточечно сходится, если $S_n \rightrightarrows S$, то ряд равномерно сходится.

***Определение* 3.14.**

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда.

Теорема 3.27.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff r_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на $E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$ □

Теорема 3.28 (Критерий Коши)**.**

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на E

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, S_m - S_n \,| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ |\, S_{n+p} - S_n \,| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = |\, S_{n+p} - S_n \,|$$ □

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall x \in E \ \ |\, u_{n+1}(x) \,| < \varepsilon$

Это определение равномерной сходимости $u_n \rightrightarrows 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\to 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

Теорема 3.29 (признак сравнения)**.**

$u_n,\ v_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

$|\, u_n(x) \,| \leqslant v_n(x) \ \ \forall x \in E$ и $\sum v_n(x)$ равномерно сходится на E.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство.

$\sum v_n(x)$ равномерно сходится на $E \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |\, u_k(x) \,| \geqslant \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right|$$

$\implies$ выполнен критерий Коши для $\sum u_n(x)$

$\implies$ $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E □

Следствие (Признак Вейерштрасса).

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $|\, u_n(x) \,| \leqslant c_n \ \ \forall x \in E$

и $\sum c_n$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство.

$v_n(x) := c_n \implies \sum v_n(x)$ равномерно сходится □

Следствие.

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $\sum |\, u_n(x) \,|$ – равномерно сходится на E.

Тогда $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство.

$v_n(x) := |\, u_n(x) \,|$ □

Пример.

Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится.

$|\, \frac{\sin nx}{n^2} \,| \leqslant \frac{1}{n^2}$

Но знаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Тогда по признаку Вейерштрасса исходная сумма равномерно сходится.

Теорема 3.30 (Признак Дирихле)**.**

$a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) \right| \leqslant K \ \ \forall n \ \ \forall x \in E$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E.

3. При любом фиксированном $x \in E$ $b_n(x)$ монотонно по n.

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$

$A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$

Надо доказать, что эта сумма равномерно сходится.

Заметим, что A_n равномерно ограничена, а $b_n \to\to 0$, тогда по уже доказанному:

$\implies A_n(x)b_n(x) \rightrightarrows 0$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \overset{?}{\rightrightarrows}$

Т.е. надо доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится.

А для этого достаточно доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\,|$ равномерно сходится.

$\sum\limits_{k=1}^{n} |\, A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\,| \leqslant K \sum\limits_{k=1}^{n} |\, b_k(x) - b_{k+1}(x)\,| = K \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| = K\,|\, b_1(x) - b_{n+1}(x)\,|$

Получили, что $\sum\limits_{k=1}^{n} K\,|\, b_k(x) - b_{k+1}(x)\,|$ равномерно сходится к $K\,|\, b_1(x)\,|$

$\implies \sum\limits_{k=1}^{n} |\, A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\,|$ равномерно сходится. □

Следствие (Признак Лейбница).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$

$b_n : E \to \mathbb{R}$

1. $b_n(x)$ монотонная по n при любом фиксированном $x \in E$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство.

$a_n := (-1)^{n-1}$

Заметим, что тогда $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & n \text{ – нечетно} \\ 0 & n \text{ – четно} \end{cases}$

Т.е. A_n равномерно ограничены.

$\implies$ по признаку Дирихле равномерно сходится. □

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ $x \in (0,1)$

Равномерно сходится по признаку Лейбница $\frac{x^n}{n} \searrow$ $\left| \frac{x_n}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$

$\implies \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится по признаку Коши $\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} \to x < 1$

$\implies$ ряд абсолютно сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ не сходится равномерно.

По критерию Коши:

$\sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} > \frac{1}{2}$ при x близких к 1.

Теорема 3.31 (Признак Абеля)**.**

$a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно сходится
2. $|\, b_n(x)\,| \leqslant K \ \ \forall x \in E \ \ \forall n.$
3. При любом фиксированном $x \in E$ $b_n(x)$ монотонно по n.

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство.

Критерий Коши.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \quad \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$

Напишем для $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)$ преобразование Абеля.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x) =$$

$$= (A_{n+p}(x) - A_n(x)) b_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))$$

$$|\,(A_{n+p}(x) - A_n(x)) b_{n+p}(x)\,| \leqslant K\,|\,A_{n+p}(x) - A_n(x)\,| = K \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right|$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится $\implies \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \quad \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$

Выбираем N и $\forall n > N \implies$ первое слагаемое $< K\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} |\,A_{n+k}(x) - A_n(x)\,|\,|\,b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)\,| <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |\,b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)\,| = \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| = \varepsilon\,|\,b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)\,| \leqslant 2K\varepsilon$$

$\exists N \ \ \forall n > N \quad \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < K\varepsilon + 2K\varepsilon = 3K\varepsilon$

Проверили критерий Коши, получили равномерную сходимость. $\square$

3.6. §5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 3.32.

$f_n, f : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

a – предельная точка множества E.

$f_n \rightrightarrows f$ на E.

И $b_n := \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существуют и равны.

Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies$ по Критерию Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \;\; \forall x \in E \quad |\, f_n(x) - f_m(x)\,| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \quad |\, b_n - b_m\,| \leqslant \varepsilon$

– критерий Коши для последовательности $\{b_n\} \implies$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Функции g_n непрерывны в точке a.

$g_n \rightrightarrows g$ на $E \cap \{a\}$

$\implies g$ непрерывна в точке a

$\implies b = g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ □

Следствие.

$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b)

$\implies f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ нет равномерной сходимости на $(0, 1)$

От противного. Пусть есть равномерная сходимость на таком промежутке. Тогда есть и на $[0, 1]$.

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – сходится. Получили противоречие.

Теорема 3.33.

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\;a$ предельная точка E $\;b_n := \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

И $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \to B_n := b_1 + b_2 + ... + b_n$ при $x \to a$.

$S_n \rightrightarrows S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Тогда по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{x\to a} S(x)$

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ □

Следствие.

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

u_n непрерывная в точке a.

И $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится

$\implies \sum u_n(x)$ непрерывная в точке a.

Доказательство.

$\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ □

Теорема 3.34.

$f_n \in C[a, b] \quad \risingdotseq_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ $\ c \in [a, b]$

Тогда $\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt$ равномерно по $x \in [a, b]$

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$

Доказательство.

$\left| \int_c^x f_n(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_c^x (f_n(t) - f(t))\,dt \right| \leqslant \int_c^x |\, f_n(t) - f(t)\,|\,dt \leqslant \int_a^b |\, f_n(t) - f(t)\,|\,dt < \varepsilon(b - a)$

$f_n \rightrightarrows f \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall t \in [a, b] \ \ |\, f_n(t) - f(t)\,| < \varepsilon$ □

Следствие.

$u_n \in [a, b] \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\,dt$ равномерно сходится к $\int_c^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,dt$

В частности, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt = \int_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,dt$

Доказательство.

Теорема для $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ □

Пример.

$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$

$f_n(x) \to 0$ при всех $x \in [0, 1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \left.\frac{-e^{-nx^2}}{2}\right|_0^1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

Теорема 3.35.

$f_n \in C^1[a,b]$ f'_n равномерно сходятся к g.

$f_n(c) \to A$ $c \in [a,b]$

Тогда f_n равномерно сходится на $[a,b]$. Если f – предельная функция, то $f' = g$.

Т.е. в частности

$(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$

Доказательство.

$\int_c^x g(t)\,dt \leftleftarrows \int_c^x f'_n(t)\,dt = f_n(x) - f_n(c)$

$f'_n \rightrightarrows g$

$f_n(x) = (f_n(x) - f_n(c)) + f_n(c) \rightrightarrows \int_c^x g(t)\,dt + A = f(x)$

$\implies f' = g$ □

Следствие.

$u_n \in C'[a,b]$ $c \in [a,b]$ $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится.

$\sum u_n(x)$ сходится. Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится и

$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

Доказательство.

$f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ □

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2})' \stackrel{?}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ – расходится при $x = 2\pi k$

Т.е. равенства нет.

3.7. §6. Степенные ряды

***Определение* 3.15.**

Степенной ряд с центром в z_0:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$

$w := z - z_0$

Степенной ряд с центром в 0:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

Теорема 3.36.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0$.

Тогда он сходится при $\forall\,|\,z\,| < |\,z_0\,|$

Доказательство.

$\sum a_n z_0^n$ сходится $\implies a_n z_0^n \to 0$

$\implies a_n z_0^n$ – ограничена, т.е. $|\, a_n z_0^n \,| \leqslant M$

$\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n$ – абсолютно сходится.

$\left| a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n \right| \leqslant M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ – геометрическая прогрессия с основанием $< 1 \implies$ сходится. □

Следствие.

$\sum a_n z^n$ расходится при $z = z_0$, то он расходится и при $|\, z \,| > |\, z_0 \,|$

Доказательство.

От противного. □

Определение* 3.16*.

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ – такое $R \in [0, +\infty]$, что ряд сходится при $|\, z - z_0 \,| < R$ и расходится при $|\, z - z_0 \,| > R$

Круг сходимости – круг радиуса R с центром в точке z_0.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0, +\infty)$

Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

Доказательство.

$A := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \;\; B := \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \;\; C := \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n$

Надо доказать, что $AB = C$

"$\leqslant$"

B – верхний предел $\implies \exists n_1, n_2, ...,$ т.ч. $y_{n_k} \to B$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = AB$

AB – частичный предел $x_n y_n$

C – верхний предел = наибольший из частичных

$AB \leqslant C$

"$\geqslant$"

C – верхний предел.

$\implies \exists n_1, n_2, ... \;\; x_{n_k} y_{n_k} \to C$

$C = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} \implies \frac{C}{A} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k}}{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$

$\frac{C}{A}$ – частичный предел для y_n

B - -верхний предел = наибольший из частичных.

$\frac{C}{A} \leqslant B$ □

Замечание.

$\varlimsup x_n y_n \neq \varlimsup x_n \varlimsup y_n$

$x_n = \begin{cases} 0 & n - -\text{четно} \\ 1 & n - -\text{нечетно} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 1 & n - -\text{четно} \\ 0 & n - -\text{нечетно} \end{cases}$

$x_n y_n \equiv 0$

$\overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, y_n = 1$

Теорема 3.37 (Формула Коши-Адамара)**.**

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует и равен $\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}}$

Доказательство.

Применим признак Коши к ряду.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n z^n\,|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \,|\, z\,|\, \sqrt[n]{|\, a_n\,|} = |\, z\,| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}$

Ряд сходится, если $|\, z\,| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1 \iff |\, z\,| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}}$

Ряд расходится, если $|\, z\,| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1 \iff |\, z\,| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}}$

$\implies R = |\, z\,| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1 \iff |\, z\,| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}}$ – радиус сходимости. □

Замечание.

Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty$

   $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{1}{n/e} = \frac{e}{n} \to 0$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad R = 0$

Замечание.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n\,|}$ и они равны.

$\implies$ если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, то $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Теорема 3.38.

R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

и $0 < r < R$. Тогда в круге $|\, z\,| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ – сходится абсолютно.

Если $|\, z\,| \leqslant r$, то

$|\, a_n z^n\,| \leqslant |\, a_n\,| r^n$

$\implies$ по признаку Вейерштрасса будет равномерная сходимость. □

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости.

Доказательство.

$|\, z_0\,| < R$

И берем $r: \quad |\, z_0\,| < r < R$

Ряд равномерно сходится в круге $|\,z\,| < r$

$\implies$ его сумма непрерывна в круге $|\,z\,| < r$

$\implies$ непрерывна в точке z_0 (т.к. это внутренняя точка круга) $\square$

Теорема 3.39 (Абеля)**.**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и R – его радиус сходимости.

Если он сходится при $z = R$, то он равномерно сходится на $[0, R]$.

В частности, $\lim\limits_{x\to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n (\frac{x}{R})^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (равномерно, т.к. от x не зависит)

$(\frac{x}{R})^n$ монотонно убывает при любом фиксированном x.

$0 \leqslant (\frac{x}{R})^n \leqslant 1$

$\implies$ по признаку Абеля ряд сходится равномерно.

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на $[0, R]$. $\square$

Лемма.

Радиусы сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ одинаковы.

Доказательство.

$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|\, n a_n\,|} = \lim \sqrt[n]{n}\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|\, a_n\,|}$

$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\left|\, \frac{a_n}{a_{n+1}}\,\right|} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|\, a_n\,|}$ $\square$

Теорема 3.40.

R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Тогда $\int_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (t - x_0)^n \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$

$|\, x - x_0\,| < R$

Доказательство.

$r := |\, x - x_0\,| < R$.

В круге $|\, t - x_0\,| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Тогда можно менять местами $\int$ и $\sum$ $\square$

***Определение* 3.17.**

$f : E \to \mathbb{C} \;\; E \subset \mathbb{C}$

$a \in \operatorname{Int} E$

$f'(a) := \lim\limits_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$

***Определение* 3.18.**

$F : E \to \mathbb{C} \;\; E \subset \mathbb{C}$

$a \in \operatorname{Int} E$

f – комплексно дифференцируема в точке a.

Если $\exists k \in \mathbb{C}$

$f(z) = f(a) + k(z-a) + o(z-a)$ при $z \to a$

Замечание.

$k = f'(a)$

И существование производной равносильно дифференцируемости.

Теорема 3.41.

R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =: f(z)$

Тогда $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)...(n-m+1)(z-z_0)^{n-m}$

При $|\, z - z_0 \,| < R$

Доказательство.

Докажем для $m = 1$

$f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

Берем $r: \ \ |\, z - z_0 \,| < r < R$

Знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ сходится в круге $|\, z - z_0 \,| < R$.

$\implies$ он равномерно сходится в круге $|\, z - z_0 \,| < r$

$f'(z) = \lim\limits_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim\limits_{w \to z} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w-z} = \lim\limits_{w \to z} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w-z} = \lim\limits_{w \to z} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2} + ... + wz^{n-2} + z^{n-1}) \stackrel{?}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \lim\limits_{w \to z}(w^{n-1} + w^{n-2} + ... + wz^{n-2} + z^{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$

Осталось проверить равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2} + ... + wz^{n-2} + z^{n-1})$ при $|\, w \,| \leqslant r$

$|\, a_n(w^{n-1} + w^{n-2} + ... + wz^{n-2} + z^{n-1}) \,| \leqslant |\, a_n \,| n r^{n-1}$ такой ряд сходится. Пользуемся признаком Вейерштрасса.

Для $m = 1$ показали. А дальше по индукции.

При дифференцировании радиус сходимости не меняется

$f''(z) = (f'(z))' = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1})' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$

И так далее... □

Теорема 3.42 (о единственности разложения функции в степенной ряд)**.**

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ в круге $|\, z - z_0 \,| < R$

Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.

$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)...(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$

Подставим $z = z_0$

$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)...1a_m = m!a_m$ □

***Определение* 3.19.**

Ряд Тейлора

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Пример.

Бесконечно дифференцируемости не достаточно для того, чтобы функция разложилась в ряд Тейлора:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ e^{-1/x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Если она бесконечно дифференцируема в нуле, то все ее производные $f^{(n)}(0) = 0$

$\implies$ ряд Тейлора $\equiv 0$.

$(e^{-1/x^2})' = e^{-1/x^2}(-\frac{1}{x^2})' = e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3}$

$(...)' = e^{-1/x^2}(...)$ – в скобочках – какая-то рациональная функция.

Такого же вида и останется.

Т.е. все производные устроены одинаково

$(e^{-1/x^2})^{(n)} = e^{-1/x^2}\cdot$ рациональная функция $= e^{-1/x^2}P_n(x)$

$f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}P_n(x)-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$ рациональная функция$= 0$.

3.7.1. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Уже знаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$:

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

***Определение* 3.20.**

Определим все для комплексных чисел:

$x \in \mathbb{C}$:

1. $e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
2. $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
3. $\sin z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Утверждение 3.43 (Формула Эйлера)**.**
$e^{iz} = \cos z + i \sin z \ \ z \in \mathbb{C}$

Упражнение:
$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}$
$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
Продолжим про то, что знаем (или почти знаем)

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \ \ x \in (-1,1)$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ \ x \in (-1,1)$

Доказательство.

4. $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ при $|\,x\,| < 1$

   $ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

5. $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

   $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$\square$

6. $(1+x)^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n =: S(x)$ при $x \in (-1,1)$

Доказательство.
$R := \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{p(p-1)...(p-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\cdot p(p-1)...(p-n+1)(p-n)} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{(p-n)} \right| = 1$
Хотим доказать, что $S(x) = (1+x)^p$ при $x \in (-1,1)$
$f(x) := \frac{S(x)}{(1+x)^p}$ при $x \in (-1,1)$
$f(0) = 1$
Надо доказать, что $f'(x) \equiv 0 \ \ f'(x) = S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1}(S'(x)(1+x) - pS(x))$
$S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} \cdot x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n)}{n!} \cdot x^n$
$(1+x)S'(x) = S'(x) + xS'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n)}{n!} x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{(n-1)!} x^n \stackrel{?}{=} pS(x)$
Смотрим на коэффициент при x^n
Слева – $\frac{p(p-1)...(p-n)}{n!} + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{(n-1)!}$
Справа – $p \cdot \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}$
$p(p-1)...(p-n) + p(p-1)...(p-n+1) \cdot n = p \cdot p(p-1)...(p-n+1)$
$(p-n) + n = p$ – действительно. $\square$

6'. Частный случай $p = -\frac{1}{2}$

$p(p-1)...(p-n+1) = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} - 1)(-\frac{1}{2} - 2)...(-\frac{1}{2} - n + 1) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n} = (-1)^n (2n-1)!! \cdot \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$

1. $\arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Доказательство.

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^2 n$

$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot t^{2n}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ □

4. 8. Функции многих переменных

4.1. §1. Дифференцируемость отображений

***Определение* 4.1.**

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;\; a \in \operatorname{Int} E$

f – дифференцируема в точке a, если существует такое линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что

$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$ при $h \to 0$

Запись $g(h) = o(\|h\|)$ означает, что

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0$

T – дифференциал $d_a f$

Замечание.

T определено однозначно.

Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$

$f(a + th) = f(a) + T(th) + o(\|th\|) = f(a) + t \cdot T(h) + o(|\,t\,| \cdot \|h\|)$

$f(a + th) = f(a) + t \cdot Th + o(t)$

$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Th + o(1)$

$\implies Th = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$

***Определение* 4.2.**

Матрица отображения T размера $n \times m$ – матрица Якоби. Обозначать ее будем $f'(a)$

Замечание.

Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \; h \overset{\to}{\to} 0 \; f(a)$

Важный частный случай $m = 1$.

$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$

$f(a + h) = f(a) + \langle v, h\rangle + o(\|h\|)$

v – градиент функции f в точке a.

$\operatorname{grad} f$ или ∇f

Пример Дифференцируемых функций.

1. $f(x) \equiv const$

   $f(a + h) = f(a) + 0 \cdot h + 0$

2. f – линейно отображение

   $f(a + h) = f(a) + f(h) + o$

   $d_a f = f$

   $f'(a)$ – матрица линейного отображения f.

Замечание.

$f : E \to \mathbb{R}^m \;\; E \subset \mathbb{R}^n$

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad f_k : E \to \mathbb{R}$ – координатные функции.

Теорема 4.1.

f – дифференцируема в точке $a \iff f_k$ – дифференцируема в точке $a \; \forall k = 1...m$

Доказательство.

"$\implies$"

$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$

$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1h \\ T_2h \\ \vdots \\ T_mh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix} = o(\|h\|) \iff \frac{\sqrt{g_1(h)^2 + ... + g_m(h)^2}}{\|h\|} \to 0$

$\iff \begin{pmatrix} \frac{g_1(h)}{\|h\|} \\ \frac{g_2(h)}{\|h\|} \\ \vdots \\ \frac{g_m(h)}{\|h\|} \end{pmatrix} \to 0 \iff \frac{g_k(h)}{\|h\|} \to 0 \;\; \forall k = 1...m$

$f_k(a+h) = f_k(a) + T_kh + g_k(h)$

$\implies k$-ая координата дифференцируема в точке a.

"$\impliedby$"

Все рассуждения, которые мы провели, обращаются назад. $\square$

Следствие.

Строки матрицы Якоби – градиенты координатных функций.

$f'(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix}$

***Определение* 4.3.**

Производная по направлению.

$\|h\| = 1$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ – производная функции f в точке a по направлению h.

$\frac{\partial f}{\partial h}(a)$

Замечание.

$g(t) = f(a+th) \;\; \frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$

Теорема 4.2.

$f : E \to \mathbb{R}\ \ E \subset \mathbb{R}^n\ \ a \in \operatorname{Int} E$

f – дифференцируема в точке a, $\|h\| = 1\ \ h \in \mathbb{R}^n$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = (d_a f)(h) = \langle \operatorname{grad} f, h \rangle$

Доказательство.

$f(a + th) = f(a) + t \cdot d_a f(h) + o(t)\ \ t \to 0$

$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = d_a f(h) + o(1)$

Переходим к $\lim\limits_{t\to 0}$

$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = a_a f(h)$ □

Следствие 1. Экстремальное свойство градиента.

$f : E \to \mathbb{R}\ \ E \subset \mathbb{R}^n\ \ a \in \operatorname{Int} E\ \ f$ – дифференцируема в точке a.

Тогда $\forall h \in \mathbb{R}^n\ \ \|h\| = 1$

$-\|\operatorname{grad}_a f\| \leqslant \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leqslant \|\operatorname{grad}_a f\|$

Причем равенство $\iff h = \pm\frac{\operatorname{grad}_a f}{\|\operatorname{grad}_a f\|}$

Доказательство.

$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \operatorname{grad}_a f, h \rangle$

$|\langle \operatorname{grad}_a f, h \rangle| \leqslant \|\operatorname{grad}_a f\| \cdot \|h\| = \|\operatorname{grad}_a f\|$ – неравенство Коши-Буняковского

Но равенство достигается $\iff h$ и $\operatorname{grad}_a f$ пропорциональны. □

***Определение* 4.4.**

$e_k = \big(0,\ \ \dots,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ \dots,\ \ 0\big)$

Частная производная по k-й координате

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k} := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$

$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_k)$

$f(x + te_k) = f(x_1, .., x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, ..., x_n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_1,...,x_{k-1},x_k+t,x_{k+1},...,x_n)-f(x_1,...x_n)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{g(x_k+t)-g(x_k)}{t} = g'(x_k)$

Следствие 2..

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \operatorname{grad}_a f, e_k \rangle$ – k-ая координата градиента

$\operatorname{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\ \ \dots,\ \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

Следствие 3..

$f : E \to \mathbb{R}^m\ \ E \subset \mathbb{R}^n\ \ a \in \operatorname{Int} a\ \ f$ дифференцируема в точке a.

То

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Пример.

$f(x, y) = x^y,\ \ x, y \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

Теорема 4.3 (линейность дифференцирования).

$f, g : E \to \mathbb{R}^m \;\; E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E$

f, g – дифференцируемы в точке a, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$f \pm g$, λf – дифференцируемы в точке a

$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|) \;\; \|h\| \to 0$

$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(\|h\|) \;\; \|h\| \to 0$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(\|h\|)$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(\|h\|)$

□

Теорема 4.4 (дифференцирование композиции).

$f : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^n, \;\; g : E \to \mathbb{R}^l \;\; E \subset \mathbb{R}^m$

$a \in \operatorname{Int} D \;\; f(a) \in \operatorname{Int} E \;\; f(D) \subset E$

Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и

$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$

Замечание.

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\| \;\; \|h\| \to 0$

$b := f(a) \;\; g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| \;\; \|k\| \to 0$

$k := d_a f(h) + o(\|h\|) \;\; \|k\| \leqslant \|d_a f(h)\| + \|\alpha(h)\|h\|\| \leqslant \|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\|\|h\| \to 0$ при $h \to 0$

$g(f(a+h)) = g(f(a)+k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| = g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) = g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|(k)\|$

Хотим показать, что $d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|(k)\| = o(\|h\|)$

$d_b g(\alpha(h)\|h\|) = \|h\| \cdot d_b g(\alpha(h))$

$\|d_b g(\alpha(h)\|h\|)\| = \|h\| \cdot \|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\|$, а $\|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\| \to 0$

$\|\beta(k)\|k\|\| = \|k\| \cdot \|\beta(k)\| \leqslant \|\beta(k)\|(\|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\|) = \|h\| \cdot \|\beta(k)\|(\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|)$.

А $\|\beta(k)\|(\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|) \to 0$.

Все получили. □

Теорема 4.5 (о дифференцировании произведения скаляра и векторной функции).

$E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E \;\; f : E \to \mathbb{R}^m$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

f и λ – дифференцируемы в точке a, тогда λf – дифференцируема в точке a.

$d_a(\lambda f) = d_a \lambda f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f$

Доказательство.

$\lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a+h)(f(a+h) - f(a)) + (\lambda(a+h) - \lambda(a))f(a) =$

$f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + o(\|h\|)$

$\lambda(a+h) - \lambda(a) = d_a \lambda(h) + o(\|h\|)$

$= \lambda(a+h)(d_af(h)+o(\|h\|))+(d_a\lambda(h)+o(\|h\|))f(a) = (\lambda(a)+d_a\lambda(h)+o(\|h\|))(d_af(h)+o(\|h\|))+(d_a\lambda(h)+o(\|h\|))f(a) =$
$= \lambda(a)d_af(h)+d_a\lambda(h)f(a)+\lambda(a)o(\|h\|)+d_a\lambda(h)\cdot o(\|h\|)+o(\|h\|)\cdot o(\|h\|)+d_a\lambda(h)d_af(h)+o(\|h\|)d_af(h)+o(\|h\|)f(a)$

Про последние много слагаемых хотим сказать, что они $o(\|h\|)$.

Самое не очевидное –

$\|d_a\lambda(h)\cdot d_af(h)\| = |\, d_a\lambda(h)\,|\, \|d_af(h)\| \leqslant \|d_a\lambda\|\cdot\|h\|\cdot\|d_af\|\cdot\|h\| = const\cdot h^2 = o(h)$ □

Теорема 4.6 (о дифференцировании скалярного произведения)**.**

$E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in |intE \;\; f,g : E \to \mathbb{R}^m$

f, g – дифференцируемы в точке a.

Тогда $\langle f, g\rangle$ – дифференцируема в точке a и:

$d_a\langle f,g\rangle(h) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$

Доказательство.

$F := \langle f,g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} f_kg_k$

$d_a(f_kg_k) = d_af_k\cdot g_k(a) + f_k(a)d_ag_k$ – частный случай предыдущей теоремы.

$dF = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a(f_kg_k) = \sum\limits_{k=1}^{m}(d_af_kg_k(a) + f_k(a)d_ag_k)$

$dF(h) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_af(h)g_k(a) + \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(a)d_kg_k(h) = \langle d_af(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_ag(h)\rangle$ □

Замечание.

Частный случай, когда $n = 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$

$(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle$

Теорема 4.7 (Лагранжа для векторнозначных функций)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^m \;\; f$ – непрерывна на всем отрезке, дифференцируема на (a,b)

Тогда $\exists c \in (a,b)$, т.ч. $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\|(b-a)$

Доказательство.

$\varphi(t) = \langle f(t), f(b)-f(a)\rangle \;\; : [a,b] \to \mathbb{R}$

Напишем одномерную теорему Лагранжа для φ

$\exists c \in (a,b) \quad : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a)$

$\varphi(b)-\varphi(a) = \langle f(b), f(b)-f(a)\rangle - \langle f(a), f(b)-f(a)\rangle = \langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$

$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(b)-f(a)\rangle \leqslant (b-a)\|f'(c)\|\cdot\|f(b)-f(a)\|$

Теперь можем сократить на $\|f(b)-f(a)\|$ и получить нужное неравенство (если $\|f(b)-f(a)\| = 0$, то теорема очевидна)

$\|f(b)-f(a)\|^2 = (b-a) < f'(c), f(b)-f(a) >$ □

Замечание.

Равенства может не быть ни в какой точке c.

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\|f(2\pi) - f(0)\| = 0 < 2\pi = (2\pi - 0)\|f'(t)\|$$

4.2. §2. Непрерывная дифференцируемость

Теорема 4.8.

$f : E \to \mathbb{R} \;\; E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E$

И у функции f в точке a существуют все частные производные и они непрерывны.

Тогда функция f дифференцируема в точке a.

Доказательство.

$R(h) = f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k \stackrel{?}{=} o(\|h\|)$

$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$b_0 = a$

$b_1 = (a_1 + h, a_2, ..., a_n)$

$b_2 = (a_1 + h, a_2 + h, ..., a_n)$

...

$b_n = (a_1 + h, a_2 + h, ..., a_n + h)$

$F_k(t) = f(a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1} + th_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n)$

$f(a+h) - f(a) = F_0(1) - F_0(0) + F_1(1) - F_1(0) + ... + F_{n-1}(1) - F_{n-1}(0) = F_{n-1}(1) - F_0(0)$

$F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\theta_k) \;\; \theta_k \in (0, 1)$

$F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\theta_k) = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_k) \cdot h_k$, где e_k – вектор с единичкой на месте k.

$f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_{k+1})h_{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k\theta_{k-1}e_k)h_k$

$R(h) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k\theta_{k-1}e_k)h_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1}h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a))h_k$

$\|R(h)\| \leqslant \|h\| \cdot (\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1}h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a))^2)^{\frac{1}{2}}$

Второй множитель стремится к 0 при $h \to 0$. □

Замечание.

Обратное неверно. Дифференцируемость не дает непрерывности частных производных и даже существование в окрестности.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{если ровно одно из чисел рационально} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

f – дифференцируема в нуле.

$f(x, y) = f(0, 0) + o + 0(\sqrt{x^2 + y^2})$

Но f даже не будет непрерывна в точках, отличных от $(0, 0)$.

***Определение* 4.5.**

$f : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} D$

f – непрерывно дифференцируема в точке a, если

f дифференцируема в окрестности точки a и $d_x f$ непрерывна в точке a.

(т.е. $\|d_x f - d_a f\| \to 0$ при $x \to a$)

Теорема 4.9.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = d_x f_j(e_k)$

$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right| = |\, d_x f_j(e_k) - d_a f_j(e_k) \,| = |\, (d_x f_j - d_a f_j)(e_k) \,| \leqslant \|d_x f_j - d_a f_j\| \leqslant \|d_x f - d_a f\| \to 0$

"$\Longleftarrow$"

$\|d_x f - d_a f\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a))^2 \to 0$ □

4.3. §3. Частные производные высших порядков.

***Определение* 4.6.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \;\; D$ – открытое множество.

$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$

Пример.

$f(x, y) = x^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y x^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y x^{y-1} \ln x + x^{y-1}$

Пример.

$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4-y^4)-4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$

Но в силу антисимметричности x и y.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$

Теорема 4.10.

$f : E \to \mathbb{R} \;\; E \subset \mathbb{R}^2 \;\; (x_0, y_) \in \operatorname{Int} E$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в точке (x_0, y_0)

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство.

$\Delta := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

$\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$

$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$

Применяем теорему Лагранжа для одномерного случая:

$\Delta = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \;\; \theta_1 \in (0, 1)$

$\Delta = h(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h, y_0)) = h(\tilde{\varphi}(y_0+k) - \tilde{\varphi}(y_0)) = hk\tilde{\varphi}'(y_0+\theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$

$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

Получили, что

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

□

***Определение* 4.7.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; R \subset \mathbb{R}^n \;\; D$ – открыто

$f - r$ раз непрерывно дифференцируем $=$ r-гладкая,

если все частичные производные до r-ого порядка существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(D)$

Теорема 4.11.

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \;\; D$ – открыто $f \in C^r(D)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ – перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной. А значит, можем всегда переставить все в неубывающем порядке индексов. □

***Определение* 4.8.**

Мультииндекс

$k = (k_1, k_2, ..., k_n) \quad k_j \in \mathbb{N}_0$

Высота мультииндекса $|\,k\,| = k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$

$k! := k_1!k_2!...k_n!$

$h \in \mathbb{R}^n \;\; h^k = h_1^{k_1} h_2^{k_2} ... h_n^{k_n}$

$f^{(k)} := \frac{\partial^{|\,k\,|} f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|\,k\,|}{k_1, k_2, ..., k_n} := \frac{|\,k\,|!}{k!} = \frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1! k_2! ... k_n!}$ – количество способов покрасить $|\,k\,|$ шаров в n цветов так, чтобы первого цвета было k_1, k_2 – второго и т.д.

Лемма.

$f : d \to \mathbb{R} \;\; f \in C^r(D) \;\; D \subset \mathbb{R}^n$

$[x, x+h]$ – отрезок с концами x и $x+h$. (на многомерном пространстве)

$[x, x+h] \subset D$

$F(t) = f(x+th) \;\; F : [0,1] \to \mathbb{R}$

Тогда $F \in C^r[0,1]$ и при $0 \leqslant l \leqslant r$

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|\,k\,|=l} \binom{l}{k_1, k_2, ..., k_n} f^{(k)}(x+th) h^k$

Доказательство.

$G(t) := g(x+th)$

$$G'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x+th), ..., \frac{\partial g}{\partial x_n}(x+th)\right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x+th) h_j$$ – получили формулу для $l = 1$.

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{i_l=1}^{n} \sum\limits_{i_{l-1}=1}^{n} ... \sum\limits_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \partial x_{i_{l-1}} ... \partial x_{i_1}}(x+th) h_{i_1} h_{i_2} ... h_{i_n} = \sum\limits_{|\,k\,|=l} \binom{|\,k\,|}{k_1, k_2, ..., k_n} f^{(k)}(x+th) h^k = \sum\limits_{|\,k\,|=l} \frac{|\,k\,|!}{k!} f^{(k)}(x+th) h^k$

$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, ...)$ $\square$

Теорема 4.12 (многомерная формула Тейлора)**.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \;\; D$ – открыто.

$[a, x] \subset D \quad f \in C^{r+1}(D)$

Тогда

$f(x) = \sum\limits_{|\,k\,| \leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|\,k\,|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

Где $\theta \in (0,1)$.

Доказательство.

$h := x - a$

$F(t) := f(a+th) \in C^{r+1}[0,1]$

По одномерной формуле Тейлора:

$F(1) = \sum\limits_{l=0}^{r} \frac{F^{(l)}(0)}{l!} + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} =$

$= \sum\limits_{l=0}^{r} \frac{1}{l!} \sum\limits_{|\,k\,|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum\limits_{|\,k\,|=r+1} \frac{(r+1)!}{k!} f^{(k)}(a+\theta h) h^k$

– получили ровно то, что хотели на самом деле.

$\square$

Замечание.

1. Многочлен Тейлора степени r:

$\sum\limits_{|\,k\,|\leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

2. Формула Лагранжа $r=0$

$f(x) = f(a) + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\theta(x-a))(x_j-a_j) = f(a) + \left\langle \operatorname{grad}_{a+\theta(x-a)} f, x-a \right\rangle$

3. Формула Тейлора при $n=2$.

$k=(k_1,k_2) \quad \binom{k}{k_1,k_2} = \binom{k_1+k_2}{k_1}$

$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(x-b)^2 + ... + \sum\limits_{k=0}^{l} \frac{1}{l!}\cdot\binom{l}{k}\frac{\partial^l f(a,b)}{\partial x^k \partial y^{l-k}}(x-a)^k(y-b)^{l-k} + ...$

Следствие.

$f: D\to\mathbb{R} \;\; D\subset\mathbb{R}^n \;\; D$ – открыто $f\in C^r(D)$

$a\in D$. Тогда:

$f(x) = \sum\limits_{|\,k\,|\leqslant r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(\|x-a\|^r)$ при $x\to a$.

Доказательство.

$f(x) = \sum\limits_{|\,k\,|\leqslant r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|\,k\,|=r}\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^k =$

$= \sum\limits_{|\,k\,|\leqslant r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|\,k\,|=r}\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))-f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Осталось понять, что $\sum\limits_{|\,k\,|=r}\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))-f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = o(\|x-a\|^r)$

Покажем для этого про каждое слагаемое:

$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))-f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = o(\|x-a\|^r)$

$\left|\,(x-a)^k\,\right| = \left|\,(x_1-a_1)^{k_1}...(x_n-a_n)^{k_n}\,\right| \leqslant \|x-a\|^{k_1}...\|x-a\|^{k_n} = \|x-a\|^r$

$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))-f^{(k)}(a)}{k!} \to 0$

$\Longrightarrow$ получили то, что надо. □

Следствие Полиномиальная формула.

$(x_1+x_2+...+x_n)^r = \sum\limits_{|\,k\,|=r}\binom{r}{k_1,k_2,...,k_n}x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$

$f(x_1,..,x_n) = (x_1+x_2+...+x_n)^r = (g(x))^r$

$g(x_1,...,x_n) = x_1+...+x_n$

$\frac{\partial f}{\partial x_j} = rg^{r-1}(x)\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = rg^{r-1}(x)$

$\frac{\partial^l f}{\partial x...} = r(r-1)...(r-l+1)g^{r-l}(x)$ – если подставить это в формулу Тейлора, то получаем ровно нужную формулу.