

Математический анализ

Никифоровская Анна

14 сентября 2017 г.

Содержание

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.	1
1.1 §3. Свойства определенного интеграла	1
1.2 §4. Интегральные суммы	4
1.3 §5. Несобственные интегралы	10
1.3.1 Несобственные интегралы от неотрицательных функций.	15
1.3.2 Несобственные интегралы от знакопеременных функций.	17
2. 6. Метрические и нормированные пространства	21
2.1 §1. Открытые и замкнутые множества	21
2.2 §2. Компактность	32
2.3 §3. Непрерывные функции	38
2.4 §4. Линейные операторы	43
2.5 §5. Длина кривой	47
3. 7. Ряды	54
3.1 §0. Расширенное напоминание	54
3.2 §1. Знакопостоянные ряды	55
3.3 §2. Знакопеременные ряды	60
3.4 §3. Бесконечные произведения	67
3.5 §4. Функциональные последовательности и ряды.	69
3.6 §5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов	77
3.7 §6. Степенные ряды	79
3.7.1 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора	84
4. 8. Функции многих переменных	87
4.1 §1. Дифференцируемость отображений	87
4.2 §2. Непрерывная дифференцируемость	92
4.3 §3. Частные производные высших порядков.	93

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.

1.1. §3. Свойства определенного интеграла

Теорема 1.1 (линейность определенного интеграла).

$f, g \in C[a, b]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство.

F – первообразная f .

G – первообразная g .

$\implies \alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g$.

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= (\alpha F + \beta G) \Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \\ &= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 1.2 (ф-ла интегрирования по частям).

$u, v \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

Доказательство.

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

F – первообразная $u'v \implies (uv - F)$ – первообразная uv' . (Проверка дифференцированием: $(uv - F)' = u'v + uv' - u'v = uv'$)

$$\int_a^b uv' = (uv - F) \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - F \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v \quad \square$$

Теорема 1.3 (ф-ла замены переменной).

$f \in C \langle a, b \rangle$ $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx$$

Соглашение. С этого места и далее $a > b$ $\int_a^b f := - \int_b^a f$

Доказательство.

F – первообразная для $f \implies F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx \quad \square$$

Пример.

$$\int_2^3 \frac{t dt}{1+t^4} = \left[\begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t) dt}{1+\varphi^2(t)} = \int_4^9 \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$$

Пример.

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t (\sin t)' dt = \cos^{n-1} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t dt =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t dt = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \right)$$

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Следствие (Формула Валлиса).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство.

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos^{2n+2} t \leq \cos^{2n+1} t \leq \cos^{2n} t$$

Проинтегрируем. Получим $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2}$$

И левая, и правая часть стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда по непрерывности $\sqrt{\cdot}$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \square$$

Следствие.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство.

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \square$$

Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).

$f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle$ и $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

Доказательство.

Индукция по n .

База $n = 0$.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt - \text{формула Ньютона-Лейбница для } f'.$$

Индукционный переход. $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right)' dt = -\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) ((x-t)^{n+1})' dt = \\ & = -\frac{1}{(n+1)!} \left((f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \right) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

На самом деле уже получили то, что надо.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned} \quad \square$$

Лемма (в помощь Ламберту).

$$H_j = \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

$$1. H_j > 0 \quad H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^j \cos x dx = \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}$$

$$2. \text{ При любом } c > 0 \quad c^j H_j \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty$$

Доказательство.

$$0 < c^j H_j \leq \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi^2 c}{4} \right)^j \rightarrow 0.$$

(Некогда уже доказывали, что $\frac{c^j}{j!} \rightarrow 0$) □

$$3. H_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right) \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x)' dx = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)' dx = -2 \left(x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = 2 \end{aligned}$$

$$4. H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} j! H_j &= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2j \int_0^{\pi/2} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx = \\ &= -2j \int_0^{\pi/2} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (\cos x)' dx = -2j \left(x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx + \right. \\ &+ \left. 2(j-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = 2j(2j-1) \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \\ &- 2j \cdot 2(j-1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - j(j-1)\pi^2(j-2)! H_{j-2} \end{aligned}$$

$$\implies H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

В доказательстве в определенный момент воспользовались идеей $x^2 = -((\frac{\pi}{2})^2 - x^2) + (\frac{\pi}{2})^2$ \square

5. Существует такой многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$

Доказательство.

Будем доказывать по индукции.

База. $j = 0, j = 1$

$H_0 = 1, H_1 = 2$ – многочлены степени 0 с целыми коэффициентами.

Индукционный переход.

$j - 1, j - 2 \rightarrow j$

$$H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2} = (4j - 2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2)$$

Скажем тогда, что $P_j(x) = (4j - 2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x)$ \square

Теорема 1.5 (Теорема Ламберта).

π и π^2 – иррациональны.

Доказательство.

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда

$$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое}}{n^j}$$

$\implies n^j H_j$ – целое и положительное число.

$\implies 1 \leq n^j H_j \rightarrow 0$. (стремится к нулю по одному из пунктов предыдущей леммы)

Противоречие. Значит, π^2 число иррациональное.

Тогда и число π иррациональное. \square

1.2. §4. Интегральные суммы

Определение 1.1.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Замечание.

Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

Определение 1.2.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева (с константой M), если $\forall x, y \in E \implies |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание.

Липшицевость \implies равномерная непрерывность.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

Пример.

$\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – равномерно непрерывны.

Пример.

$f(x) = x^2$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не равномерно непрерывна.

Доказательство.

$\varepsilon := 1$ Возьмем x, y $|x - y| < \delta$, например, x и $y = x + \frac{\delta}{2}$

$$1 > |f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \delta/2)^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при $x > \frac{1}{\delta}$ □

Теорема 1.6 (Теорема Кантора).

$f \in C[a, b] \implies f$ – равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Возьмем это ε и зафиксируем.

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, y_n \in [a, b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$$

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow c$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c.$$

Эта функция непрерывна в точке c .

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(c)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}) = f(c)$$

$$0 \leftarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$$

Получили противоречие – константа стремиться к нулю не может. □

Определение 1.3.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \delta\}$$

– модуль непрерывности функции f .

Свойства.

1. $w_f(0) = 0$
2. w_f монотонно возрастает.
3. $w_f \geq 0$
4. Если f – липшицева функция с константой M , то $w_f(\delta) \leq M\delta$

Доказательство.

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M\delta, \text{ если } |x - y| \leq \delta \quad \square$$

$$5. |f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|)$$

$$6. f \text{ – равномерно непрерывна} \iff w_f \text{ – непрерывна в нуле. } \left(\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0 \right)$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$\text{Тогда } w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\} \leq \varepsilon$$

$$w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon$$

Т.е. сейчас получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < \alpha < \frac{\delta}{2} \quad w_f(\alpha) \leq \varepsilon$$

– это определение предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} w_f(\alpha) = 0$.

“ \impliedby ”

Пусть $w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad w_f(\delta) < \varepsilon$$

Если $|x - y| \leq \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq w_f(\delta) < \varepsilon$ □

7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$.

Доказательство.

$f \in C[a, b] \iff f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \iff$ (по свойству 6) $w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$. □

Определение 1.4.

Дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$ – это такой набор точек, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Мелкость(ранг) дробления – это $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$

$|\tau|$ – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и оснащенное дробление (τ, ξ)

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Теорема 1.7 (об интегральных суммах).

$$f \in C[a, b]$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)w_f(|\tau|)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right) \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |t - \xi_k| &\leq |x_k - x_{k-1}| \leq |\tau| \\
 \implies |f(t) - f(\xi_k)| &\leq w_f(|\tau|) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\tau|) dt = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) w_f(|\tau|) = (b-a) w_f(|\tau|)
 \end{aligned}$$

□

Следствие.

1. $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ дробления } \tau \text{ мелкости } < \delta \text{ и любого его оснащения } \xi \\
 \implies &\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений τ_n , для которой $|\tau_n| \rightarrow 0$ и любой последовательности их оснащений ξ_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p &=: S_p(n) \\
 \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p &< S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

Введем интегральную сумму...

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$$

Мелкость этих дроблений $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Определение 1.5.

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления τ и мелкости $< \delta$ и любого его оснащения $\xi \implies |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$

I – это её интеграл Римана.

Теорема 1.8 (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

Лемма.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$

Доказательство. (леммы.)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})' dt = f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \\ &= f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство. (теоремы.)

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\ |\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1.9 (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай).

$$f \in C^2[m, n] \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Доказательство.

$$n = m + 1$$

$$f(m) + f(m + 1) = \frac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$f(m) = \frac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Суммируем от m до $n - 1$.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(m) = \dots$

Надо доказать ф-лу:

$$\frac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t)(t - m)(m + 1 - t) dt$$

А это в точности лемма, которая уже была. □

Пример.

$$1. S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$$

$$f(t) = t^p \quad f''(t) = p(p - 1)t^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Если $p \in (-1, 1)$, то $\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq C$.

Действительно.

$$\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} \leq \frac{1}{1-p}$$

И получили, что

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Если $p > 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt &\leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1}) \\ \implies S_p(n) &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1}) \end{aligned}$$

2. Гармонические числа. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad f''(t) = \frac{2}{t^3} \quad m = 1$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int_1^n \frac{1}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$$

Последовательность a_n монотонно возрастает.

$$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$$

\implies (т.к. a_n возрастает и ограничена сверху) a_n имеет предел $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Получаем, что:

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1) = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$$

$\frac{1}{2} + a =: \gamma$ – постоянная Эйлера.

$$\gamma \approx 0,5772156649\dots$$

3. Формула Стирлинга.

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

$$f(t) = \ln t \quad f''(t) = -\frac{1}{t^2} \quad m = 1$$

$$\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt$$

$$\int_1^n \ln t dt = t \ln t \Big|_1^n - \int_1^n t(\ln t)' dt = n \ln n - n + 1$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$$

b_n монотонно возрастают.

$$b_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq 1$$

\implies у b_n есть предел b .

$$b_n = b + o(1)$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 + b + o(1)$$

$$n! = \exp\left(n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b + o(1)\right) = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} (1 + o(1)) \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}$$

Хотим понять, что такое $e^{1-b} = c$.

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nc}}{(n^n e^{-n} \sqrt{nc})^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2nc}}{\sqrt{n^2 c^2}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies c = \sqrt{2\pi}$$

Итого формула Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

1.3. §5. Несобственные интегралы

Определение 1.6.

$$-\infty < a < b \leq +\infty$$

$$f \in C[a, b)$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$$-\infty \leq a < b < +\infty$$

$$f \in C(a, b]$$

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b M = M(b-c) \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow b^-$$

Теорема 1.10 (Критерий Коши сходимости интегралов).

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

$$\int_a^b f \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) : \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \left| \int_c^d f \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f = \int_a^b f \text{ — конечен.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall c \in (b - \delta, b) \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

Аналогично получаем для $d \in (b - \delta, b)$ $\left| \int_a^d f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$

$$\left| \int_a^c f - \int_a^d f \right| \leq \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \int_a^d f \right| < 2\varepsilon$$

“ \Leftarrow ”

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

$$\tilde{b} = b - \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

Это критерий Коши для $\lim_{c \rightarrow b^-} F(c)$. □

Следствие.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b$

и $\int_{c_n}^{d_n} f \not\rightarrow 0$, то $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

$$\text{Т.к. } c_n, d_n \rightarrow b \implies \exists N \forall n > N \quad c_n, d_n > \tilde{b}$$

$$\implies \left| \int_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon.$$

Значит, $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty.$$

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F .

$$\int_a^c f = F(c) - F(a)$$

Существование $\int_a^b f$ – существование $\lim_{c \rightarrow b^-} (F(c) - F(a)) = \lim_{c \rightarrow b^-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b (слева)

Соглашение. Если F не определена в точке b , считать, что

$$F \Big|_a^b := \lim_{c \rightarrow b^-} F(c) - F(a)$$

Тогда если $\int_a^b f$ существует, то $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

Пример.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1} \Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$$

$$p = 1$$

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \rightarrow +\infty$$

Тогда интеграл расходится.

Если $p \neq 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \rightarrow \frac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1$$

Если же $p < 1$, то $\rightarrow +\infty$.

Получили, что $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p}$$

Если $p = 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$$

Значит, интеграл расходится.

Если же $p \neq 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$$

Если $p > 1 \implies \rightarrow +\infty$

Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

Получили, что $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

Свойства.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

1. Аддитивность.

$$\int_a^b f \text{ сходится} \implies \forall c \in (a, b) \int_a^c f \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f \text{ - сходится} \implies \exists \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f =: \int_a^b f$$

$$\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f \implies \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim_{B \rightarrow b^-} \int_c^B f$$

$$\text{Вот и получили, что } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \square$$

2. $\int_a^b f$ сходится $\implies \int_c^b f \rightarrow 0$ при $c \rightarrow b-$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f$$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

3. Линейность. $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся $\implies \int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g \text{ при } B \rightarrow b-$$

\implies предел конечен и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

□

Замечание.

$\int_a^b f$ сходится $\int_a^b g$ расходится $\implies \int_a^b (f \pm g)$ расходится.

Доказательство – от противного.

Свойства (продолжение).

4. Монотонность $f, g \in C[a, b]$ $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство.

$$c \in [a, b] \implies f, g \in C[a, c]$$

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g$$

Переходим к пределу в неравенстве. $c \rightarrow b-$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

5. Интегрирование по частям.

$$f, g \in C^1[a, b] \implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

(Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

Доказательство.

$$c \in [a, b] \quad f, g \in C^1[a, c]$$

$$\int_a^c f g' = f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g$$

Теперь напишем предел $c \rightarrow b-$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f g' = \lim_{c \rightarrow b-} (f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g) = \lim_{c \rightarrow b-} f g \Big|_a^c - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f' g$$

□

6. Замена переменной.

$$f \in C[a, b] \quad \varphi : [a, \beta) \rightarrow [a, b] \text{ и } \varphi \text{ непрерывна и дифференцируема. } c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

(Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

Доказательство.

$$F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx \quad y \in [a, b]$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

$$\text{Если существует предел в правой части. Т.е. } \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

$$\text{Тогда } \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - \Phi(\alpha)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

$$a \leq \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

$$\text{Теперь надо понять, что } \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

Возьмем $\gamma_n \rightarrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow c$ оба стремятся слева

$$F(c_n) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c} F(y)$$

$$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$$

Случай второй. Существует $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Т.е. существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int_{\varphi(a)}^c f(x) dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \rightarrow \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \rightarrow b$

Пусть $y_n \rightarrow b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta)$ $\varphi(\delta_n) = y_n$.

$$\varphi(\alpha) \leq y_n \leq \varphi(\gamma_m)$$

\implies по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \rightarrow \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \rightarrow [a, b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$$\varphi(\delta_{n_k}) \leq \varphi(p) < b.$$

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \rightarrow b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Замечание.

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}$$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.3.1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b)$$

Интересуемся сходимостью $\int_a^b f(x) dx$

Теорема 1.11.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b) \quad F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

Сходимость $\int_a^b f(x) dx$ равносильна ограниченности F .

Доказательство.

$$F(y_2) - F(y_1) = \int_a^{y_2} f - \int_a^{y_1} f = \int_{y_1}^{y_2} f \geq 0$$

$\implies F$ монотонно возрастает.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} F(y) - F(a)$$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. \square

Следствие.

$$1. 0 \leq f \leq g \quad f, g \in C[a, b)$$

Если $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится.

Если $\int_a^b f$ расходится, то и $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство.

$$F(y) := \int_a^y f \quad G(y) := \int_a^y g$$

$F \leq G$ на $[a, b)$ (по монотонности интеграла)

$\int_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху.

$\implies F$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена $\implies \int_a^b f$ сходится.

(Второй пункт – переформулировка) \square

$$2. f \geq 0 \quad f \in C[a, +\infty) \text{ и } f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f$ – сходится.

Доказательство.

$$f \in O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \implies f \leq M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} g$ сходится.

$$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.} \quad \square$$

Замечание.

Неравенства $f \leq g$ или $f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ могут выполняться лишь при достаточно больших x .

(Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

$$3. f, g \geq 0 \quad f, g \in C[a, b) \text{ и } f \sim g \text{ при } x \rightarrow b-$$

Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково.

(или оба сходятся, или оба расходятся)

Доказательство.

$f = \varphi g$, где $\varphi(x) \rightarrow 1$, при $x \rightarrow b-$.

\implies существует такое c , что при $x \geq c$ $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2$

$\implies \frac{g}{2} \leq f = \varphi g \leq 2g$ при $x \geq c$

\implies если $\int_c^b g$ сходится, то $\int_c^b f$ сходится. (и наоборот)

А значит, и $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково. □

Замечание.

$f \geq 0$ $f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \rightarrow 0$.

1.3.2. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

Определение 1.7 (Абсолютная сходимость.).

$f \in C[a, b)$

$\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.12.

Если \int абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.

$$F(c) = \int_a^c f = \int_a^c f_+ - \int_a^c f_-$$

$$\Phi(c) = \int_a^c |f| = \int_a^c f_+ + \int_a^c f_-$$

$$\int_a^c f_+ =: F_1(c)$$

$$\int_a^c f_- =: F_2(c)$$

Знаем, что $\Phi(c)$ сходится. Значит, Φ ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2$, $F_1 \geq 0$ $F_2 \geq 0 \implies F_1$ и F_2 ограничены.

$\implies \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ сходятся $\implies \int_a^b f$ сходится по линейности. □

Следствие.

$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$, если $\int_a^b f$ абсолютно сходится.

Доказательство.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

и монотонность интеграла □

Теорема 1.13 (признак Дирихле).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists K : \left| \int_a^y f \right| \leq K$ при всех y .

2. g монотонна.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$ (В другом случае тоже верно, но нам доказывать не стали)

$$F(y) := \int_a^y f$$

$$\int_a^y fg = Fg \Big|_a^y - \int_a^y Fg'$$

Посмотрим на $F(y)g(y)$.

$$|F(y)g(y)| \leq K |g(y)| \rightarrow 0.$$

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что $\int_a^{+\infty} Fg'$ сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть g монотонно возрастает.

$$\int_a^{+\infty} |Fg'|$$

$$|Fg'| = |F| |g'| \leq K |g'|.$$

Т.е. надо понять, что $\int_a^{+\infty} K|g'|$ сходится.

$$\int_a^y K|g'| = K(g(y) - g(a)) \rightarrow -Kg(a)$$

□

Теорема 1.14 (признак Абеля).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ –сходится
2. $|g(x)| \leq K \quad \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле.

g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ и $|A| \leq K$

$\tilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x) dx \implies \int_a^y f(x) dx$ ограничена в окрестности $+\infty$ (т.е. при $y \geq b$).

Но при $y \in [a, b]$ она ограничена, т.к. непрерывна.

Т.е. показали, что f и \tilde{g} удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$$\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x) dx - \text{сходится}$$

$$fg = fA + f\tilde{g} \text{ и } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} fA + \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$$

□

Следствие.

$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T .

g монотонна и стремится к 0 на бесконечности, и $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$ расходится.

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \text{ сходится} \iff \int_a^{a+T} f(x) dx = 0$$

Доказательство.

“ \Leftarrow ”

$$F(y) := \int_a^y f(x) dx = \int_{a+kT}^y f(x) dx = \int_a^{y-kT} f(x) dx$$

$$a \leq y - kT \leq a + T.$$

Т.е. множество значение $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a + T]$ совпадает.

Но F непрерывна \implies ограничена на $[a, a + T]$

$\implies F$ ограничена на \mathbb{R}

\implies по принципу Дирихле $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

“ \implies ”

Докажем, что если $\int_a^{a+T} f(x) dx =: A \neq 0$, то $\int_a^{+\infty} fg$ расходится.

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ - периодическая.

$$\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} f - \int_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0.$$

Значит, $\int_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится.

$$\text{Но } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + A \int_a^{+\infty} g$$

Получили, что одно слагаемое сходится, а другое расходится (т.к. хвост знакопостоянен, а $\int_a^{+\infty} |g|$ расходится и g монотонна)

□

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

Случай 1.

$$p > 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится}$$

$\implies \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ – абсолютно сходится.

Случай 2.

$$0 < p \leq 1$$

$\sin x$ – периодическая функция $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \rightarrow 0$ и монотонна.

\implies по следствию признака Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx \neq 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^p} dx \text{ сходится} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится} \iff p > 1$$

(Т.к. если $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится, то пользуемся $0 \leq |\sin x| \leq 1$, если же расходится, то есть следствие из признака Дирихле)

\implies нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$$p \leq 0$$

Воспользуемся критерием Коши.

$$\int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{3}$$

\implies нет сходимости.

2. 6. Метрические и нормированные пространства

2.1. §1. Открытые и замкнутые множества

Определение 2.1.

(X, ρ) – метрическое пространство, если $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример.

1. \mathbb{R} $\rho(x, y) = |x - y|$
2. \mathbb{R}^2 $\rho(x, y)$ – длина отрезка xy .
3. X $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y \\ 1 & \text{если } x \neq y \end{cases}$
4. Множество – сфера. Расстояние – дуги.
5. Манхэттенская метрика. \mathbb{R}^2 $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$
 $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
6. Французская железнодорожная метрика. Есть город Париж и радиальные дороги от него. Больше никто никак между собой не связан.
 Если A и B лежат на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$
 Если A и B лежат на разных лучах, то $\rho(A, B) = AP + BP$
 Упражнение – проверить, что это метрика.

Определение 2.2.

Открытый шар радиуса r с центром в точке a $B_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар радиуса r с центром в точке a $\bar{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$

Свойства.

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0$
 $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$

Доказательство.

Возьмем радиус $r := \frac{\rho(a, b)}{3}$. Он подходит.

От противного. Пусть пересекаются, т.е. $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$

$$\implies \rho(x, a) < r, \rho(x, b) < r \implies \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(x, b) < 2r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$$

Получили противоречие. □

Определение 2.3.

$A \subset X$ – метрическое пространство.

$a \in A$ – внутренняя точка, если $\exists r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset A$

Определение 2.4.

Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства открытых множеств.

1. \emptyset, X – открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
4. $B_r(a)$ – открытое множество.

Доказательство.

2. A_α – открытые, $\alpha \in I$.

$$A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Возьмем $a \in A$, тогда $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$

A_β открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$

3. A_1, A_2, \dots, A_n – открытые. $A := \bigcap_{k=1}^n A_k$

Возьмем $a \in A \implies a \in A_k \quad \forall k = 1, \dots, n$

A_k – открытое $\implies \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$

$r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0 \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$

$$\implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$$

4. Пусть $x \in B_r(a)$

Возьмем $\tilde{r} := r - \rho(x, a) > 0$

Проверим, что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$.

Возьмем $y \in B_{\tilde{r}}(x) \implies \rho(y, x) < \tilde{r} = r - \rho(x, a)$

$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < \tilde{r} + \rho(x, a) = r$

□

Замечание.

Конечность в третьем свойстве существенна.

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

Определение 2.5.

Внутренность множества $\text{int } A$ – множество всех внутренних точек A

(другое обозначение – $\overset{\circ}{A}$)

Свойства.

1. $\text{int } A \subset A$
2. $\text{int } A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .
3. $\text{int } A$ – открытое множество.
4. $\text{int } A = A \iff A$ открыто
5. $A \subset B \implies \text{int } A \subset \text{int } B$
6. $\text{int } (A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7. $\text{int } (\text{int } A) = \text{int } A$

Доказательство.

2. $G := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открытое из A .

Надо доказать, что $\text{int } A = G$

“ \supset ”

Берем $x \in G \implies x \in U_\alpha \subset A \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U_\alpha \subset A$

$\implies x$ – внутренняя точка $\implies x \in \text{int } A$

“ \subset ”

Берем $x \in \text{int } A \implies \exists r > 0 B_r(x) \subset A$

$B_r(x)$ – открытое множество, которое содержится в A и содержит x .

$\implies x \in G$.

3. По пункту 2 $\text{int } A$ – объединение открытых множеств \implies открыто

4. “ \implies ”

$\text{int } A$ открыто по пункту 3 $\implies A$ открыто.

“ \impliedby ”

A открыто \implies все точки внутренние $\implies \text{int } A = A$.

6. “ \subset ”

$A \cap B \subset A \implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } A$

$A \cap B \subset B \implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } B$

$\implies \text{int } (A \cap B) \subset \text{int } A \cap \text{int } B$

“ \supset ”

$x \in \text{int } A \cap \text{int } B \implies x \in \text{int } A, x \in \text{int } B \implies B_{r_1}(x) \subset A, B_{r_2}(x) \subset B$

$\implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies x \in \text{int } (A \cap B)$

7. $\text{int } A$ открыто $\implies \text{int } (\text{int } A) = \text{int } A$ по пункту 4.

□

Определение 2.6.

Замкнутое множество.

$A \subset X$ – замкнутое, если $X \setminus A$ – открытое.

Свойства.

1. \emptyset, X – замкнутое.
2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств – замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
4. $\overline{B}_r(a)$ – замкнутое множество.

Доказательство.

2. $A_\alpha \implies X \setminus A_\alpha =: B_\alpha$ – открытое.

$\implies B := \bigcup B_\alpha$ – открыто

$X \setminus B = \bigcap (X \setminus B_\alpha) = \bigcap A_\alpha$ – замкнуто.

3. $X \setminus \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$ – открыто.

4. $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > r\}$ – открыто?

Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$

$\tilde{r} := \rho(x, a) - r$

$B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset$

От противного. Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) \implies$

$\rho(y, x) < \tilde{r}$ и $\rho(y, a) \leq r$

$\implies \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a)$

Противоречие.

□

Замечание.

В пункте 3 существенна конечность.

$\mathbb{R} \quad A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$ – не является замкнутым.

Определение 2.7.

Замыкание множества A – $Cl A$ (другое обозначение – \overline{A})

– пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Свойства.

1. $A \subset Cl A$
2. $Cl A$ – замкнутое множество

$$3. Cl A = A \iff A \text{ – замкнуто}$$

$$4. A \subset B \implies Cl A \subset Cl B$$

$$5. Cl(A \cup B) = Cl A \cup Cl B$$

$$6. Cl(Cl A) = Cl A$$

Теорема 2.1.

$$Cl A = X \setminus int(X \setminus A)$$

Доказательство. (теоремы)

$$X \setminus Cl A = int(X \setminus A)$$

$$int(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \text{ где } U_{\alpha} \subset X \setminus A \text{ и открыт.}$$

$$X \setminus int(X \setminus A) = X \setminus \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus U_{\alpha}) = Cl A$$

$$X \setminus U_{\alpha} \supset A \text{ и замкнуто.}$$

□

Доказательство. (свойств)

$$3. Cl A = A \iff X \setminus A = X \setminus Cl A (= int(X \setminus A))$$

$$\iff X \setminus A = int(X \setminus A) \iff X \setminus A \text{ – открыто} \iff A \text{ замкнуто.}$$

$$4. A \subset B \implies X \setminus B \subset X \setminus A \implies int(X \setminus B) \subset int(X \setminus A)$$

$$\implies X \setminus int(X \setminus A) \subset X \setminus int(X \setminus B)$$

$$\implies Cl A \subset Cl B$$

□

Пример в \mathbb{R} .

$$int [0, 1] = (0, 1)$$

$$Cl (0, 1] = [0, 1]$$

$$int \mathbb{Q} = \emptyset$$

$$Cl \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Упражнение. $A, \quad int(Cl(int(Cl \dots(A) \dots)))$. Какое количество различных множеств таким образом может быть получено?

Теорема 2.2.

$$a \in Cl A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\text{Пусть для некоторого } r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$$

$$\implies a \notin A \text{ и } B_r(a) \subset X \setminus A \implies a \text{ – внутренняя точка } X \setminus A$$

$$\implies a \in int(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus int(X \setminus A) = Cl A$$

Противоречие.

“ \longleftarrow ”

Пусть $a \notin Cl A = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$, где F_{α} – замкнуто и $\supset A$

\implies существует β , что $a \notin F_{\beta} \supset A \implies a \in X \setminus F_{\beta}$ – открыто.

\implies возьмем $r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset X \setminus F_{\beta} \subset X \setminus A$

$\implies B_r(a) \cap A = \emptyset$

Получили противоречие. □

Следствие.

$A \subset X$ и U – открытое множество, $U \cap A = \emptyset$

Тогда $U \cap Cl A = \emptyset$

Доказательство.

Если $x \in U \cap Cl A$, то $x \in U$ – открытое

\implies для некоторого $r > 0$ $B_r(x) \subset U$

$\implies B_r(x) \cap A = \emptyset \implies x \notin Cl A$

Противоречие. □

Определение 2.8.

Проколота окружность точки – шарик без центра.

$$\mathring{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$$

Определение 2.9.

$A \subset X$ a – предельная точка, если в любой проколоте окружности точки a есть точка из A .

Определение 2.10 (Обозначения).

A' – множество предельных точек A .

Свойства.

1. $Cl A = A \cup A'$
2. $A \subset B \implies A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4. A – замкнутое $\iff A' \subset A$

Доказательство.

$$1. a \in Cl A \iff \forall r > 0 \ B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \ \forall r > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A, \text{ но } a \in A' \end{cases}$$

$$2. \text{ Пусть } a \in A'. \text{ Тогда } \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \ \forall r > 0$$

$$\text{но } A \subset B \implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \ \forall r > 0 \implies a \in B'$$

$$3. A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$$

$$B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$$

$$\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$$

Обратное включение.

Возьмем $x \in (A \cup B)'$. Пусть $x \notin A'$

$$\implies \exists r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$$

Но $\mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

$$\implies \mathring{B}_r(x) \cap B \neq \emptyset \implies \forall R \geq r \ \mathring{B}_R(x) \cap B \neq \emptyset$$

Заметим, что сие верно и для радиусов, меньших r . Ведь для всех меньших радиусов будет верно $\mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$. А значит, для них можно провести те же рассуждения.

$$4. A - \text{замкнутое} \iff A = Cl A. (= A \cup A')$$

$$\iff A = A \cup A' \iff A' \subset A.$$

□

Теорема 2.3.

$a \in A' \iff \forall r > 0 \ B_r(a)$ содержит бесконечное множество точек из A .

Доказательство.

“ \implies ”

$$a \in A' \implies \forall r > 0 \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

$\exists a \neq x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A \implies r > \rho(x_1, a) > 0$. Пусть $\rho(x_1, a) = r_1$.

$$\implies \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \text{ и } x_1 \neq x_2.$$

$$r_2 := \rho(a, x_2)$$

Ну и делаем так далее.

“ \impliedby ”

Возьмем $B_r(a)$. $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек.

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек, т.к. выкинули одну точку.}$$

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a - \text{предельная точка.}$$

□

Следствие.

Конечное множество не содержит предельных точек.

Замечание.

Можно было выбирать последовательность x_n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ и $\rho(x_n, a) \downarrow$

Определение 2.11.

(X, ρ) – метрическое пространство. $Y \subset X$.

$(Y, \tilde{\rho})$ – подпространство метрического пространства X .

$$\tilde{\rho} = \rho \Big|_{Y \times Y}$$

Теорема 2.4 (об открытых и замкнутых множествах в подпространстве).

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – подпространство. Тогда

$$1. A \subset Y - \text{открыто в } Y \iff \exists G - \text{открытое в } X \text{ множество, т.ч. } A = G \cap Y$$

2. $A \subset Y$ – замкнуто в $Y \iff \exists F$ – замкнутое в X множество, т.ч. $A = F \cap Y$

Доказательство.

1. “ \implies ”

A – открыто в Y .

$$\forall a \in A \exists r(a) > 0 B_{r(a)}^Y(a) \subset A$$

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \text{ – открыто в } X.$$

Это то самое G , которое нам надо.

$$B_{r(a)}^Y(a) = B_{r(a)}^X(a) \cap Y$$

$$A = A \cap Y = \bigcup_{a \in A} (B_{r(a)}^X(a) \cap Y) = G \cap Y$$

“ \impliedby ”

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмем $a \in A$, тогда

$$a \in G \text{ – открыто в } X \implies \exists r > 0 B_r^X(a) \subset G.$$

$$\implies B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

$$\implies a \text{ – внутренняя точка} \implies A \text{ – открыто в } Y.$$

2. A – замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ – открыто в Y

$$\iff \exists G \text{ – открыто в } X, \text{ т.ч. } Y \setminus A = G \cap Y$$

$$A = (X \setminus G) \cap Y.$$

И положим $F := X \setminus G$.

И все получилось.

□

Пример.

$$X = \mathbb{R} \quad Y = [0, 2)$$

$[0, 1)$ – открыто в Y .

$$B_r^Y(0) = [0, r) \text{ при маленьких } r.$$

$[1, 2)$ – замкнуто в Y .

$$[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$$

$$[1, 2) = [1, 2] \cap [0, 2)$$

Определение 2.12.

X – линейное пространство (над \mathbb{R}).

Тогда норма $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \|x\| \geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C}) \quad \forall x \in X$$

$$3. \text{Неравенство треугольника } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Пример.

1. $X = \mathbb{R} \quad \|x\| := |x|$
2. $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, d} |x_k|$
3. $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_1 := \sum_{k=1}^d |x_k|$
4. $X = \mathbb{R}^d \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^d |x_k|^2}$

5. $X = C[a, b]$

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Комментарий к неравенству треугольника.

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| = |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Определение 2.13.

Скалярное произведение.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и $\forall x, y \in X$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Если над \mathbb{C} , то $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Пример.

1. $\mathbb{R}^d \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$
2. Если $w_1, \dots, w_d > 0$, то $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d w_k x_k y_k$
3. $C[a, b] \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

Свойства скалярного произведения над \mathbb{R} .

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
 $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского
 $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Доказательство.

$$t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Квадратный трехчлен относительно t

$$\implies \text{его дискриминант} \leq 0$$

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \square$$

Замечание.

Когда равенство?

Когда есть корень у трехчлена $\langle x + t_0y, x + t_0y \rangle \geq 0$ относительно t_0 .

$$\implies x + t_0y = 0 \implies x = (-t_0)y$$

3. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

Доказательство.

$$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Неравенство треугольника.

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \text{ – это неравенство Коши-Буняковского.} \quad \square$$

Следствие.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2} \text{ – норма.}$$

Упражнение. Доказать, что норма по формуле выше задается некоторым скалярным произведением $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Свойства нормы.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \|y - x\|$$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

2. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Доказательство.

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \text{ – надо доказать.}$$

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|$$

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\| \quad \square$$

Определение 2.14.

Предел последовательности в метрическом пространстве.

(X, ρ) – метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Определение 2.15.

$E \subset X$ – ограничено, если E содержится в каком-то шаре.

Свойства предела последовательности в метрическом пространстве.

1. Единственность предела.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Это просто и есть определение того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ □

3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$

$\implies \rho(x_n, a)$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.

$\implies \exists R : \rho(x_n, a) \leq R$

$\implies x_n \in \overline{B}_R(a)$ при всех n . □

4. Если a – предельная точка множества A , то $\exists \{x_n\} \subset A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Более того можно выбрать такую последовательность, что $\rho(x_n, a) \downarrow$

Теорема 2.5 (об арифметических свойствах в нормированном пространстве).

X – пространство с нормой $\|\cdot\|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},$$

Тогда.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda a$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$
4. $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$
5. Если есть скалярное произведение, то $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0$$

1. $0 \leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0$
 $\implies \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \leq \\
 & \leq |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \leq \\
 & \lambda_n - \text{имеет предел} \implies \text{ограничена} \implies |\lambda_n| \leq K \\
 & \leq K \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$4. \quad \left| \|x_n\| - \|a\| \right| \leq \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

5. Для доказательства этого факта введем новую норму $\| \| a \| \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ – уже показывали где-то, что это норма.

Тогда верно, что

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\| \| x + y \| \|^2 - \| \| x - y \| \|^2) \\
 \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n - b \rangle + \langle x_n - a, b \rangle = \\
 &= \frac{1}{4} (\| \| x_n + y_n - b \| \|^2 - \| \| x_n - y_n + b \| \|^2 + \| \| x_n - a + b \| \|^2 - \| \| x_n - a - b \| \|^2) \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{1}{4} (\| \| a \| \|^2 - \| \| a \| \|^2 + \| \| b \| \|^2 - \| \| b \| \|^2) = 0
 \end{aligned}$$

□

Определение 2.16.

$$\mathbb{R}^d \quad x_n \in \mathbb{R}^d \quad x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$$

x_n покоординатно сходится к x_0 ,

$$\text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \quad \forall k = 1, 2, \dots, d$$

Теорема 2.6.

В \mathbb{R}^d покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство.

“ \implies ”

$$\| \| x_n - x_0 \| \|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0$$

“ \impliedby ”

$$0 \leq (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 \leq \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 = \| \| x_n - x_0 \| \|^2 \rightarrow 0$$

□

2.2. §2. Компактность

Определение 2.17.

$$A \subset X \quad U_\alpha \subset X \quad \alpha \in I$$

U_α образуют покрытие A , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Определение 2.18.

U_α – открытое покрытие A (= покрытие открытыми множествами),
если это покрытие и все U_α – открытые множества.

Определение 2.19.

$K \subset X$ – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2.7.

Пусть X – метрическое пространство, Y – его подпространство.

$$K \subset Y.$$

Тогда компактность K в метрическом пространстве X и в метрическом пространстве Y равносильны.

Доказательство.

“ \implies ”

Берем U_α – открытые множества из Y , образующие покрытие K .

Тогда $U_\alpha = Y \cap G_\alpha$, где G_α – открытые множества в X .

$K \subset \bigcup U_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$ – покрытие открытыми множествами из X .

$$\implies \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

$$\implies K = K \cap Y \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$$

“ \impliedby ”

Берем открытые множества G_α из X , которые покрывают K .

$$\implies K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y)$$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \text{ т.ч. } K \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

□

Теорема 2.8.

K – компактное $\implies K$ – замкнуто и ограничено.

Доказательство.

Ограниченность. Возьмем $a \in K$

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) \text{ – покрытие открытыми множествами}$$

Выберем конечное подпокрытие $B_{n_1}(a), \dots, B_{n_m}(a)$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{n_j}(a) = B_r(a) \quad r = \max\{n_1, \dots, n_m\}$$

Замкнутость. $X \setminus K$ – открыто?

Берем $a \in X \setminus K$ и хотим проверить, что лежит там вместе с окрестностью.

$$x \in K \text{ и шар } B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) \not\ni a$$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$$

Выберем конечное подпространство.

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(x_k,a)}{2}}(x_k)$$

$$B_r(a) \cap K = \emptyset, \text{ где } r = \min\left\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\right\}$$

□

Следствие из теоремы.

$$\tilde{K} \subset K$$

Если K – компакт и \tilde{K} – замкнуто, то \tilde{K} – компакт.

Доказательство.

$\tilde{K} \subset \bigcup U_\alpha$ – покрыто открытыми множествами

$\bigcup U_\alpha \cup (X \setminus \tilde{K})$ – покрытие открытыми множествами для K .

Можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K}$$

$$\implies \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \supset \tilde{K} \text{ – конечное подпокрытие.} \quad \square$$

Теорема 2.9.

K_α – семейство компактов и любой конечный набор этих компактов имеет непустое пересечение.

Тогда $\bigcap K_\alpha \neq \emptyset$

Доказательство.

От противного. Пусть $\bigcap K_\alpha = \emptyset$

$K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} X \setminus K_\alpha$ – все множества в объединении открытые.

Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{j=1}^n X \setminus K_{\alpha_j} = X \setminus \bigcap_{j=1}^n K_{\alpha_j}$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^n K_{\alpha_j} = \emptyset$$

Получили противоречие с условием, где сказано, что любое конечное покрытие не пусто. \square

Следствие.

$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ – непустые компакты

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов – самый маленький компакт.

$$\implies \neq \emptyset \quad \square$$

Определение 2.20.

$$a, b \in \mathbb{R}^d$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$$

Замкнутый параллелепипед $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$

Теорема 2.10 (о вложенных параллелепипедах).

$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ – замкнутые параллелепипеды.

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$$

Доказательство.

$$P_n = [a^{(n)}, b^{(n)}]$$

На самом деле есть цепочка вложенных отрезков

$$[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \supset [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] \supset \dots$$

Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in P_n \quad \forall n$$

$$a_k^{(n)} \leq c_k \leq b_k^{(n)} \quad \forall k \quad \forall n$$

□

Теорема 2.11 (Гейне-Бореля).

Замкнутый куб в \mathbb{R}^d – компакт.

Доказательство.

K – замкнутый куб и $\bigcup U_\alpha$ – его покрытие открытыми множествами.

Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разобьем все стороны пополам. Получим 2^d кубиков. $\bigcup U_\alpha$ – покрытие каждого из них.

Найдется маленький кубик, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Назовем его K_1 .

Каждую сторону этого кубика располовиним. Т.к. K_1 не покрывается конечным подпокрытием, то найдется меньший кубик, который тоже нельзя покрыть конечно. Обозначим его K_2 .

Делаем так далее.

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

По теореме о вложенных параллелепипедах есть точка, которая принадлежит всем K_i .

Рассмотрим ее. $c \in \bigcap K_n$

Точка c покрыта каким-то U_{α_0} .

$$\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$$

Длина ребра $K_n = \frac{l}{2^n}$

$$\implies \text{максимальное расстояние между точками } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n}.$$

Эта штука стремится к 0.

$$\implies \text{найдется такой номер } n, \text{ что } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n} < r.$$

$$\implies K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это противоречит тому, как мы выбирали кубики, т.к. нашлось множество одно, которое покрывает какой-то кубик целиком.

Получили, что куб – компакт.

□

Теорема 2.12 (о характеристике компактов в \mathbb{R}^d).

$K \subset \mathbb{R}^d \implies$ следующие условия равносильны.

1. K – компакт.
2. K – замкнуто и ограничено.
3. Из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к точке из K .

Замечание.

Третье свойство называется секвенциальная компактность.

Доказательство.

1) \implies 2) – было.

2) \implies 1)

K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset \text{куб}$. (Куб замкнут и компактен)

$\implies K$ – замкнутое подмножество компакта $\implies K$ – компактно.

1) \implies 3)

Пусть есть какая-то последовательность точек $\{x_n\} \subset K$.

D – множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Есть два случая.

Если D конечно, то какая-то точка повторилась бесконечно много раз.

Возьмем подпоследовательность, состоящую из этой точки – она имеет предел.

D бесконечно. Тогда есть ситуация хорошая – когда там есть предельная точка. Обозначим ее a .

Там есть точка x_{n_1} .

$r_1 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_1}), 1\}$

$B_{r_1}(a)$ содержит точку из последовательности. Назовем ее x_{n_2} .

$n_2 > n_1$

$r_2 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_2}), \frac{1}{2}\}$

Делаем и так далее.

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$

$\implies \rho(a, x_{n_k}) \rightarrow 0$ и $x_{n_k} \rightarrow a$.

Поймем, что $a \in K$. a – предельная в $D \implies a \in Cl D \subset K$.

Пусть у D нет предельной точки. Тогда D замкнуто (т.к. $Cl D = D \cap D'$, где $D' = \emptyset$)

$\implies D$ – компакт. Покроем его шариками, каждый из которых содержит ровно одну точку.

$x_n \in D$ и это не предельная точка, ибо их нет.

$\implies \exists \overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n)$ не содержит точек из D .

$\implies B_{r_n}(x_n)$ содержит ровно одну точку из D .

$\implies D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$ – покрытие множествами, из которого не выбрать конечное подпокрытие.

Получили противоречие.

3) \implies 2)

K – замкнуто. Пусть нет. Тогда $Cl K = K \cup K'$.

Возьмем такую $a \in Cl K \setminus K$. a – это предельная точка. Тогда $\exists x_1, x_2, \dots \in K$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Но у любой подпоследовательности x_{n_k} будет тот же предел. Противоречие, т.к. по условию у любой последовательности из K должна быть подпоследовательность, имеющая предел в K .

Значит, K действительно замкнуто.

K ограничено. От противного. K не лежит в $B_n(0) \forall n$.

$\implies \exists x_n \in K \setminus B_n(0) \implies \rho(x_n, 0) \geq n$.

Пусть x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \implies x_{n_k}$ ограничена, а это не так.

□

Замечание.

- 1) \implies 3) доказана для произвольного метрического пространства.
 3) \implies 1) верна для произвольного метрического пространства. (Но это слишком сложно)
 2) \implies 1) для произвольного метрического пространства не верна.

Пример. \mathbb{R} с дискретной метрикой (лентяя) $[0, 1]$ – замкнуто и ограничено. Поймем, что нет компактности.

$$[0, 1] \subset \bigcup_{x \in [0, 1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$$

Следствие. $K \subset \mathbb{R}^d$ – компакт

\implies всякое бесконечное множество точек из K имеет предельные точки, принадлежащие K .

Доказательство. x_1, x_2, x_3, \dots – выбрали последовательность в этом бесконечном множестве.А у нее есть предельная точка из K . □**Теорема 2.13** (Больцано-Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности точек из \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ ограничена $\implies \{x_n\} \subset \overline{B}_R(a)$ – замкнуто и ограничено \implies компакт.

\implies по пункту 3 из теоремы о характеристике компактов в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □

Определение 2.21. (X, ρ) – метрическое пространство. x_1, x_2, x_3, \dots – фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Определение 2.22. (X, ρ) – полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.**Замечание.**

Фундаментальная последовательность ограничена.

Следствие.

- \mathbb{R}^d – полное.
- K – компакт в (X, ρ) , то (K, ρ) – полное.

Доказательство.

1. Пусть x_n – фундаментальная последовательность. $\implies \{x_n\}$ ограничена.

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\forall \varepsilon \exists M \forall k \geq M \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Пусть $n \geq \max\{N, n_M\}$

$$\implies \text{существует } n_k > n. \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \text{ и } \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\implies \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

2. x_n – фундаментальная последовательность в K

\implies существует x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies x_n$ – сходится.

□

2.3. §3. Непрерывные функции

Определение 2.23.

(X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства.

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X.$$

a – предельная точка множества E .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ если:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq a \quad x \in E \text{ и } \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$$

Это было определение по Коши.

Запишем определение по Гейне предела функции в точке.

$$\forall x_n \in E, x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Теорема 2.14 (равносильность определения по Коши и по Гейне).

Коши \implies Гейне.

Покажем, что если выполняется определение по Коши, то выполняется и по Гейне.

Берем подпоследовательность, стремящуюся к a :

$$x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \rho_X(x_n, a) \rightarrow 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta.$$

Тогда это в том числе выполняется для того δ , которое выбрали для какого-то ε . А тогда по данному определению Коши $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$.

$$\implies \rho_Y(f(x), A) \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Гейне \implies Коши

От противного. Пусть нашелся ε , для которого нет δ . (Т.е. условие Коши не выполняется для любого δ , значит можем построить последовательность, выбирая $\delta = \frac{1}{n}$)

$$\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

$$\rho_X(x_n, a) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Но мы знаем из определения по Гейне $\rho_Y(f(x_n), A) \rightarrow 0$

Противоречие.

Следствие.

Предел единственен.

Действительно. Пусть он не единственен. Тогда у функции от одной и той же последовательности есть два предела в разных точках. Функция от последовательности – последовательность. А для последовательностей в метрическом пространстве уже доказали единственность предела.

Теорема 2.15.

$f : E \rightarrow Y$ $E \subset X$ a – предельная точка E .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Тогда $\exists B_r(a)$, т.ч. функция на $B_r(a)$ ограничена.

Доказательство.

$$\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \text{ и } \rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < 1$$

Переформулируем, что получили в предыдущей строке:

$$r := \delta \ f(\overset{\circ}{B}_r(a) \cap E) \subset B_1(A)$$

Тогда:

$$f(B_r(a) \cap E) \subset B_R(A) \ R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\} \quad \square$$

Теорема 2.16 (об арифметических действиях с пределами).

$f, g : E \rightarrow Y$ $E \subset X$

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – нормированное пространство.

a – предельная точка множества E .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda A$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$$

$$4. \text{ Если } \alpha : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lambda, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = \lambda A$$

5. Если в Y есть скалярное произведение, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$$

Теорема 2.17 (Критерий Коши).

(X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства, Y – полное.

$f : E \rightarrow Y$ $E \subset X$ и a – предельная точка множества E .

Существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

\iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \ \forall y \in E \ y \neq a \ \rho_X(x, a) < \delta \ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \ x \neq a \ \forall y \in E \ y \neq a \ \rho_X(x, a) < \delta \ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon \ \rho_Y(f(y), A) < \varepsilon$$

$$\implies \rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), A) + \rho_Y(A, f(y)) < 2\varepsilon$$

“ \longleftarrow ”

Проверим определение по Гейне. Возьмем $x_n \in E \ x_n \neq a \ x_n \rightarrow a$.

Проверим, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность в Y .

Возьмем ε и выберем по нему $\delta > 0$ из условия критерия Коши.

$$\implies \exists N \ \forall n, m \geq N \ \rho_X(x_n, a) < \delta \ \rho_X(x_m, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

$$\implies \{f(x_n)\} \text{ – фундаментальная последовательность в } Y.$$

$$\implies \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ т.к. } Y \text{ – полное.}$$

Если на разных последовательностях оказались разные пределы, то смешаем их, будет та сходящаяся последовательность. Отсюда узнаем, что пределы функции от них должны были быть равны. \square

Определение 2.24.

$$f : E \rightarrow Y \ E \subset X \ a \in E$$

f непрерывна в точке a , если либо a – изолированная точка, либо a – предельная точка множества E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Замечание.

$f : E \rightarrow Y \ E \subset X$ и непрерывна в точке a .

$g : \tilde{E} \rightarrow Z \ \tilde{E} \supset f(E)$ и непрерывна в точке $f(a)$.

Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Теорема 2.18.

$$f : X \rightarrow Y$$

f непрерывна на $X \iff$

\forall открытого в Y множества $U \ f^{-1}(U)$ открыто в X .

Доказательство.

“ \implies ”

$$V := f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

Хотим доказать, что V открыто. Берем $a \in V$.

$$\implies f(a) \in U \text{ – открытое множество.}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

По непрерывности в точке $a \ \exists \delta > 0 \ f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

А это определение непрерывности в “шариках”.

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

$$\implies B_\delta(a) \subset V, \text{ т.е. } a \text{ – внутренняя точка множества } V.$$

$$\implies \text{все точки множества } V \text{ – внутренние} \implies V \text{ открыто.}$$

“ \longleftarrow ”

Берем $a \in X$. Надо проверить непрерывность в точке a .

$U := B_\varepsilon(f(a))$ – открытое множество.

$\implies f^{-1}(U)$ открыто. $a \in f^{-1}(U)$.

$\implies \exists \delta > 0 \ B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\implies f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$ – это определение непрерывности в точке a . □

Теорема 2.19.

Непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство.

$f : X \rightarrow Y \ K \subset X \ K$ – компакт.

$\implies f(K)$ – компакт.

Возьмем покрытие $f(K) \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ открытыми множествами

$V_{\alpha} := f^{-1}(U_{\alpha})$ – открытые множества.

Это покрытие $K \subset \bigcup V_{\alpha}$

(если $x \in K$, но $x \notin V_{\alpha} \ \forall \alpha$, то $f(x) \in f(K)$, но $f(x) \notin U_{\alpha}$)

$\implies \exists V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n} \ K \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$

$\implies f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n f(V_{\alpha_j}) = \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ – конечное покрытие. □

Следствие.

Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие (теорема Вейерштрасса).

$f : K \rightarrow \mathbb{R} \ K \subset X$ непрерывна $\implies \exists u, v \in K$, т.ч. $\forall x \in K \ f(u) \leq f(x) \leq f(v)$

Доказательство.

$f(K)$ – компакт. \implies замкнут и ограничен.

Раз ограничен, то $\inf f(K)$ и $\sup f(K)$ – конечные числа.

Пусть $b := \sup f(K)$ и $b \notin f(K)$.

$\implies \exists y_n \in f(K) \ y_n \rightarrow b$.

b – предельная точка $\implies b \in Cl f(K) = f(K)$.

$\implies \exists v \in K \ f(v) = b$.

Аналогично найдем $a := \inf f(K)$. □

Теорема 2.20.

$f : X \rightarrow Y$.

f – непрерывная, биекция, X – компакт.

Тогда

$f^{-1} : Y \rightarrow X$ – непрерывно.

Доказательство.

$g := f^{-1}$ и надо проверить, что $\forall U$ – открытого множества в X множество $g^{-1}(U)$ открыто в Y .

$f(U) = g^{-1}(U)$ – открыто.

$$f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта, значит и сам компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – замкнуто.

$\implies Y \setminus f(X \setminus U)$ – открыто. □

Определение 2.25.

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X$$

f равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \text{ и } \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Теорема 2.21 (Кантора).

$f : K \rightarrow Y$ K – компакт, f – непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

Пусть нашлось $\varepsilon > 0$, для которого не подходит ни одно $\delta > 0$.

$\delta = \frac{1}{n}$. Оно не подошло, т.е. $\exists x_n, y_n \in K \quad \rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$

x_n – последовательность точек из компакта K .

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K.$$

$$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \quad \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$$

$$\implies \rho_X(y_{n_k}, a) \leq \rho_X(x_{n_k}, a) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$$

По непрерывности функции f в точке a .

$$\exists \delta > 0 \forall \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0, \quad \rho_X(y_{n_k}, a) \rightarrow 0$$

$$\implies \exists \text{ номер, для которого } \rho_X(x_n, a) < \delta, \quad \rho_X(y_n, a) < \delta$$

$$\implies \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \varepsilon \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) + \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \varepsilon$$

А так не бывает. □

Определение 2.26.

X – линейное пространство и $\|\cdot\|$ и $\|\|\cdot\|\|$ – нормы в X .

Эти нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$, т.ч.

$$C_1\|x\| \leq \|\|x\|\| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X$$

Замечание.

Сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

$$x_n \rightarrow a \text{ в смысле } \|\cdot\| \iff \|x_n - a\| \rightarrow 0$$

$$x_n \rightarrow a \text{ в смысле } \|\|\cdot\|\| \iff \|\|x_n - a\|\| \rightarrow 0$$

$$C_1\|x_n - a\| \leq \|\|x_n - a\|\| \leq C_2\|x_n - a\|$$

Теорема 2.22.

В \mathbb{R}^d все нормы эквивалентны.

Доказательство.

$\|\cdot\|$ – стандартная норма.

$p(x)$ – другая норма, e_k – элемент стандартного базиса пространства (стоит 1 на месте k).

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)e_k\right) \leq \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k)e_k) = \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C\|x-y\| \end{aligned}$$

Правое неравенство доказано.

В частности, этим неравенством получили, что

$$\begin{aligned} \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2C} \forall y \|x-y\| < \delta \implies |p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \leq C\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \implies p(x) - \text{непрерывная функция.} \end{aligned}$$

S – единичная сфера в \mathbb{R}^d – компакт.

p достигает на S наименьшего значения.

Это значение $\neq 0$ и неотрицательно $\implies > 0$.

$$\min_{x \in S} p(x) =: C_1 > 0$$

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| \cdot p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\| \cdot C_1, \text{ т.к. } \frac{x}{\|x\|} - \text{точка на сфере } S.$$

Левое неравенство доказали. □

2.4. §4. Линейные операторы**Определение 2.27.**

X, Y – линейные пространства. $A : X \rightarrow Y$

A – линейный оператор, если

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \forall x, y \in X \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Свойства.

$$1. A(0_X) = 0_Y$$

Доказательство.

$$A(0_X) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y \quad \square$$

$$2. A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$$

Доказательство.

По индукции. □

Определение 2.28.

$A, B : X \rightarrow Y$

$$(A \pm B)(x) := A(x) \pm B(x)$$

$$(\lambda A)(x) := \lambda \cdot A(x)$$

Замечание.

Таковыми операция получили снова линейные операторы.

Доказательство.

$$(A+B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) = \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y) \quad \square$$

Замечание.

На самом деле сейчас получили, что операторы из X в Y образуют линейное пространство.

Определение 2.29.

Композиция линейных операторов

$$A : X \rightarrow Y, B : Y \rightarrow Z$$

$$(BA)(x) := B(A(x))$$

Обратный оператор

$$A^{-1}A = Id_X \text{ и } AA^{-1} = Id_Y$$

$$A^{-1} : Y \rightarrow X$$

Свойства.

1. Композиция линейных операторов – линейный оператор.
2. Обратный оператор, если он существует, единственный.
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. Множество обратимых линейных операторов из X в X образуют группу относительно композиции.

Доказательство.

2. Пусть B и C – обратимые к A .

$$C = Id_X \circ C = (BA)C = BAC = B(AC) = B \circ Id_Y = B \\ \implies B = C$$

4. Id_X – единица.

$$A(B \circ C(x)) = A(B(Cx)) = A \circ B(Cx) \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}Id_X B = B^{-1}B = Id_X$$

□

Замечание.

Важный частный случай. $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Матричная запись.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

A_i – линейное отображение, дающее i -ю координату Ax .

$$a_{ik} = A_i \cdot e_k, \text{ где}$$

e_k – столбик нулей, на k -й позиции 1.

Определение 2.30.

Норма оператора. $A : X \rightarrow Y$, X, Y – нормированные пространства.

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$$

Определение 2.31.

Если $\|A\| \neq \infty$, то A называется ограниченным оператором.

Замечание.

Ограниченный оператор и ограниченное отображение – совершенно разные вещи.

Ограниченное линейное отображение – лишь тождественный ноль.

Свойства.

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
4. $\|\cdot\|$ – норма в пространстве линейных ограниченных операторов.

Доказательство.

1. $\|A + B\| = \sup \| (A + B)x \| = \sup \| Ax + Bx \| \leq \sup (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup \|Ax\| + \sup \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = \sup \|\lambda Ax\| = \sup |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$
3. $\|A\| = 0 \implies \sup \|Ax\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \quad \forall x \quad \|x\| \leq 1$

$$\text{Пусть } x \in X \quad x = \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$$

$$Ax = A(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\| A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$$

4. Следует из предыдущих трех.

□

Теорема 2.23.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ при всех } x \in X\}$$

Доказательство.

Пронумеруем их N_1, \dots, N_5 .

$$N_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$N_1 \geq N_2 \quad N_1 \geq N_3$$

$$N_3 = N_4, \text{ т.к. } \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|\frac{1}{\|x\|} Ax\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$$

$$N_4 = N_5$$

$$N_4 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leq N_4 \|x\|$$

$$N_2 \geq N_1$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\text{Возьмем } x : \|x\| \leq 1 \implies \left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\| < 1$$

$$\implies \|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\| \leq N_2$$

$$\implies \frac{1}{1+\varepsilon} \|Ax\| \leq N_2$$

$$\implies \|Ax\| \leq (1+\varepsilon)N_2$$

$$\implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq (1+\varepsilon)N_2$$

$$\implies N_1 \leq (1+\varepsilon)N_2 \text{ и устремим } \varepsilon \text{ к } 0.$$

$$N_5 \geq N_1$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\implies \|Ax\| \leq (N_5 + \varepsilon)\|x\|$$

$$\implies \text{если } \|x\| \leq 1, \text{ то } \|Ax\| \leq N_5 + \varepsilon$$

$$\implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq N_5 + \varepsilon$$

$$\implies N_1 \leq N_5 + \varepsilon \text{ и устремим } \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square$$

Следствие.

$$1. \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$2. \|BA\| \leq \|B\| \|A\|$$

Доказательство.

$$\|BA\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|B(Ax)\| \leq \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|By\| = \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|B \cdot \frac{y}{\|A\|} \cdot \|A\|\| = \|A\| \sup_{\|y\| \leq 1} \|By\| = \|A\| \|B\| \quad \square$$

Теорема 2.24.

$A : X \rightarrow Y$ – линейный оператор.

Тогда следующие условия равносильны:

1. A – ограниченный оператор.

2. A – непрерывен в 0.

3. A – непрерывен.

4. A – равномерно непрерывен.

Доказательство.

$4 \implies 3 \implies 2$ – очевидно.

$1 \implies 4$

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|x - y\| < \delta \implies \|Ax - Ay\| < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$$

$$2 \implies 1$$

$$A0_X = 0_Y$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|x\| = \|x - 0_X\| < \delta \implies \|Ax\| = \|Ax - A0_X\| < \varepsilon$$

Поймем, что $\|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$

$$\text{Если } \|x\| < 1, \text{ то } \|\delta x\| < \delta \implies \|A(\delta x)\| < \varepsilon$$

$$\implies \delta \|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

□

Теорема 2.25.

$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (говорим про стандартную норму, т.е. корень из суммы квадратов)

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$$

Доказательство.

$\|Ax\|^2$. Как эта штука устроена?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k)^2 \leq \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2) = \|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$$

Тогда:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\sqrt{\|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}}{\|x\|} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$$

□

2.5. §5. Длина кривой

Определение 2.32.

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$, X – метрическое пространство. γ – непрерывно.

Тогда это отображение называется путём.

Начало пути – $\gamma(a)$.

Конец пути – $\gamma(b)$.

Носитель пути – $\gamma([a, b])$.

Замкнутый путь – $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Простой путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$.

Простой замкнутый путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$, кроме точек a, b но $\gamma(a) = \gamma(b)$

Противоположный путь – $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, где $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$

Конец γ = начало $\tilde{\gamma}$

Начало γ = конец $\tilde{\gamma}$

Эквивалентные пути. $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$, если $\exists \tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$ строго монотонна, непрерывна и $\tau(a) = c$ $\tau(b) = d$, такое что $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau$.

Замечание.

Это действительно отношение эквивалентности.

$\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies \tilde{\gamma} \sim \gamma$, т.к. $\exists \tau^{-1}$ – обратная к τ , тоже строго монотонна, непрерывна и $\tau^{-1}(c) = a$, $\tau^{-1}(d) = b$

Тогда $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \tau^{-1}$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\tilde{\gamma}}$

$\exists \tau \ \gamma = \tilde{\gamma} \tau \ \exists \tilde{\tau} \ \tilde{\gamma} = \tilde{\tilde{\gamma}} \tilde{\tau}$

$\implies \gamma = \tilde{\gamma} \tau = \tilde{\tilde{\gamma}} \tilde{\tau} \tau$

Определение 2.33.

Кривая – класс эквивалентных путей.

Представитель этого класса – параметризация кривой

Носитель кривой – носитель путей из этого класса.

Определение 2.34.

Длина пути $l(\gamma)$.

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$

Разобьем отрезок $[a, b]$ какими-то промежуточными точками.

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

$l(\gamma) := \sup \sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$

Пояснение. Супремум берется от множества, в которое входят все суммы такого вида. Т.е. участвует и n , и само разбиение.

Замечание.

Длины эквивалентных путей равны, длины противоположных путей тоже равны.

Определение 2.35.

Длина кривой – длина любого пути из класса эквивалентности.

Свойства.

1. $l(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2. $l(\gamma) \geq$ длине любой вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.26 (об аддитивности длины кривой).

$\gamma : [a, b] \rightarrow X \ c \in (a, b)$

$\implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$

Доказательство.

“ \geq ”

Возьмем разбиение для $[a, c]$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c$

И разбиение для $[c, b]$ $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$

$\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leq l(\gamma)$

Припишем \sup по всем t . (От t зависит лишь одна сумма). Получим

$$l(\gamma|_{[a,c]}) + \sum_{j=1}^m \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leq l(\gamma)$$

Припишем \sup по всем разбиениям s .

$$l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}) \leq l(\gamma)$$

“ \leq ”

Снова возьмем разбиение. Только теперь – всего отрезка $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Возможно, одна из t_i попала на c . Тогда надо просто разбить и понять по отдельности.

А что если нет?

$$\sum_{k=1}^n \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leq$$

Пусть $t_j < c < t_{j+1}$.

Заметим, что по неравенству треугольника $\rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leq \rho(\gamma(t_j), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{j+1}))$

Можем тогда добавить точку c в разбиение.

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) = \sum_{k=1}^{j+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) + \sum_{k=j+2}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) \leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$$

Переходим к \sup по t и получаем:

$$l(\gamma) \leq l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$$

□

Дальше кривые и пути в \mathbb{R}^m

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Определение 2.36.

$$\gamma = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m)$$

γ – r -гладкий путь, если все $\lambda_k \in C^r[a, b]$

Гладкий путь – $r = 1$.

Гладкая кривая, если в классе эквивалентности есть гладкая параметризация.

Определение 2.37.

Кусочно гладкий путь – можно нарезать на конечное число кусочков, на каждом из которых путь гладкий.

Лемма.

γ – гладкий путь.

$\Delta \subset [a, b]$ – отрезок, $l(\Delta)$ – длина этого отрезка.

$$m_{\Delta}^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$M_{\Delta}^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$m_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m (m_{\Delta}^{(i)})^2}$$

$$M_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_{\Delta}^{(i)})^2}$$

$$\text{Тогда } m_{\Delta} l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} l(\Delta)$$

Доказательство.

Возьмем разбиение $\Delta : t_0, t_1, \dots, t_n$

a_k – длина k -го звена ломаной. (От $\gamma(t_{k-1})$ до $\gamma(t_k)$)

$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma'_i(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})$ $\xi_{ik} \in (t_{k-1}, t_k)$ по теореме Лагранжа.

$$|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| = |\gamma'_i(\xi_{ik})| (t_k - t_{k-1}) \leq M_{\Delta}^{(i)} (t_k - t_{k-1})$$

$$a_k^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|^2 \leq \sum_{i=1}^m (M_{\Delta}^{(i)})^2 (t_k - t_{k-1})^2$$

$$\implies a_k \leq M_{\Delta} (t_k - t_{k-1})$$

Аналогично $a_k \geq m_{\Delta} (t_k - t_{k-1})$

$$m_{\Delta} l(\Delta) = m_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq M_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M_{\Delta} l(\Delta)$$

А теперь переходим к \sup по t .

$$m_{\Delta} l(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} l(\Delta) \quad \square$$

Теорема 2.27.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкий путь.

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \dots + \gamma'_m(t)^2} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Доказательство.

Рассмотрим разбиения $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$$

$$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$$

Тогда уже знаем, что

$$m_k (t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq M_k (t_k - t_{k-1})$$

Заметим, что так же верно будет и

$$m_k (t_k - t_{k-1}) \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq M_k (t_k - t_{k-1})$$

Теперь все сложим.

$$\sum_{k=1}^n m_k (t_k - t_{k-1}) \leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k (t_k - t_{k-1})$$

И

$$\sum_{k=1}^n m_k (t_k - t_{k-1}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k (t_k - t_{k-1})$$

Осталось понять, что $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$, когда мелкость разбиения $\rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k} (t_k - t_{k-1}) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)2} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)2}}{M_k + m_k} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} + m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}}{M_k + m_k} (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}) (t_k - t_{k-1}) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}) (t_k - t_{k-1}) \leq \end{aligned}$$

Заметим, что $M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} \leq w_{\gamma'_i}(t_k - t_{k-1}) \leq w_{\gamma'_i}(|\tau|)$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m w_{\gamma'_i}(|\tau|)(t_k - t_{k-1}) = (b - a) \sum_{i=1}^m w_{\gamma'_i}(|\tau|) \rightarrow 0 \quad \square$$

Следствие.

1. Длина графика функции. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Доказательство.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'_1(t) = 1$$

$$\gamma'_2(t) = f'(t) \text{ и подставим.} \quad \square$$

2. Длина в полярных координатах.

$$r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

(по углу задаем длину, получаем путь, заданный полярными координатами)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$

Доказательство.

$$\gamma_1(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$\gamma_2(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\|^2 = ((r(\varphi) \cos \varphi)')^2 + ((r(\varphi) \sin \varphi)')^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \quad \square$$

3. $l(\gamma) \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\|$

Доказательство.

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \square$$

Определение 2.38.

Точка t_0 , в которой $\gamma'(t_0) = 0$ называется особой точкой.

Определение 2.39.

γ – кривая, имеющая конечную длину S .

Натуральная параметризация кривой

$$\tilde{\gamma} : [0, S] \rightarrow X, \text{ т.ч. } \forall s \in [0, S] \quad l(\tilde{\gamma}|_{[0, s]}) = s$$

Теорема 2.28.

Любая гладкая кривая без особых точек имеет натуральную параметризацию.

Доказательство.

γ – какая-то гладкая параметризация без особых точек.

$S = l(\gamma) \leq (b - a) \max \|\gamma'\|$, т.е. кривая имеет конечную длину.

$$\tau : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

$$\tau(t) = l(\gamma|_{[a,t]})$$

$$\tau(a) = 0 \quad \tau(b) = S$$

Поймем, что τ строго монотонно возрастает и непрерывна.

$$\tau(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \text{ – непрерывная функция.}$$

$$\tau'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \implies \tau \text{ строго монотонна.}$$

$$\implies \text{существует } \tau^{-1}$$

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau^{-1}$ – натуральная параметризация.

Задана на том отрезке, на котором надо.

$$\text{Надо понять, что такое } l(\tilde{\gamma}|_{[0,s]}) = l(\gamma\tau^{-1}|_{[0,s]}) = l(\gamma|_{[a,\tau^{-1}(s)]}) =$$

Если $\tau^{-1}(s) = t$, то

$$= l(\gamma|_{[a,t]}) = \tau(t) = \tau(\tau^{-1}(s)) = s \quad \square$$

Свойства натуральной параметризации.

Если γ – натуральная параметризация, то $\|\gamma'(t)\| = 1$

Доказательство.

$$s = l(\gamma|_{[0,s]}) = \int_0^s \|\gamma'(t)\| dt$$

Продифференцируем по s

$$1 = \|\gamma'(t)\| \quad \square$$

Определение 2.40.

$E \subset X$ – линейно связное. (Часто слово линейно будет опускаться, т.к. других связностей не будет)

Если:

$\forall u, v \in E$ существует путь $\gamma : [a, b] \rightarrow E$, т.ч. u – его начало, а v – его конец.

Определение 2.41.

Область – открытое линейно связное множество.

Теорема 2.29.

Ω – область в \mathbb{R}^m . Тогда между любыми двумя ее точками существует ломаная, целиком содержащаяся в Ω и соединяющая эти точки.

Доказательство.

$$u, v \in \Omega$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma(a) = u \quad \gamma(b) = v$$

$\gamma([a, b])$ – компакт.

У каждой точки пути можно выбрать шарик с центром в ней, что $B_{2r_x}(x) \subset \Omega$

Выберем конечное подпокрытие.

$B_{r_{x_1}}(x_1), \dots, B_{r_{x_n}}(x_n)$ покрывают $\gamma([a, b])$

И

$\overline{B_{r_{x_1}}}(x_1), \dots, \overline{B_{r_{x_n}}}(x_n) \subset \Omega$ (в силу уполовинивания радиуса)

$$\gamma([a, b]) \cap \overline{B_{r_{x_1}}}(x_1)$$

Тогда можно выбрать последнюю точку на пути из каждого шарика и построить по ним ломаную. □

Теорема 2.30 (Больцано-Коши).

E – связное множество

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна

$$a, b \in E \quad f(a) = A \quad f(b) = B$$

Тогда $\forall C$ между A и B существует $c \in E$, т.ч. $f(c) = C$

Доказательство.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ – кривая, соединяющая a и b .

$g := f \circ \gamma \quad g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция

$$g(\alpha) = f(\gamma(\alpha)) = f(a) = A$$

$$g(\beta) = f(\gamma(\beta)) = f(b) = B$$

\implies существует $t \in [\alpha, \beta]$, т.ч. $f(\gamma(t)) = g(t) = C$

$$c := \gamma(t) \in E$$

□

3. 7. Ряды

3.1. §0. Расширенное напоминание

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Частичная сумма $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$

Сходимость – \exists конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ означает $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Были еще всякие свойства (их доказательства в конспекте предыдущего семестра)

Линейность

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Группировка членов ряда

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \dots$$

не меняет суммы сходящегося ряда.

Необходимое условие сходимости.

$$\sum a_n \text{ – сходится } \implies a_n \rightarrow 0$$

А теперь – расширение:

Теорема 3.1 (Критерий Коши).

$$\sum a_n \text{ сходится } \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n > N \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum a_n \text{ – сходится } \iff \exists \text{ конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\iff (\text{по критерию Коши для предела последовательностей}) \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$S_m - S_n = \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad \square$$

Теорема 3.2.

$$\sum a_n$$

1. Если в каждой группе не более, чем M членов и $a_n \rightarrow 0$, то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).
2. Если в каждой группе члены одного знака, то из сходимости группированного следует сходимость исходного ряда (к той же сумме).

Доказательство.

1. $S_{n_k} \rightarrow S$ при $k \rightarrow \infty$

(Т.к. группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k \geq K |S - S_{n_k}| < \varepsilon$$

$$\text{Найдем } N, \text{ т.ч. } \forall n > N |S - S_n| < 2\varepsilon$$

$$N \geq N_K$$

Если $n > N$

$$n_k \leq n < n_{k+1} \quad k \geq K$$

$$S_n - S_{n_k} = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_n - \text{ тут } \leq M \text{ слагаемых.}$$

Возьмем N_1 , т.ч.

$$\forall n \geq N_1 |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$N \geq N_1 + M$ – второе условие на N .

$$\text{Тогда } |S_n - S_{n_k}| \leq |a_{n_k+1}| + |a_{n_k+2}| + \dots + |a_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$$|S - S_n| \leq |S - S_{n_k}| + |S_{n_k} - S_n| \leq 2\varepsilon$$

2. $S_{n_k} \rightarrow S$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k \geq K |S_{n_k} - S| < \varepsilon$$

$$N := n_K$$

если $n \geq N$, то $n_k \leq n < n_{k+1}$

$$S_n = S_{n_k} + a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_n$$

если в группе все члены ≥ 0 , то $S_n \geq S_{n_k}$

$$S_n = S_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}-1} - \dots - a_{n+1}$$

$$S_{n_{k+1}} \geq S_n$$

$$\text{Тогда } |S_n - S| < \varepsilon$$

Если в группе отрицательные члены

$$S_n \leq S_{n_k} \text{ и } S_n \geq S_{n_{k+1}}$$

и тот же вывод.

□

3.2. §1. Знакопостоянные ряды

Теорема 3.3.

$$a_n \geq 0$$

$\sum a_n$ сходится \iff последовательность частичных сумм ограничена.

Доказательство.

“ \implies ” – очевидная

Ряд сходится, значит, частичные суммы имеют предел, значит ограничены.

“ \impliedby ”

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$$

А монотонно возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. \square

Теорема 3.4 (Признак сравнения).

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

1. $\sum b_n$ сходится $\implies \sum a_n$ сходится
2. $\sum a_n$ расходится $\implies \sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. $\sum b_n$ – сходится
 $\implies B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ – ограничена
 $\implies A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq B_n$
 – ограничены
 \implies у A_n есть конечный предел \implies ряд $\sum a_n$ сходится.
2. От противного.
 $\sum b_n$ сходится $\implies \sum a_n$ сходится.

\square

Следствие.

$$a_n, b_n \geq 0$$

1. Если $a_n = O(b_n)$ и $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится
2. Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

1. $0 \leq a_n \leq Cb_n$
2. Выкидываем все нолики из b_n
 Тогда $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$
 \implies с некоторого места $\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2$
 $\implies a_n < 2b_n < 4a_n$
 Снова получили неравенство

\square

Теорема 3.5 (признак Коши).

$$a_n \geq 0$$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд сходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится

$$3. q^* := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Если $q^* < 1$ сходится, то и ряд сходится.

Если $q^* > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

$$1. 0 \leq a_n \leq q^n$$

ряд мажорируется геометрической прогрессией, а значит сходится

2. $a_n \geq 1$ не выполняется необходимое условие.

$$3. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q^* < 1$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$$

$$q := \frac{q^* + 1}{2}$$

начиная с некоторого момента $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q$

Т.е. $\sqrt[k]{a_k} < q$ при $k \geq K$, тогда по пункту 1 ряд сходится.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q^* > 1$$

$\implies \exists n_k$, т.ч.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q^* > 1$$

\implies начиная с некоторого номера K

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

$\implies a_{n_k} > 1$ при $k \geq K$

$\implies a_n \not\rightarrow 0$

\implies ряд расходится.

□

Замечание.

Заметим, что если $q^* = 1$, то ничего о сходимости ряда сказать нельзя:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ - сходится

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

Теорема 3.6 (признак Даламбера).

$$a_n > 0$$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$, то ряд сходится.

2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

$$3. d^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

$$1. a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$$\implies a_n \leq d^{n-1} a_1$$

Ряд, мажорирующийся геометрической прогрессией.

$$2. \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_n \leq a_{n+1} \implies$$

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \text{расходится}$$

$$3. d^* < 1$$

$$d := \frac{d^*+1}{2} < 1$$

\implies начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

$$d^* > 1$$

\implies с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

\implies ряд расходится.

□

Упражнение. Если $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится.

Если $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

$$\text{По Даламберу } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

\implies ряд сходится

По Коши.

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

Теорема 3.7.

$$a_n > 0$$

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d^*$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d^*

Доказательство.

Применяем Штольца!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln d^*$$

□

Упражнение. Придумать ряд, про который признак Коши позволяет выяснить, что он сходится, а признак Даламбера нет.

Теорема 3.8.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и монотонна.

Тогда

$$\left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$$

Доказательство.

Пусть функция монотонно возрастает. (В другом случае аналогично)

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=a+1}^b f(k)$$

$$-f(b) \leq \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=a}^b f(k) \leq -f(a)$$

$$\implies \left| \sum_{k=a}^b f(k) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\} \quad \square$$

Теорема 3.9 (Интегральный признак сходимости).

$f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

И f монотонно убывает, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ и } \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Ведут себя одинаково.

Доказательство.

Из сходимости интеграла получим сходимость ряда.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \rightarrow L$$

$$\left| \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) \right| \leq \max\{f(1), f(n)\} \leq f(1)$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n f(k) \leq F(n) - F(1) + f(1)$$

Но т.к. $F(x)$ имеет предел, то правая часть ограничена.

А раз частичные суммы ограничены и слагаемые неотрицательны, то $\sum f(n)$ сходится.

Теперь из сходимости ряда получим сходимость интеграла.

$$\left| \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) \right| \leq \max\{f(1), f(n)\} \leq f(1)$$

$$F(n) \leq S_n + f(1) + F(1)$$

Т.к. S_n имеет предел, то ограничена, значит, $F(n)$ – ограниченная последовательность.

$$F(x) \leq F(\lfloor x \rfloor + 1) \leq M$$

$\implies F(x)$ монотонно возрастают и ограничены \implies предел есть.

\implies интеграл сходится. □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Если $p \leq 0$, то $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится

Если $p > 0$, то

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, монотонно убывает

Тогда по интегральному признаку

Смотрим на $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

А он сходится при $p > 1$.

Т.е. ряд сходится $\iff p > 1$

Следствие.

Если $a_n \geq 0$ и $a_n = O(\frac{1}{n^p})$, при $p > 1$, то ряд сходится.

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ монотонно убывает.

Можно смотреть на интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \infty$$

3.3. §2. Знакопеременные ряды

Определение 3.1.

$$z_n \in \mathbb{C}$$

$\sum \operatorname{Re} z_n$ $\sum \operatorname{Im} z_n$ – сходятся, то по определению сходится $\sum z_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

$S_n := \sum_{k=1}^n z_k$ если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд сходится и его сумма S .

Т.к. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Определение 3.2.

$\sum_{k=1}^{\infty} z_n$ – абсолютно сходится, если $\sum_{k=1}^{\infty} |z_n|$ сходится.

Свойства.

- $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то $\sum \alpha a_n + \beta b_n$ абсолютно сходится.
- $\sum z_n$ абсолютно сходится $\iff \sum \operatorname{Re} z_n, \sum \operatorname{Im} z_n$ абсолютно сходятся
- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то $|S| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Доказательство.

$$1. |\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha| |a_n| + |\beta| |b_n|$$

2. “ \implies ”

$$|\operatorname{Re} z_n| \leq |z_n|$$

$$|\operatorname{Im} z_n| \leq |z_n|$$

“ \Leftarrow ”

$$|z_n| \leq |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$$

$$3. |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

□

Теорема 3.10.

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.

$$(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$$

$$(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$$

$$a_n = (a_n)_+ - (a_n)_-$$

$$|a_n| = (a_n)_+ + (a_n)_-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

$\implies \sum (a_n)_+$ и $\sum (a_n)_-$ сходятся, т.к. все положительно.

\implies сходится и их разность, что есть $\sum a_n$

□

Упражнение. Доказать теорему с помощью критерия Коши.

Определение 3.3.

$\sum a_n$ – условно сходящийся, если он сходится, но не абсолютно.

Теорема 3.11 (Преобразование Абеля).

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{j=1}^n A_{j-1} b_j = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$

Заметим, что $A_0 = 0$,

$$= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Теорема 3.12 (Признак Дирихле).

$$1. \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M \text{ при всех } n \in \mathbb{N}$$

2. b_n монотонна

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$|A_n b_n| \leq M |b_n| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Осталось понять, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ – сходится.

Пусть b убывают.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M |b_k - b_{k+1}| = M \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$$

Заметим, что это сходится, т.к.

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \rightarrow b_1 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\implies \sum |A_k| |b_k - b_{k+1}| \text{ сходится} \implies \sum A_k (b_k - b_{k+1}) \text{ сходится.} \quad \square$$

Теорема 3.13 (Признак Абеля).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонна
3. $|b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Из этого всего следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Доказательство.

b_n монотонна и ограничена $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$

$\tilde{b}_n := b_n - b$ монотонна и стремится к 0.

$$\sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\implies \sum_{k=1}^n a_k \text{ ограничена}$$

Т.е. для a и \tilde{b} выполнено условие признака Дирихле.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_n + b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Первое слагаемое сходится по доказанному, второе слагаемое сходится по условию

Получаем, что и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. □

Определение 3.4.

Знакопередающийся ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad a_n \geq 0$$

Теорема 3.14 (Признак Лейбница).

Если a_n монотонно убывают и стремятся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Причем

$$S_{2n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq S_{2n+1}$$

Доказательство.

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$$

$$\text{Т.е. } 0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \dots$$

$$a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \dots + (-a_{2n} + a_{2n+1}) = S_{2n-1} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$$

$$\text{Т.е. } S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \dots$$

Получили последовательность вложенных отрезков.

$$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \dots$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$$

Тогда у них есть единственная точка пересечения и концы к ней стремятся.

Пусть S – та точка. Тогда

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$$

□

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

Если $p \leq 0$, то $\left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| \geq 1$ и $\not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$ $a_n := \frac{1}{n^p} \searrow 0 \implies$ ряд сходится

Пример (Ряд Лейбница).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n = \ln 2n + \gamma + o(1) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Пример.

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{\ln 2}{2}$$

Определение 3.5.

$\sum a_n$ и $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция.

$\sum a_{\varphi(n)}$ – перестановка ряда $\sum a_n$

Теорема 3.15.

Если ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, то $\sum a_{\varphi(n)}$ тоже абсолютно сходится, и сумма рядов одинакова.

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$$

$$\text{Случай 1. } a_n \geq 0 \quad S := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\tilde{S}_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \dots + a_{\varphi(n)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m = S_m \leq S$$

$$m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$$

$$\text{Т.е. } \tilde{S} \leq S \implies \text{ряд } \sum a_{\varphi(n)} \text{ сходится} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \leq S$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \leq S \implies \sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} \leq \sum a_{\varphi(n)} \leq S$$

$$\text{Но } \sum a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} = S$$

\implies сумма не поменялась.

$$\text{Случай 2. } a_n \in \mathbb{R} \quad \sum |a_n| \text{ сходится} \implies \sum (a_n)_{\pm} \text{ сходятся}$$

$$\sum (a_{\varphi(n)})_{\pm} \text{ сходятся и } \sum (a_{\varphi(n)})_{\pm} = \sum (a_n)_{\pm}$$

$$\implies \sum a_{\varphi(n)} = \sum (a_{\varphi(n)})_{+} - \sum (a_{\varphi(n)})_{-} \text{ сходится}$$

$$= \sum (a_n)_{+} - \sum (a_n)_{-} = \sum a_n$$

$$\text{Случай 3. } a_n \in \mathbb{C} \quad \sum |a_n| \text{ сходится} \implies |\operatorname{Re} a_n| \text{ и } |\operatorname{Im} a_n| \text{ сходятся.} \quad \square$$

Замечание.

$$1. a_n \geq 0 \text{ и } \sum a_n \text{ расходится}$$

$$\implies \sum a_{\varphi(n)} \text{ расходится.}$$

$$2. \sum a_n \text{ — условно сходится, то } \sum (a_n)_{+} \text{ и } \sum (a_n)_{-} \text{ расходятся.}$$

Доказательство. Обе эти штуки сходить не могли, иначе бы сошлась сумма модулей, т.е. тогда бы сошел модуль.

Ровно одна из них тоже сходить не могла. Т.к. иначе бы ряд $\sum a_n = \sum (a_n)_{+} - \sum (a_n)_{-}$ расходился. \square

Теорема 3.16 (Римана).

$$a_n \in \mathbb{R} \quad \sum a_n \text{ условно сходится.}$$

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует такая перестановка φ , что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$.

И существует такая перестановка φ , что частичные суммы ряда $\sum a_{\varphi(n)}$ вообще не имеют предела.

Доказательство.

Пусть $S \in \mathbb{R}$.

b_1, b_2, b_3, \dots — неотрицательные члены ряда в порядке их следования в $\{a_k\}$.

c_1, c_2, c_3, \dots — отрицательные члены ряда в порядке их следования в $\{a_k\}$.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ расходятся.

Более того, $\sum b_n = +\infty$ $\sum c_n = -\infty$

$$\sum a_n \text{ сходится} \implies a_n \rightarrow 0 \implies b_n \rightarrow 0, c_n \rightarrow 0$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > S \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1}$$

$$\begin{aligned}
 & b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} < S \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1-1} \\
 & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > S \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \\
 & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2} > S \geq \\
 \geq & b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + \dots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} + c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2-1}
 \end{aligned}$$

И так далее.

$$|S_{\dots} - S| \leq |\text{последнего взятого элемента}| \rightarrow 0$$

$$S = +\infty$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > 1 \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > 2 \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1}$$

И так далее. □

Теорема 3.17 (Коши).

$\sum a_n$ $\sum b_n$ – абсолютно сходятся.

$$A := \sum a_n, \quad B := \sum b_n$$

Тогда ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\tilde{A}_n := \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \tilde{B}_n := \sum_{k=1}^n |b_k|$$

$$\tilde{A} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \tilde{B} := \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

\tilde{S}_m – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

Рассмотрим \tilde{S}_m и пусть l – наибольший номер, встречающийся в индексах из суммы \tilde{S}_m

$$\tilde{S}_m \leq \sum_{j,k=1}^l |a_j| |b_k| = \sum_{j=1}^l |a_j| \sum_{k=1}^l |b_k| = \tilde{A}_l \tilde{B}_l \leq \tilde{A} \tilde{B} < +\infty$$

Частичные суммы \tilde{S}_m ограничены \implies ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д.

S_m – частичная сумма такого ряда

$$S_{n^2} = \sum_{j,k=1}^n a_j b_k = A_n B_n \rightarrow AB$$

Пусть $n^2 \leq m \leq (n+1)^2$

$$S_m = S_{n^2} + \sum_{k=1}^{\dots} a_{n+1} b_k + \sum_{k=n}^{\dots} a_k b_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_{n+1}| |b_k| + \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n+1}| = |a_{n+1}| \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}| \tilde{A}_n \leq |a_{n+1}| \tilde{B} + |b_{n+1}| \tilde{A} \rightarrow 0$$

$$\implies S_n \rightarrow AB$$

□

Определение 3.6.

$$\sum a_n \text{ и } \sum b_n$$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \dots + a_nb_1$

Замечание.

Пояснение, почему именно такое:

$$\sum_{k=1}^n a_k t^k \sum_{k=1}^n b_k t^k = \sum_{k=1}^{2n-1} c_k t^{k+1}$$

Посмотрим, как выглядят c_k при $k \leq n$:

$$c_k = a_1b_k + a_2b_{k-1} + a_3b_{k-2} + \dots + a_k b_1$$

Теорема 3.18 (Мертенса).

$\sum a_n$ абсолютно сходится, $\sum b_n$ сходится

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (произведение рядов) сходится и его сумма равна AB .

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот вам несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок.
2. Просто сходимости рядов не хватает.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \\ c_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + \dots + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} = \\ &= (-1)^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) \\ & n-1 \text{ слагаемых} \\ & \frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \geq \frac{1}{n-1} \\ & |c_{n-1}| \geq 1 \implies \text{ряд } \sum c_n \text{ расходится.} \end{aligned}$$

Теорема 3.19 (Абеля).

$$\sum a_n = A, \quad \sum b_n = B, \quad \sum c_n = C$$

И $\sum c_n$ – произведение $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Тогда $AB = C$.

Лемма.

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \dots + x_ny_1}{n} \rightarrow xy$$

Доказательство.

Пусть $y = 0$. надо доказать, что $\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \dots + x_ny_1}{n} \rightarrow 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа M , что $|x_n| \leq M \quad |y_n| \leq M \quad \forall n$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n \geq N \quad |y_n| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N$.

$$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + \dots + |x_ny_1|$$

Первые $n - N$ слагаемых оценим сверху, как $(n - N)M\varepsilon$. Оставшиеся оценим как $\leq M^2N$

$$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + \dots + |x_ny_1| \leq M\varepsilon(n - N) + M^2N$$

$$\left| \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1}{n} \right| \leq \frac{M\varepsilon(n-N) + M^2N}{n} < \varepsilon M + \varepsilon M$$

(Последнее – при достаточно больших n).

Пусть $y_n = y$

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} y \rightarrow xy$$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$$\tilde{y}_n := y_n - y \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1\tilde{y}_n + x_2\tilde{y}_{n-1} + \dots + x_n\tilde{y}_1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1y + x_2y + \dots + x_ny}{n} \rightarrow xy$$

И сложим. Получим ровно то, что надо. □

Доказательство. (теоремы)

$$\frac{A_1B_n + A_2B_{n-1} + \dots + A_nB_1}{n} \rightarrow AB \text{ по лемме.}$$

Но что же написано в числителе?

$$\begin{aligned} & a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b_1 = \\ & = na_1b_1 + (n - 1)(a_1b_2 + a_2b_2) + (n - 2)(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots = \\ & = nc_1 + (n - 1)c_2 + (n - 2)c_3 + \dots + c_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n \end{aligned}$$

Получается, что знаем, что $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow AB$

Но с другой стороны, $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C$

$$\implies C = AB$$
□

3.4. §3. Бесконечные произведения

Определение 3.7.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$P_n := \prod_{k=1}^n p_k - \text{частичные произведения.}$$

Если $\exists P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

1. $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$

$$P_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdot \dots \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

2. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2})$

$$P_n = (1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{6^2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n)!!)^2} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}, \text{ при } 0 < x < 1$$

Свойства.

Считаем, что $p_n \neq 0 \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ - сходится } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

Доказательство.

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$$

□

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ и } p_n > 0 \forall n$$

$$\text{Тогда } \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится } \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

$$\ln P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n p_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln p_k =: S_n$$

$$S_n \text{ имеет предел } \iff \ln P_n \text{ имеет предел } \iff P_n \text{ имеет предел.}$$

□

Пример.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}, \text{ где } p_n \text{ - } n\text{-ое простое число.}$$

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$$P_n = \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geq \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

Вывод: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится.

Более того $P_n \geq \ln n + o(1)$

Теорема 3.20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ расходится, где } p_n \text{ - } n\text{-ое простое число.}$$

Доказательство.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} \text{ расходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right) - \text{расходится}$$

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq$$

$$-2t \leq \ln(1-t) \text{ при достаточно малых } t.$$

$$\leq -2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} \leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

$$\implies \sum \frac{1}{p_n} \text{ расходится.}$$

□

Замечание.

На самом деле

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$$

3.5. §4. Функциональные последовательности и ряды.

Определение 3.8.

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

f_n поточечно сходится к f на множестве E , если $\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

Определение 3.9.

f_n равномерно сходится к f на множестве E .

$f_n \rightrightarrows f$ на E .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Замечание (переформулировка).

Поточечная

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Пример.

$$f_n(x) = x^n \quad E = (0, 1)$$

$f \equiv 0$ f_n сходится к f поточечно.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in (0, 1) \quad x^n < \varepsilon$ – выполняться не будет уже при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, значит, равномерной сходимости нет.

Замечание.

Если $f_n \rightrightarrows f$ на E , то f_n поточечно сходится к f на E .

Теорема 3.21.

$f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что это:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

“ \Leftarrow ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Но } \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)| \quad \forall x \in E$$

□

Следствие.

$$1. |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на E .

$$2. \text{ Если } \exists x_n \in E, \text{ т.ч. } f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0, \text{ то } f_n \not\rightrightarrows f$$

Доказательство.

$$1. \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$2. \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

□

Пример.

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \neq 0$$

Определение 3.10.

$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – равномерно ограничена, если

$$\exists M \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq M$$

Теорема 3.22.

f_n равномерно ограничена, $g_n \rightrightarrows 0$ на E ($f_n, g_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$)

Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство.

$$\sup_{x \in E} |g_n(x)| \rightarrow 0$$

$$|f_n(x)g_n(x)| \leq M |g_n(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)g_n(x)| \leq M \cdot \sup_{x \in E} |g_n(x)| \rightarrow 0$$

□

Теорема 3.23 (критерий Коши).

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

f_n равномерно сходится на E к некоторой функции \iff

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

“ \implies ”

Пусть $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > N \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

“ \impliedby ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Зафиксируем $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

$f_n(x)$ – фундаментальная последовательность, тогда у нее есть предел.

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$\implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (т.к. } f_m(x) \rightarrow f(x))$$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \text{ на } E. \quad \square$$

Определение 3.11.

$$E \quad l^\infty(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

т.е. это ограниченные функции

$$\|f\|_{l^\infty(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

Покажем неравенство треугольника:

$$\|f + g\|_{l^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| = \|f\|_{l^\infty(E)} + \|g\|_{l^\infty(E)}$$

$$\|g\|_{l^\infty(E)}$$

$$f_n \rightrightarrows f \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Заметим, что это равносильно сходимости f_n к f в нормированном пространстве (по нашей же норме).

Теорема 3.24.

$l^\infty(E)$ – полное.

Доказательство.

Пусть f_n фундаментальная последовательность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} < \varepsilon$$

$$\text{Но } \|f_n - f_m\|_{l^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)| \quad \forall x \in E$$

$$\implies \text{по критерию Коши } f_n \rightrightarrows f, \text{ где } f \text{ – некоторая функция : } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Осталось понять, что $f \in l^\infty(E)$, т.е. что f – ограниченная функция.

$$\varepsilon = 1 \exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < 1$$

Зафиксируем n .

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x)| + 1 \leq \|f_n\| + 1 \quad \square$$

Теорема 3.25.

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E
 $\implies f$ непрерывна в точке a .

Доказательство.

Если a не предельная точка в E , то все функции там непрерывны.

Пусть a – предельная точка множества E .

Тогда надо проверить, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

По определению равномерной сходимости $\exists N \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a .

$$\exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \quad |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Если $|x - a| < \delta$ и $x \in E$, то

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \square$$

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f \in C(E)$.

Определение 3.12.

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ непрерывные}\}$

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|.$$

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 3.26.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X$ Y – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y .

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$

$\implies x$ – предельная точка множества Y .

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\implies x_n$ сходится к x в пространстве Y . □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, где $f_n \in C(K)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

Определение 3.13.

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ – частичная сумма.}$$

Если S_n поточечно сходится к S , то ряд поточечно сходится, если $S_n \rightrightarrows S$, то ряд равномерно сходится.

Определение 3.14.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x) \text{ – остаток функции ряда.}$$

Теорема 3.27.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$$\iff r_n \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – равномерно сходится } \iff S_n \rightrightarrows S \text{ на } E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0 \quad \square$$

Теорема 3.28 (Критерий Коши).

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на E

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = |S_{n+p} - S_n| \quad \square$$

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E |u_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

Это определение равномерной сходимости $u_n \rightrightarrows 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\rightarrow 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n} - \text{расходится.}$$

Теорема 3.29 (признак сравнения).

$$u_n, v_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

$$|u_n(x)| \leq v_n(x) \quad \forall x \in E \text{ и } \sum v_n(x) \text{ равномерно сходится на } E.$$

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E .

Доказательство.

$$\sum v_n(x) \text{ равномерно сходится на } E \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right|$$

$$\implies \text{выполнен критерий Коши для } \sum u_n(x)$$

$$\implies \sum u_n(x) \text{ равномерно сходится на } E \quad \square$$

Следствие (Признак Вейерштрасса).

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } |u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in E$$

и $\sum c_n$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E .

Доказательство.

$$v_n(x) := c_n \implies \sum v_n(x) \text{ равномерно сходится} \quad \square$$

Следствие.

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } \sum |u_n(x)| - \text{равномерно сходится на } E.$$

Тогда $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на E .

Доказательство.

$$v_n(x) := |u_n(x)| \quad \square$$

Пример.

Покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится.

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Но знаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Тогда по признаку Вейерштрасса исходная сумма равномерно сходится.

Теорема 3.30 (Признак Дирихле).

$$a_n, b_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$1. \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K \quad \forall n \quad \forall x \in E$$

$$2. b_n \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

3. При любом фиксированном $x \in E$ $b_n(x)$ монотонно по n .

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E .

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

$$A_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$$

Надо доказать, что эта сумма равномерно сходится.

Заметим, что A_n равномерно ограничена, а $b_n \rightrightarrows 0$, тогда по уже доказанному:

$$\implies A_n(x)b_n(x) \rightrightarrows 0$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \stackrel{?}{\rightrightarrows}$$

Т.е. надо доказать, что $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ равномерно сходится.

А для этого достаточно доказать, что $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))|$ равномерно сходится.

$$\sum_{k=1}^n |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leq K \sum_{k=1}^n |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = K \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| = K |b_1(x) - b_{n+1}(x)|$$

Получили, что $\sum_{k=1}^n K |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ равномерно сходится к $K |b_1(x)|$

$$\implies \sum_{k=1}^n |A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \text{ равномерно сходится.} \quad \square$$

Следствие (Признак Лейбница).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$$

$$b_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $b_n(x)$ монотонная по n при любом фиксированном $x \in E$

2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E .

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ равномерно сходится на E .

Доказательство.

$$a_n := (-1)^{n-1}$$

$$\text{Заметим, что тогда } A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & n - \text{нечетно} \\ 0 & n - \text{четно} \end{cases}$$

Т.е. A_n равномерно ограничены.

$$\implies \text{по признаку Дирихле равномерно сходится.} \quad \square$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad x \in (0, 1)$$

Равномерно сходится по признаку Лейбница $\frac{x^n}{n} \searrow \quad \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\implies \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ сходитсся по признаку Коши } \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} \rightarrow x < 1$$

\implies ряд абсолютно сходитсся.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ не сходитсся равномерно.}$$

По критерию Коши:

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} > \frac{1}{2} \text{ при } x \text{ близких к } 1.$$

(Т.к есть строгая оценка на $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 + o(1) > \frac{1}{2}$, плюс пользуемся непрерывностью)

Теорема 3.31 (Признак Абеля).

$$a_n, b_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

1. $\sum_{k=1}^n a_k(x)$ равномерно сходитсся
2. $|b_n(x)| \leq K \quad \forall x \in E \quad \forall n.$
3. При любом фиксированном $x \in E$ $b_n(x)$ монотонно по $n.$

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ сходитсся равномерно на $E.$

Доказательство.

Критерий Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Напишем для $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)$ преобразование Абеля.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) &= \sum_{k=1}^p a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) = \\ &= (A_{n+p}(x) - A_n(x))b_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \end{aligned}$$

$$|(A_{n+p}(x) - A_n(x))b_{n+p}(x)| \leq K |A_{n+p}(x) - A_n(x)| = K \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходитсся} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$$

Выбираем N и $\forall n > N \implies$ первое слагаемое $< K\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}(x) - A_n(x)| |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| < \\ < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)| = \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) \right| &= \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)| \leq 2K\varepsilon \end{aligned}$$

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < K\varepsilon + 2K\varepsilon = 3K\varepsilon$$

Проверили критерий Коши, получили равномерную сходимость. □

3.6. §5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 3.32.

$$f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

a – предельная точка множества E .

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E.$$

$$\text{И } b_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Тогда пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существуют и равны.

$$\text{Т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Доказательство.

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E$$

\implies по Критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

– верно для любого x , значит верно в том числе и при $x \rightarrow a$.

Переходя к пределу, получаем такое:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N |b_n - b_m| \leq \varepsilon$$

– критерий Коши для последовательности $\{b_n\} \implies$ существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Функции g_n непрерывны в точке a .

$$g_n \rightrightarrows g \text{ на } E \cup \{a\}$$

$\implies g$ непрерывна в точке a

$$\implies b = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

□

Следствие.

$$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывна и } f_n \rightrightarrows f \text{ на } (a, b)$$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a, b]$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ нет равномерной сходимости на } (0, 1)$$

От противного. Пусть есть равномерная сходимость на таком промежутке. Тогда есть и на $[0, 1]$.

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{сходится. Получили противоречие.}$$

Теорема 3.33.

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ } a \text{ предельная точка } E \text{ } b_n := \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \text{равномерно сходится. Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится.}$$

$$\text{И } \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow B_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n \text{ при } x \rightarrow a.$$

$$S_n \rightrightarrows S := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Тогда по предыдущей теореме $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{x \rightarrow a} S(x)$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \square$$

Следствие.

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

u_n непрерывная в точке a .

И $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится

$$\implies \sum u_n(x) \text{ непрерывная в точке } a.$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \quad \square$$

Теорема 3.34.

$$f_n \in C[a, b] \quad f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a, b] \quad c \in [a, b]$$

Тогда $\int_c^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x f(t) dt$ равномерно по $x \in [a, b]$

$$\text{В частности, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

Доказательство.

$$\left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| = \left| \int_c^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon(b-a)$$

$$f_n \rightrightarrows f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall t \in [a, b] \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \square$$

Следствие.

$u_n \in [a, b] \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt \text{ равномерно сходится к } \int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

$$\text{В частности, } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

Доказательство.

$$\text{Теорема для } f_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \square$$

Пример.

То, что стремится равномерно – важно:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \text{ на } [0, 1]$$

$f_n(x) \rightarrow 0$ при всех $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-nx^2}}{2} \right|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Теорема 3.35.

$f_n \in C^1[a, b]$ f'_n равномерно сходятся к g .

$f_n(c) \rightarrow A$ $c \in [a, b]$

Тогда f_n равномерно сходится на $[a, b]$. Если f – предельная функция, то $f' = g$.

Т.е. в частности

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

Доказательство.

$$\int_c^x g(t) dt \Leftarrow \int_c^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(c)$$

$$f'_n \Rightarrow g$$

$$f_n(x) = (f_n(x) - f_n(c)) + f_n(c) \Rightarrow \int_c^x g(t) dt + A = f(x)$$

$$\Rightarrow f' = g$$

□

Следствие.

$u_n \in C'[a, b]$ $c \in [a, b]$ $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится.

$\sum u_n(c)$ сходится. Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Доказательство.

$$f_n := \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

□

Пример.

Равномерная сходимость ряда производной важна:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\right)' \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \text{ – расходитя при } x = 2\pi k$$

Т.е. равенства нет.

3.7. §6. Степенные ряды

Определение 3.15.

Степенной ряд с центром в z_0 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

$$w := z - z_0$$

Степенной ряд с центром в 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

Теорема 3.36.

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0$.

Тогда он сходится при $\forall |z| < |z_0|$

Доказательство.

$\sum a_n z_0^n$ сходится $\implies a_n z_0^n \rightarrow 0$

$\implies a_n z_0^n$ – ограничена, т.е. $|a_n z_0^n| \leq M$

$\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ – абсолютно сходится.

$\left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ – геометрическая прогрессия с основанием $< 1 \implies$ сходится. \square

Следствие.

$\sum a_n z^n$ расходится при $z = z_0$, то он расходится и при $|z| > |z_0|$

Доказательство.

От противного. \square

Определение 3.16.

Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ – такое $R \in [0, +\infty]$, что ряд сходится при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$

Круг сходимости – круг радиуса R с центром в точке z_0 .

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, +\infty)$

Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство.

$A := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $B := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ $C := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$

Надо доказать, что $AB = C$

“ \leq ”

B – верхний предел $\implies \exists n_1, n_2, \dots$, т.ч. $y_{n_k} \rightarrow B$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = AB$

AB – частичный предел $x_n y_n$

C – верхний предел = наибольший из частичных

$AB \leq C$

“ \geq ”

C – верхний предел.

$\implies \exists n_1, n_2, \dots$ $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C$

$C = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k} \implies \frac{C}{A} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k}}{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$

$\frac{C}{A}$ – частичный предел для y_n

B – верхний предел = наибольший из частичных.

$\frac{C}{A} \leq B$ \square

Замечание.

$$\overline{\lim} x_n y_n \neq \overline{\lim} x_n \overline{\lim} y_n$$

$$x_n = \begin{cases} 0 & n - \text{четно} \\ 1 & n - \text{нечетно} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 1 & n - \text{четно} \\ 0 & n - \text{нечетно} \end{cases}$$

$$x_n y_n \equiv 0$$

$$\overline{\lim} x_n = \overline{\lim} y_n = 1$$

Теорема 3.37 (Формула Коши-Адамара).

Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует и равен $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Доказательство.

Применим признак Коши к ряду.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{Ряд сходится, если } |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |z| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\text{Ряд расходится, если } |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \iff |z| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\implies |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |z| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R - \text{ радиус сходимости.} \quad \square$$

Замечание.

Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно.

Пример.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{1}{n/e} = \frac{e}{n} \rightarrow 0$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad R = 0$$

Замечание.

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ и они равны.

$$\implies \text{если } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ то } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Теорема 3.38.

R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

и $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leq r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

Вспомним, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ – сходится абсолютно.

Если $|z| \leq r$, то

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$$

\implies по признаку Вейерштрасса будет равномерная сходимость. \square

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости.

Доказательство.

$$|z_0| < R$$

И берем $r : |z_0| < r < R$

Ряд равномерно сходится в круге $|z| < r$

\implies его сумма непрерывна в круге $|z| < r$

\implies непрерывна в точке z_0 (т.к. это внутренняя точка круга) □

Теорема 3.39 (Абеля).

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и R – его радиус сходимости.

Если он сходится при $z = R$, то он равномерно сходится на $[0, R]$.

В частности, существует $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (равномерно, т.к. от x не зависит)

$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает при любом фиксированном x .

$$0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$$

\implies по признаку Абеля ряд сходится равномерно.

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на $[0, R]$. □

Лемма.

Радиусы сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ одинаковы.

Доказательство.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

□

Теорема 3.40.

R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$$\text{Тогда } \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

$$|x - x_0| < R$$

Доказательство.

$$r := |x - x_0| < R.$$

В круге $|t - x_0| \leq r$ ряд сходится равномерно.

Тогда можно менять местами \int и \sum □

Определение 3.17.

$$f : E \rightarrow \mathbb{C} \quad E \subset \mathbb{C}$$

$$a \in \text{Int } E$$

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Определение 3.18.

$$f : E \rightarrow \mathbb{C} \quad E \subset \mathbb{C}$$

$$a \in \text{Int } E$$

f – комплексно дифференцируема в точке a .

Если $\exists k \in \mathbb{C}$

$$f(z) = f(a) + k(z - a) + o(z - a) \text{ при } z \rightarrow a$$

Замечание.

$$k = f'(a)$$

И существование производной равносильно дифференцируемости.

Теорема 3.41.

R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z)$

$$\text{Тогда } f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\dots(n-m+1)(z - z_0)^{n-m}$$

При $|z - z_0| < R$

Доказательство.

Докажем для $m = 1$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Берем $r : |z - z_0| < r < R$

Знаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ сходится в круге $|z - z_0| < R$.

\implies он равномерно сходится в круге $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} = \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1}) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{w \rightarrow z} (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \end{aligned}$$

Осталось проверить равномерную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1})$ при $|w| \leq r$

$|a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1})| \leq |a_n| n r^{n-1}$ такой ряд сходится (т.к. по доказанной выше лемме радиус сходимости такого ряда такой же, как у исходного).

Пользуемся признаком Вейерштрасса.

Для $m = 1$ показали. А дальше по индукции.

При дифференцировании радиус сходимости не меняется

$$f''(z) = (f'(z))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

И так далее...

□

Теорема 3.42 (о единственности разложения функции в степенной ряд).

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ в круге $|z - z_0| < R$

Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n (z - z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 a_m = m! a_m$$

□

Определение 3.19.

Ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Пример.

Бесконечно дифференцируемости не достаточно для того, чтобы функция разложилась в ряд Тейлора:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Если она бесконечно дифференцируема в нуле, то все ее производные $f^{(n)}(0) = 0$

\implies ряд Тейлора $\equiv 0$.

$$(e^{-1/x^2})' = e^{-1/x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3}$$

$(\dots)' = e^{-1/x^2} (\dots)$ – в скобочках – какая-то рациональная функция.

Такого же вида и останется.

Т.е. все производные устроены одинаково

$$(e^{-1/x^2})^{(n)} = e^{-1/x^2} \cdot \text{рациональная функция} = e^{-1/x^2} P_n(x)$$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} P_n(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \cdot \text{рациональная функция} = 0.$$

3.7.1. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Уже знаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$:

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Определение 3.20.

Определим все для комплексных чисел:

$x \in \mathbb{C}$:

$$1. e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$2. \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$3. \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Утверждение 3.43 (Формула Эйлера).

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad z \in \mathbb{C}$$

Упражнение:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Продолжим про то, что знаем (или почти знаем)

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad x \in (-1, 1)$$

$$5. \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1, 1)$$

Доказательство.

$$4. \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{при } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$5. \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

$$6. (1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n =: S(x) \quad \text{при } x \in (-1, 1)$$

Доказательство.

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p(p-1)\dots(p-n+1) \cdot (n+1)!}{n! \cdot p(p-1)\dots(p-n+1)(p-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(p-n)} \right| = 1$$

Хотим доказать, что $S(x) = (1+x)^p$ при $x \in (-1, 1)$

$$f(x) := \frac{S(x)}{(1+x)^p} \quad \text{при } x \in (-1, 1)$$

$$f(0) = 1$$

Надо доказать, что $f'(x) \equiv 0$

$$f'(x) = S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1}(S'(x)(1+x) - pS(x))$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \cdot x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \cdot x^n$$

$$(1+x)S'(x) = S'(x) + xS'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!} x^n \stackrel{?}{=} pS(x)$$

Смотрим на коэффициент при x^n

Слева - $\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(n-1)!}$

Справа - $p \cdot \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}$

$$p(p-1)\dots(p-n) + p(p-1)\dots(p-n+1) \cdot n = p \cdot p(p-1)\dots(p-n+1)$$

$$(p-n) + n = p - \text{действительно.} \quad \square$$

6'. Частный случай $p = -\frac{1}{2}$

$$p(p-1)\dots(p-n+1) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n} = (-1)^n (2n-1)!! \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$$

$$7. \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \square$$

4. 8. Функции многих переменных

4.1. §1. Дифференцируемость отображений

Определение 4.1.

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad a \in \text{Int } E$$

f – дифференцируема в точке a , если существует такое линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \text{ при } h \rightarrow 0$$

Запись $g(h) = o(\|h\|)$ означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{\|h\|} = 0$$

T – дифференциал $d_a f$

Замечание.

T определено однозначно.

Зафиксируем $h \in \mathbb{R}^n$. Будем перебирать $t \in \mathbb{R}$.

$$f(a + th) = f(a) + T(th) + o(\|th\|) = f(a) + t \cdot T(h) + o(|t| \cdot \|h\|)$$

$$f(a + th) = f(a) + t \cdot Th + o(t)$$

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = Th + o(1)$$

$$\implies Th = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

Определение 4.2.

Матрица отображения T размера $n \times m$ – матрица Якоби. Обозначать ее будем $f'(a)$

Замечание.

Если f дифференцируема в точке a , то f непрерывна в точке a .

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a)$$

Важный частный случай $m = 1$.

$$f(a + h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$$

Тогда $\exists v \in \mathbb{R}^n$ такое, что $Th = \langle v, h \rangle$, т.е.:

$$f(a + h) = f(a) + \langle v, h \rangle + o(\|h\|)$$

v – градиент функции f в точке a .

$\text{grad } f$ или ∇f

Пример дифференцируемых функций.

- $f(x) \equiv \text{const}$

$$f(a + h) = f(a) + 0 \cdot h + 0$$

- f – линейно отображение

$$f(a + h) = f(a) + f(h) + 0$$

$$d_a f = f$$

$f'(a)$ – матрица линейного отображения f .

Замечание.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad f_k : E \rightarrow \mathbb{R} - \text{координатные функции.}$$

Теорема 4.1.

f – дифференцируема в точке $a \iff f_k$ – дифференцируема в точке $a \quad \forall k = 1 \dots m$

Доказательство.

“ \implies ”

$$f(a+h) = f(a) + Th + o(\|h\|)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 h \\ T_2 h \\ \vdots \\ T_m h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix} = o(\|h\|) \iff \frac{\sqrt{g_1(h)^2 + \dots + g_m(h)^2}}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{g_1(h)}{\|h\|} \\ \frac{g_2(h)}{\|h\|} \\ \vdots \\ \frac{g_m(h)}{\|h\|} \end{pmatrix} \rightarrow 0 \iff \frac{g_k(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \forall k = 1 \dots m$$

$$f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + g_k(h)$$

\implies k -ая координата дифференцируема в точке a .

“ \impliedby ”

Все рассуждения, которые мы провели, обращаются назад. □

Следствие.

Строки матрицы Якоби – градиенты координатных функций.

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

Определение 4.3.

Производная по направлению.

$$\|h\| = 1$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ – производная функции f в точке a по направлению h .

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

Замечание.

$$g(t) = f(a+th) \quad \frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$$

Теорема 4.2.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

f – дифференцируема в точке a , $\|h\| = 1 \quad h \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Тогда } \frac{\partial f}{\partial h}(a) = (d_a f)(h) = \langle \text{grad } f, h \rangle$$

Доказательство.

$$f(a + th) = f(a) + t \cdot d_a f(h) + o(t) \quad t \rightarrow 0$$

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = d_a f(h) + o(1)$$

Переходим к $\lim_{t \rightarrow 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h)$$

□

Следствие 1. Экстремальное свойство градиента.

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E \quad f$ – дифференцируема в точке a .

Тогда $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad \|h\| = 1$

$$-\|\text{grad}_a f\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\text{grad}_a f\|$$

Причем равенство $\iff h = \pm \frac{\text{grad}_a f}{\|\text{grad}_a f\|}$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \text{grad}_a f, h \rangle$$

$|\langle \text{grad}_a f, h \rangle| \leq \|\text{grad}_a f\| \cdot \|h\| = \|\text{grad}_a f\|$ – неравенство Коши-Буняковского

Но равенство достигается $\iff h$ и $\text{grad}_a f$ пропорциональны.

□

Определение 4.4.

$$e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Частная производная по k -й координате

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k} := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_k)$$

$$f(x + te_k) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_k + t) - g(x_k)}{t} = g'(x_k)$$

Следствие 2.

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \text{grad}_a f, e_k \rangle$ – k -ая координата градиента

$$\text{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Следствие 3.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } a \quad f$ дифференцируема в точке a .

То

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Пример.

$$f(x, y) = x^y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Теорема 4.3 (линейность дифференцирования).

$$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

f, g – дифференцируемы в точке a , $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$f \pm g, \lambda f$ – дифференцируемы в точке a

$$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$$

Доказательство.

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(\|h\|)$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(\|h\|)$$

□

Теорема 4.4 (дифференцирование композиции).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad g : E \rightarrow \mathbb{R}^l \quad E \subset \mathbb{R}^m$$

$$a \in \text{Int } D \quad f(a) \in \text{Int } E \quad f(D) \subset E$$

Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$$

Замечание.

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство.

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\| \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$b := f(a) \quad g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| \quad \|k\| \rightarrow 0$$

$$k := d_a f(h) + \alpha(h)\|h\|$$

$$\|k\| \leq \|d_a f(h)\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \leq \|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a) + k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| = \\ &= g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| = \\ &= g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| \end{aligned}$$

Хотим показать, что $d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| = o(\|h\|)$

$$d_b g(\alpha(h)\|h\|) = \|h\| \cdot d_b g(\alpha(h))$$

$$\|d_b g(\alpha(h)\|h\|)\| \leq \|h\| \cdot \|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\|, \text{ а } \|d_b g\| \cdot \|\alpha(h)\| \rightarrow 0$$

$$\|\beta(k)\| \|k\| = \|k\| \cdot \|\beta(k)\| \leq \|\beta(k)\| (\|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\|) = \|h\| \cdot \|\beta(k)\| (\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|).$$

А $\|\beta(k)\| (\|d_a f\| + \|\alpha(h)\|) \rightarrow 0$.

Все получили. □

Теорема 4.5 (о дифференцировании произведения скаляра и векторной функции).

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$$

f и λ – дифференцируемы в точке a , тогда λf – дифференцируема в точке a .

$$d_a(\lambda f) = d_a \lambda f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f$$

Доказательство.

$$\lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a+h)(f(a+h) - f(a)) + (\lambda(a+h) - \lambda(a))f(a) =$$

$$\begin{aligned}
 f(a+h) - f(a) &= d_a f(h) + o(\|h\|) \\
 \lambda(a+h) - \lambda(a) &= d_a \lambda(h) + o(\|h\|) \\
 &= \lambda(a+h)(d_a f(h) + o(\|h\|)) + (d_a \lambda(h) + o(\|h\|))f(a) = \\
 &= (\lambda(a) + d_a \lambda(h) + o(\|h\|))(d_a f(h) + o(\|h\|)) + (d_a \lambda(h) + o(\|h\|))f(a) = \\
 &= \lambda(a)d_a f(h) + d_a \lambda(h)f(a) + \lambda(a)o(\|h\|) + d_a \lambda(h) \cdot o(\|h\|) + \\
 &+ o(\|h\|) \cdot o(\|h\|) + d_a \lambda(h)d_a f(h) + o(\|h\|)d_a f(h) + o(\|h\|)f(a)
 \end{aligned}$$

Про последние шесть слагаемых хотим сказать, что они $o(\|h\|)$.

Самое не очевидное –

$$\|d_a \lambda(h) \cdot d_a f(h)\| = |d_a \lambda(h)| \|d_a f(h)\| \leq \|d_a \lambda\| \cdot \|h\| \cdot \|d_a f\| \cdot \|h\| = \text{const} \cdot h^2 = o(h) \quad \square$$

Теорема 4.6 (о дифференцировании скалярного произведения).

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E \quad f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$$

f, g – дифференцируемы в точке a .

Тогда $\langle f, g \rangle$ – дифференцируема в точке a и:

$$d_a \langle f, g \rangle (h) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle$$

Доказательство.

$$F := \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^m f_k g_k$$

$d_a(f_k g_k) = d_a f_k \cdot g_k(a) + f_k(a) d_a g_k$ – частный случай предыдущей теоремы.

$$dF = \sum_{k=1}^m d_a(f_k g_k) = \sum_{k=1}^m (d_a f_k g_k(a) + f_k(a) d_a g_k)$$

$$dF(h) = \sum_{k=1}^m d_a f_k(h) g_k(a) + \sum_{k=1}^m f_k(a) d_a g_k(h) = \langle d_a f(h), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(h) \rangle \quad \square$$

Замечание.

Частный случай, когда $n = 1$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix}$$

$$(\langle f(x), g(x) \rangle)' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$$

Теорема 4.7 (Лагранжа для векторзначных функций).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ f – непрерывна на всем отрезке, дифференцируема на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(t) = \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Напишем одномерную теорему Лагранжа для φ

$$\exists c \in (a, b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle \leq \|f'(t)\| \cdot \|f(b) - f(a)\|$$

Тогда

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi'(c)(b - a) \leq \|f'(c)\| \cdot \|f(b) - f(a)\|(b - a)$$

Теперь можем сократить на $\|f(b) - f(a)\|$ и получить нужное неравенство (если $\|f(b) - f(a)\| = 0$, то теорема очевидна)

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = (b - a) \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle \quad \square$$

Замечание.

Равенства может не быть ни в какой точке c .

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\|f(2\pi) - f(0)\| = 0 < 2\pi = (2\pi - 0)\|f'(t)\|$$

4.2. §2. Непрерывная дифференцируемость

Теорема 4.8.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

И у функции f в точке a существуют все частные производные и они непрерывны.

Тогда функция f дифференцируема в точке a .

Доказательство.

$$R(h) = f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k \stackrel{?}{=} o(\|h\|)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

$$b_0 := a$$

$$b_1 := (a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$b_2 := (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n)$$

...

$$b_n := (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$$

$$F_k(t) := f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + th_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$$

Заметим, что $F_k(1) = F_{k+1}(0)$, и что $F_{n-1}(1) = f(a + h)$, а $F_0(0) = f(a)$.

Тогда:

$$f(a + h) - f(a) = F_{n-1}(1) - F_0(0) = F_0(1) - F_0(0) + F_1(1) - F_1(0) + \dots + F_{n-1}(1) - F_{n-1}(0)$$

$$F_k(1) - F_k(0) = F'_k(\theta_k) \theta_k \quad \theta_k \in (0, 1)$$

$$F_k(1) - F_k(0) = F'_k(\theta_k) = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_{k+1}) \cdot h_{k+1}, \text{ где } e_k - \text{вектор с единичкой на месте } k.$$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(b_k + h_{k+1}\theta_k e_{k+1}) h_{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k \theta_{k-1} e_k) h_k$$

$$R(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + h_k \theta_{k-1} e_k) h_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1} h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) h_k$$

$$\|R(h)\| \leq \|h\| \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + \theta_{k-1} h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Второй множитель стремится к 0 при $h \rightarrow 0$.

(Т.к. тогда $b_{k-1} + \theta_{k-1} h_k e_k \rightarrow a$) □

Замечание.

Обратное неверно. Дифференцируемость не дает непрерывности частных производных и даже существование в окрестности.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{если ровно одно из чисел рационально} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

f – дифференцируема в нуле.

$$f(x, y) = f(0, 0) + 0 + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Но f даже не будет непрерывна в точках, отличных от $(0, 0)$.

Определение 4.5.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } D$$

f – непрерывно дифференцируема в точке a , если

f дифференцируема в окрестности точки a и $d_x f$ непрерывна в точке a .

(т.е. $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$)

Теорема 4.9.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a .

Доказательство.

“ \implies ”

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = d_x f_j(e_k)$$

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right| = |d_x f_j(e_k) - d_a f_j(e_k)| = |(d_x f_j - d_a f_j)(e_k)| \leq \|d_x f_j - d_a f_j\| \leq$$

$$\leq \|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$$

“ \impliedby ”

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0$$

□

4.3. §3. Частные производные высших порядков.

Определение 4.6.

$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D$ – открытое множество.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$$

Пример.

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$$

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4 - y^4) - 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Но в силу антисимметричности x и y .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

Теорема 4.10.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in \text{Int } E$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в точке (x_0, y_0)

$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Доказательство.

$$\Delta := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

$$\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$$

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$$

Применяем теорему Лагранжа для одномерного случая:

$$\Delta = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \theta_1 \in (0, 1)$$

$$\Delta = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right) = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0)) =$$

$$= hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$$

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$$

$$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

Получили, что

$$\Delta = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

(Последнее – в силу непрерывности этих производных, устремили $h, k \rightarrow 0$)

□

Определение 4.7.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad R \subset \mathbb{R}^n \quad D - \text{открыто}$$

$f - r$ раз непрерывно дифференцируема = r -гладкая,

если все частичные производные до r -ого порядка существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(D)$

Теорема 4.11.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D - \text{открыто} \quad f \in C^r(D)$$

i_1, i_2, \dots, i_r – перестановка j_1, j_2, \dots, j_r

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной. А значит, можем всегда переставить все в неубывающем порядке индексов. \square

Определение 4.8.

Мультииндекс

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad k_j \in \mathbb{N}_0$$

Высота мультииндекса $|k| = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$

$$k! := k_1! k_2! \dots k_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n \quad h^k = h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n}$$

$$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}$$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} := \frac{|k|!}{k!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$ – количество способов покрасить $|k|$ шаров в n цветов так, чтобы первого цвета было k_1, k_2 – второго и т.д.

Лемма.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^r(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$[x, x + h]$ – отрезок с концами x и $x + h$. (на многомерном пространстве)

$$[x, x + h] \subset D$$

$$F(t) = f(x + th) \quad F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда $F \in C^r[0, 1]$ и при $0 \leq l \leq r$

$$F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x + th) h^k$$

Доказательство.

$$G(t) := g(x + th)$$

$$G'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x + th), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x + th) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + th) h_j$$
 – получили формулу для $l = 1$.

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}(x + th) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_l} = \sum_{|k|=l} \binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x + th) h^k =$$

$$= \sum_{|k|=l} \frac{|k|!}{k!} f^{(k)}(x + th) h^k$$

$$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, \dots)$$

\square

Теорема 4.12 (многомерная формула Тейлора).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D - \text{открыто.}$$

$$[a, x] \subset D \quad f \in C^{r+1}(D)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x-a))}{k!} (x - a)^k$$

Где $\theta \in (0, 1)$.

Доказательство.

$$h := x - a$$

$$F(t) := f(a + th) \in C^{r+1}[0, 1]$$

По одномерной формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_{l=0}^r \frac{F^{(l)}(0)}{l!} + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} = \\ &= \sum_{l=0}^r \frac{1}{l!} \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k!} f^{(k)}(a + \theta h) h^k \end{aligned}$$

– получили ровно то, что хотели на самом деле.

□

Замечание.

1. Многочлен Тейлора степени r :

$$\sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

2. Формула Лагранжа $r = 0$

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta(x - a))(x_j - a_j) = f(a) + \langle \text{grad}_{a+\theta(x-a)} f, x - a \rangle$$

3. Формула Тейлора при $n = 2$.

$$k = (k_1, k_2) \quad \binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k_1+k_2}{k_1}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 + \dots + \sum_{k=0}^l \frac{1}{l!} \cdot \binom{l}{k} \frac{\partial^l f(a, b)}{\partial x^k \partial y^{l-k}} (x - a)^k (y - b)^{l-k} + \dots \end{aligned}$$

Следствие.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D – открыто $f \in C^r(D)$

$a \in D$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(\|x - a\|^r) \text{ при } x \rightarrow a.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!} (x - a)^k = \\ &= \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \end{aligned}$$

$$\text{Осталось понять, что } \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = o(\|x - a\|^r)$$

Покажем для этого про каждое слагаемое:

$$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = o(\|x - a\|^r)$$

$$|(x - a)^k| = |(x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_n - a_n)^{k_n}| \leq \|x - a\|^{k_1} \dots \|x - a\|^{k_n} = \|x - a\|^r$$

$$\frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a)) - f^{(k)}(a)}{k!} \rightarrow 0$$

\implies получили то, что надо.

□

Следствие (Полиномиальная формула).

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = (g(x))^r$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = r g^{r-1}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = r g^{r-1}(x)$$

$\frac{\partial^l f}{\partial x \dots} = r(r-1)\dots(r-l+1)g^{r-l}(x)$ – если подставить это в формулу Тейлора, то получаем ровно нужную формулу.