

Математический анализ

Никифоровская Анна

3 апреля 2017 г.

Содержание

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.	1
1.1 §3. Свойства определенного интеграла	1
1.2 §4. Интегральные суммы	4
1.3 §5. Несобственные интегралы	10
1.3.1 Несобственные интегралы от неотрицательных функций.	15
1.3.2 Несобственные интегралы от знакопеременных функций.	17
2. 6. Метрические и нормированные пространства	21
2.1 §1. Открытые и замкнутые множества	21
2.2 §2. Компактность	30
2.3 §3. Непрерывные функции	35

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.

1.1. §3. Свойства определенного интеграла

Теорема 1.1 (линейность определенного интеграла).

$f, g \in C[a, b]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство.

F – первообразная f .

G – первообразная g .

$\implies \alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g$.

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g) &= (\alpha F + \beta G) \Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \\ &= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \end{aligned} \quad \square$$

Теорема 1.2 (ф-ла интегрирования по частям).

$u, v \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b uv' = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

Доказательство.

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

F – первообразная $u'v \implies (uv - F)$ – первообразная uv' . (Проверка дифференцированием: $(uv - F)' = u'v + uv' - u'v = uv'$)

$$\int_a^b uv' = (uv - F) \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - F \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v \quad \square$$

Теорема 1.3 (ф-ла замены переменной).

$f \in C \langle a, b \rangle$ $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx$$

Соглашение. С этого места и далее $a > b$ $\int_a^b f := - \int_b^a f$

Доказательство.

F – первообразная для $f \implies F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx \quad \square$$

Пример.

$$\int_2^3 \frac{t dt}{1+t^4} = \left[\begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t) dt}{1+\varphi^2(t)} = \int_4^9 \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$$

Пример.

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t (\sin t)' dt = \cos^{n-1} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t dt =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t dt = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \right)$$

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Следствие (Формула Валлиса).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство.

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos^{2n+2} t \leq \cos^{2n+1} t \leq \cos^{2n} t$$

Проинтегрируем. Получим $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2}$$

И левая, и правая часть стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

Тогда по непрерывности $\sqrt{\cdot}$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \square$$

Следствие.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство.

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \square$$

Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).

$f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle$ и $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

Доказательство.

Индукция по n .

База $n = 0$.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt - \text{формула Ньютона-Лейбница для } f'.$$

Индукционный переход. $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right)' dt = -\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) ((x-t)^{n+1})' dt = \\ & = -\frac{1}{(n+1)!} \left((f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \right) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

На самом деле уже получили то, что надо.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \end{aligned} \quad \square$$

Лемма (в помощь Ламберту).

$$H_j = \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

$$1. H_j > 0 \quad H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^j \cos x dx = \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}$$

$$2. \text{ При любом } c > 0 \quad c^j H_j \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty$$

Доказательство.

$$0 < c^j H_j \leq \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi^2 c}{4} \right)^j \rightarrow 0.$$

(Некогда уже доказывали, что $\frac{c^j}{j!} \rightarrow 0$) □

$$3. H_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right) \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x)' dx = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)' dx = -2 \left(x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = 2 \end{aligned}$$

$$4. H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} j! H_j &= \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j (\sin x)' dx = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_0^{\pi/2} + 2j \int_0^{\pi/2} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx = \\ &= -2j \int_0^{\pi/2} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (\cos x)' dx = -2j \left(x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx + \right. \\ &+ \left. 2(j-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = 2j(2j-1) \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \\ &- 2j \cdot 2(j-1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - j(j-1)\pi^2(j-2)! H_{j-2} \end{aligned}$$

$$\implies H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

В доказательстве в определенный момент воспользовались идеей $x^2 = -((\frac{\pi}{2})^2 - x^2) + (\frac{\pi}{2})^2$ \square

5. Существует такой многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$

Доказательство.

Будем доказывать по индукции.

База. $j = 0, j = 1$

$H_0 = 1, H_1 = 2$ – многочлены степени 0 с целыми коэффициентами.

Индукционный переход.

$j - 1, j - 2 \rightarrow j$

$$H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2} = (4j - 2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2)$$

Скажем тогда, что $P_j(x) = (4j - 2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x)$ \square

Теорема 1.5 (Теорема Ламберта).

π и π^2 – иррациональны.

Доказательство.

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда

$$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\text{целое}}{n^j}$$

$\implies n^j H_j$ – целое и положительное число.

$\implies 1 < n^j H_j \rightarrow 0$. (стремится к нулю по одному из пунктов предыдущей леммы)

Противоречие. Значит, π^2 число иррациональное.

Тогда и число π иррациональное. \square

1.2. §4. Интегральные суммы

Определение 1.1.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Замечание.

Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

Определение 1.2.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева (с константой M), если $\forall x, y \in E \implies |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$

Замечание.

Липшицевость \implies равномерная непрерывность.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

Пример.

$\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – равномерно непрерывны.

Пример.

$f(x) = x^2$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не равномерно непрерывна.

Доказательство.

$\varepsilon := 1$ Возьмем x, y $|x - y| < \delta$, например, x и $y = x + \frac{\delta}{2}$

$$1 > |f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \delta/2)^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при $x > \frac{1}{\delta}$ □

Теорема 1.6 (Теорема Кантора).

$f \in C[a, b] \implies f$ – равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Возьмем это ε и зафиксируем.

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, y_n \in [a, b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$$

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow c$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c.$$

Эта функция непрерывна в точке c .

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(c)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}) = f(c)$$

$$0 \leftarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$$

Получили противоречие – константа стремиться к нулю не может. □

Определение 1.3.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \delta\}$$

– модуль непрерывности функции f .

Свойства.

1. $w_f(0) = 0$
2. w_f монотонно возрастает.
3. $w_f \geq 0$
4. Если f – липшицева функция с константой M , то $w_f(\delta) \leq M\delta$

Доказательство.

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M\delta, \text{ если } |x - y| \leq \delta \quad \square$$

$$5. |f(x) - f(y)| \leq w_f(|x - y|)$$

$$6. f \text{ – равномерно непрерывна} \iff w_f \text{ – непрерывна в нуле. } \left(\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0 \right)$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$\text{Тогда } w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\} \leq \varepsilon$$

$$w_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon$$

Т.е. сейчас получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < \alpha < \frac{\delta}{2} \quad w_f(\alpha) \leq \varepsilon$$

– это определение предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} w_f(\alpha) = 0$.

“ \impliedby ”

Пусть $w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad w_f(\delta) < \varepsilon$$

Если $|x - y| \leq \delta$, то $|f(x) - f(y)| \leq w_f(\delta) < \varepsilon$ □

7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$.

Доказательство.

$f \in C[a, b] \iff f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \iff$ (по свойству 6) $w_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$. □

Определение 1.4.

Дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$ – это такой набор точек, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Мелкость(ранг) дробления – это $\max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$

$|\tau|$ – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и оснащенное дробление (τ, ξ)

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Теорема 1.7 (об интегральных суммах).

$$f \in C[a, b]$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)w_f(|\tau|)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right) \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |t - \xi_k| &\leq |x_k - x_{k-1}| \leq |\tau| \\
 \implies |f(t) - f(\xi_k)| &\leq w_f(|\tau|) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\tau|) dt = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) w_f(|\tau|) = (b-a) w_f(|\tau|)
 \end{aligned}$$

□

Следствие.

1. $f \in C[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{ дробления } \tau \text{ мелкости } < \delta \text{ и любого его оснащения } \xi \\
 \implies &\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \sigma) \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

2. $f \in C[a, b]$. Тогда для любой последовательности дроблений τ_n , для которой $|\tau_n| \rightarrow 0$ и любой последовательности их оснащений ξ_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p &=: S_p(n) \\
 \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p &< S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

Введем интегральную сумму...

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$$

Мелкость этих дроблений $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Определение 1.5.

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дробления τ и мелкости $< \delta$ и любого его оснащения ξ
 $\implies |I - S(f, \tau, \xi)| < \varepsilon$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$

I – это её интеграл Римана.

Теорема 1.8 (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

Лемма.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$

Доказательство. (леммы.)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})' dt = f(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \\ &= f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2}) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство. (теоремы.)

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\ |\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|(t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1.9 (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай).

$$f \in C^2[m, n] \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Доказательство.

$$n = m + 1$$

$$f(m) + f(m + 1) = \frac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$f(m) = \frac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Суммируем от m до $n - 1$.

$$\sum_{k=m}^{m+1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(m) = \dots$

Надо доказать ф-лу:

$$\frac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int_m^{m+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^{m+1} f''(t)(t - m)(m + 1 - t) dt$$

А это в точности лемма, которая уже была. □

Пример.

$$1. S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$$

$$f(t) = t^p \quad f''(t) = p(p - 1)t^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1+n^p}{2} + \int_1^n t^p dt + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Если $p \in (-1, 1)$, то $\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq C$.

Действительно.

$$\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} \leq \frac{1}{1-p}$$

И получили, что

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Если $p > 1$:

$$\int_1^n t^{p-2} \{t\}(1 - \{t\}) dt \leq \int_1^n t^{p-2} dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$$

$$\implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

2. Гармонические числа. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad f''(t) = \frac{2}{t^3} \quad m = 1$$

$$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int_1^n \frac{1}{t^3} \{t\}(1 - \{t\}) dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$$

Последовательность a_n монотонно возрастает.

$$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt \leq \int_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies (\text{т.к. } a_n \text{ возрастает и ограничена сверху}) \quad a_n \text{ имеет предел } a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Получаем, что:

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1) = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$$

$\frac{1}{2} + a =: \gamma$ – постоянная Эйлера.

$$\gamma \approx 0,5772156649\dots$$

3. Формула Стирлинга.

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

$$f(t) = \ln t \quad f''(t) = -\frac{1}{t^2} \quad m = 1$$

$$\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln t dt - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt$$

$$\int_1^n \ln t dt = t \ln t \Big|_1^n - \int_1^n t(\ln t)' dt = n \ln n - n + 1$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$$

b_n монотонно возрастают.

$$b_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq 1$$

$$\implies \text{у } b_n \text{ есть предел } b.$$

$$b_n = b + o(1)$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 + b + o(1)$$

$$n! = \exp\left(n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b + o(1)\right) = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} = \\ = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} (1 + o(1)) \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}$$

Хотим понять, что такое $e^{1-b} = c$.

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nc}}{(n^n e^{-n} \sqrt{nc})^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2nc}}{\sqrt{n^2 c^2}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{nc}}$$

$$\implies c = \sqrt{2\pi}$$

Итого формула Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

1.3. §5. Несобственные интегралы

Определение 1.6.

$$-\infty < a < b \leq +\infty$$

$$f \in C[a, b)$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$$-\infty \leq a < b < +\infty$$

$$f \in C(a, b]$$

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{Если этот предел существует в } \overline{\mathbb{R}}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b M = M(b-c) \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow b^-$$

Теорема 1.10 (Критерий Коши сходимости интегралов).

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

$$\int_a^b f \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) : \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \left| \int_c^d f \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

“ \implies ”

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f = \int_a^b f - \text{конечен.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall c \in (b - \delta, b) \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

Аналогично получаем для $d \in (b - \delta, b)$ $\left| \int_a^d f - \int_a^b f \right| < \varepsilon$

$$\left| \int_a^c f - \int_a^d f \right| \leq \left| \int_a^c f - \int_a^b f \right| + \left| \int_a^b f - \int_a^d f \right| < 2\varepsilon$$

“ \Leftarrow ”

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{b} \in (a, b) \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

$$\tilde{b} = b - \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$$

Это критерий Коши для $\lim_{c \rightarrow b-} F(c)$. □

Следствие.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b$

и $\int_{c_n}^{d_n} f \not\rightarrow 0$, то $\int_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \rightarrow b \implies \exists N \forall n > N \quad c_n, d_n > \tilde{b}$

$$\implies \left| \int_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon.$$

Значит, $\int_{c_n}^{d_n} f \rightarrow 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty.$$

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F .

$$\int_a^c f = F(c) - F(a)$$

Существование $\int_a^b f$ – существование $\lim_{c \rightarrow b-} (F(c) - F(a)) = \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b (слева)

Соглашение. Если F не определена в точке b , считать, что

$$F \Big|_a^b := \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a)$$

Тогда если $\int_a^b f$ существует, то $\int_a^b f = F \Big|_a^b$

Пример.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1} \Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$$

$$p = 1$$

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \rightarrow +\infty$$

Тогда интеграл расходится.

Если $p \neq 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \rightarrow \frac{1}{p-1}, \text{ если } p > 1$$

Если же $p < 1$, то $\rightarrow +\infty$.

Получили, что $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p}$$

Если $p = 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$$

Значит, интеграл расходится.

Если же $p \neq 1$

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$$

Если $p > 1 \implies \rightarrow +\infty$

Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

Получили, что $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

Свойства.

$$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

1. Аддитивность.

$$\int_a^b f \text{ сходится} \implies \forall c \in (a, b) \int_c^b f \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f \text{ - сходится} \implies \exists \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f =: \int_a^b f$$

$$\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f \implies \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim_{B \rightarrow b^-} \int_c^B f$$

$$\text{Вот и получили, что } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \square$$

2. $\int_a^b f$ сходится $\implies \int_c^b f \rightarrow 0$ при $c \rightarrow b-$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f$$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

3. Линейность. $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся $\implies \int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g \text{ при } B \rightarrow b-$$

\implies предел конечен и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

□

Замечание.

$\int_a^b f$ сходится $\int_a^b g$ расходится $\implies \int_a^b (f \pm g)$ расходится.

Доказательство – от противного.

Свойства (продолжение).

4. Монотонность $f, g \in C[a, b]$ $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство.

$$c \in [a, b] \implies f, g \in C[a, c]$$

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g$$

Переходим к пределу в неравенстве. $c \rightarrow b-$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

5. Интегрирование по частям.

$$f, g \in C^1[a, b] \implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

(Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

Доказательство.

$$c \in [a, b] \quad f, g \in C^1[a, c]$$

$$\int_a^c f g' = f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g$$

Теперь напишем предел $c \rightarrow b-$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f g' = \lim_{c \rightarrow b-} (f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g) = \lim_{c \rightarrow b-} f g \Big|_a^c - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f' g$$

□

6. Замена переменной.

$$f \in C[a, b] \quad \varphi : [a, \beta) \rightarrow [a, b) \text{ и } \varphi \text{ непрерывна и дифференцируема. } c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$$

$$\text{Тогда } \int_{\varphi(\alpha)}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

(Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

Доказательство.

$$F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

Если существует предел в правой части. Т.е. $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

$$\text{Тогда } \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - \Phi(\alpha)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

$$a \leq \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

$$\text{Теперь надо понять, что } \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

Возьмем $\gamma_n \rightarrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow c$ оба стремятся слева

$$F(c_n) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c} F(y)$$

$$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$$

Случай второй. Существует $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Т.е. существует $\lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int_{\varphi(a)}^c f(x) dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \rightarrow \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \rightarrow b$

Пусть $y_n \rightarrow b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta)$ $\varphi(\delta_n) = y_n$.

$$\varphi(\alpha) \leq y_n \leq \varphi(\gamma_m)$$

\implies по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \rightarrow \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \rightarrow [a, b]$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$$\varphi(\delta_{n_k}) \leq \varphi(p) < b.$$

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \rightarrow b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Замечание.

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}$$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.3.1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b)$$

Интересуемся сходимостью $\int_a^b f(x) dx$

Теорема 1.11.

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b) \quad F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

Сходимость $\int_a^b f(x) dx$ равносильна ограниченности F .

Доказательство.

$$F(y_2) - F(y_1) = \int_a^{y_2} f - \int_a^{y_1} f = \int_{y_1}^{y_2} f \geq 0$$

$\implies F$ монотонно возрастает.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} F(y) - F(a)$$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. \square

Следствие.

$$1. 0 \leq f \leq g \quad f, g \in C[a, b)$$

Если $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится.

Если $\int_a^b f$ расходится, то и $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство.

$$F(y) := \int_a^y f \quad G(y) := \int_a^y g$$

$F \leq G$ на $[a, b)$ (по монотонности интеграла)

$\int_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху.

$\implies F$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена $\implies \int_a^b f$ сходится.

(Второй пункт – переформулировка) \square

$$2. f \geq 0 \quad f \in C[a, +\infty) \text{ и } f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f$ – сходится.

Доказательство.

$$f \in O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \implies f \leq M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} g$ сходится.

$$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.} \quad \square$$

Замечание.

Неравенства $f \leq g$ или $f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ могут выполняться лишь при достаточно больших x .

(Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

$$3. f, g \geq 0 \quad f, g \in C[a, b) \text{ и } f \sim g \text{ при } x \rightarrow b-$$

Тогда $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково.

(или оба сходятся, или оба расходятся)

Доказательство.

$f = \varphi g$, где $\varphi(x) \rightarrow 1$, при $x \rightarrow b-$.

\implies существует такое c , что при $x \geq c$ $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 2$

$\implies \frac{g}{2} \leq f = \varphi g \leq 2g$ при $x \geq c$

\implies если $\int_c^b g$ сходится, то $\int_c^b f$ сходится. (и наоборот)

А значит, и $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково. □

Замечание.

$f \geq 0$ $f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \rightarrow 0$.

1.3.2. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

Определение 1.7 (Абсолютная сходимость.).

$f \in C[a, b)$

$\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.12.

Если \int абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.

$$F(c) = \int_a^c f = \int_a^c f_+ - \int_a^c f_-$$

$$\Phi(c) = \int_a^c |f| = \int_a^c f_+ + \int_a^c f_-$$

$$\int_a^c f_+ =: F_1(c)$$

$$\int_a^c f_- =: F_2(c)$$

Знаем, что $\Phi(c)$ сходится. Значит, Φ ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2$, $F_1 \geq 0$ $F_2 \geq 0 \implies F_1$ и F_2 ограничены.

$\implies \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ сходятся $\implies \int_a^b f$ сходится по линейности. □

Следствие.

$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$, если $\int_a^b f$ абсолютно сходится.

Доказательство.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

и монотонность интеграла □

Теорема 1.13 (признак Дирихле).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists K : \left| \int_a^y f \right| \leq K$ при всех y .

2. g монотонна.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$ (В другом случае тоже верно, но нам доказывать не стали)

$$F(y) := \int_a^y f$$

$$\int_a^y fg = Fg \Big|_a^y - \int_a^y Fg'$$

Посмотрим на $F(y)g(y)$.

$$|F(y)g(y)| \leq K |g(y)| \rightarrow 0.$$

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что $\int_a^{+\infty} Fg'$ сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть g монотонно возрастает.

$$\int_a^{+\infty} |Fg'|$$

$$|Fg'| = |F| |g'| \leq K |g'|.$$

Т.е. надо понять, что $\int_a^{+\infty} Kg'$ сходится.

$$\int_a^y Kg' = Kg(y) - Kg(a) \rightarrow -Kg(a)$$

□

Теорема 1.14 (признак Абеля).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ –сходится
2. $|g(x)| \leq K \quad \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле.

g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ и $|A| \leq K$

$\tilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x) dx \implies \int_a^y f(x) dx$ ограничена в окрестности $+\infty$ (т.е. при $y \geq b$).

Но при $y \in [a, b]$ она ограничена, т.к. непрерывна.

Т.е. показали, что f и \tilde{g} удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$$\implies \int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x) dx - \text{сходится}$$

$$fg = fA + f\tilde{g} \text{ и } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} fA + \int_a^{+\infty} f\tilde{g}$$

□

Следствие.

$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T .

g монотонна и стремится к 0 на бесконечности, и $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$ расходится.

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \text{ сходится} \iff \int_a^{a+T} f(x) dx = 0$$

Доказательство.

“ \Leftarrow ”

$$F(y) := \int_a^y f(x) dx = \int_{a+kT}^y f(x) dx = \int_a^{y-kT} f(x) dx$$

$$a \leq y - kT \leq a + T.$$

Т.е. множество значение $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a + T]$ совпадает.

Но F непрерывна \implies ограничена на $[a, a + T]$

$\implies F$ ограничена на \mathbb{R}

\implies по принципу Дирихле $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

“ \implies ”

Докажем, что если $\int_a^{a+T} f(x) dx =: A \neq 0$, то $\int_a^{+\infty} fg$ расходится.

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ - периодическая.

$$\int_a^{a+T} \tilde{f} = \int_a^{a+T} f - \int_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0.$$

Значит, $\int_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится.

$$\text{Но } \int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} \tilde{f}g + A \int_a^{+\infty} g$$

Получили, что одно слагаемое сходится, а другое расходится (т.к. хвост знакопостоянен, а $\int_a^{+\infty} |g|$ расходится и g монотонна)

□

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

Случай 1.

$$p > 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится}$$

$$\implies \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx - \text{абсолютно сходится.}$$

Случай 2.

$$0 < p \leq 1$$

$$\sin x - \text{периодическая функция } \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$\frac{1}{x^p} \rightarrow 0 \text{ и монотонна.}$$

$$\implies \text{по следствию признака Дирихле } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится.}$$

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$$|\sin x| - \text{периодическая функция } \int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx \neq 0$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^p} \text{ сходится} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится} \iff p > 1$$

\implies нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$$p \leq 0$$

Воспользуемся критерием Коши.

$$\int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p} dx \geq \int_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{3}$$

\implies нет сходимости.

2. 6. Метрические и нормированные пространства

2.1. §1. Открытые и замкнутые множества

Определение 2.1. (X, ρ) – метрическое пространство, если $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример. 1. \mathbb{R} $\rho(x, y) = |x - y|$

2. \mathbb{R}^2 $\rho(x, y)$ – длина отрезка xy .

3. X $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y \\ 1 & \text{если } x \neq y \end{cases}$

4. Множество – сфера. Расстояние – дуги.

5. Манхэттенская метрика. \mathbb{R}^2 $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

6. Французская железнодорожная метрика. Есть город Париж и радиальные дороги от него. Больше никто никак между собой не связан.

Если A и B лежат на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если A и B лежат на разных лучах, то $\rho(A, B) = AP + BP$

Упражнение – проверить, что это метрика.

Определение 2.2. Открытый шар радиуса r с центром в точке a $B_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар радиуса r с центром в точке a $\overline{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$

Свойства. 1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$

2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0$

$$B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$$

Доказательство. Возьмем радиус $r := \frac{\rho(a, b)}{3}$. Он подходит.

От противного. Пусть пересекаются, т.е. $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$

$$\implies \rho(x, a) < r, \rho(x, b) < r \implies \rho(a, b) \leq \rho(x, a) + \rho(x, b) < 2r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$$

Получили противоречие. □

Определение 2.3. $A \subset X$ – метрическое пространство.

$a \in A$ – внутренняя точка, если $\exists r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset A$

Определение 2.4. Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

- Свойства открытых множеств.**
1. \emptyset, X – открытые множества.
 2. Объединение любого количества открытых множеств открыто.
 3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
 4. $B_r(a)$ – открытое множество.

Доказательство. 2. A_α – открытые, $\alpha \in I$.

$$A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Возьмем $a \in A$, тогда $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$

A_β открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$

3. A_1, A_2, \dots, A_n – открытые. $A := \bigcap_{k=1}^n A_k$

Возьмем $a \in A \implies a \in A_k \quad \forall k = 1, \dots, n$

A_k – открытое $\implies \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$

$r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0 \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$

$$\implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k = A$$

4. Пусть $x \in B_r(a)$

Возьмем $\tilde{r} := r - \rho(x, a) > 0$

Проверим, что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$.

Возьмем $y \in B_{\tilde{r}}(x) \implies \rho(y, x) < \tilde{r} = r - \rho(x, a)$

$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < \tilde{r} + \rho(x, a) = r$

□

Замечание. Конечность в третьем свойстве существенна.

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

Определение 2.5. Внутренность множества \mathring{A} – множество всех внутренних точек A

Свойства. 1. $\mathring{A} \subset A$

2. \mathring{A} – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .

3. \mathring{A} – открытое множество.

4. $\mathring{A} = A \iff A$ открыто

5. $A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$

6. $\mathring{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

7. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

Доказательство. 2. $G := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открытое из A .

Надо доказать, что $\text{int } A = G$

“ \supset ”

Берем $x \in G \implies x \in U_\alpha \subset A \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U_\alpha \subset A$

$\implies x$ – внутренняя точка $\implies x \in \text{int } A$

“subset”

Берем $x \in \text{int } A \implies \exists r > 0 B_r(x) \subset A$

$B_r(x)$ – открытое множество, которое содержится в A и содержит x .

$\implies x \in G$.

3. По пункту 2 $\text{int } A$ – объединение открытых множеств \implies открыто

4. “ \implies ”

$\text{int } A$ открыто по пункту 3 $\implies A$ открыто.

“ \Leftarrow ”

A открыто \implies все точки внутренние $\implies \text{int } A = A$.

6. “ \subset ”

$A \cap B \subset A \implies \text{int}(A \cap B) \subset \text{int } A$

$\implies \text{int}(A \cap B) \subset \text{int } A \cap \text{int } B$

“ \supset ”

$x \in \text{int } A \cap \text{int } B \implies x \in \text{int } A, x \in \text{int } B \implies B_{r_1}(x) \subset A, B_{r_2}(x) \subset B$

$\implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies x \in \text{int}(A \cap B)$

7. $\text{int } A$ открыто $\implies \text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$ по пункту 4.

□

Определение 2.6. Замкнутое множество.

$A \subset X$ – замкнутое, если $X \setminus A$ – открытое.

Свойства. 1. \emptyset, X – замкнутое.

2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств – замкнуто.

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

4. $\overline{B_r(a)}$ – замкнутое множество.

Доказательство. 2. $A_\alpha \implies X \setminus A_\alpha =: B_\alpha$ – открытое.

$\implies B := \bigcup B_\alpha$ – открыто

$X \setminus B = (X \setminus B_\alpha) = \bigcap A_\alpha$ – замкнуто.

3. $X \setminus \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$ – открыто.

4. $X \setminus \bar{B}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) > r\}$ – открыто?

$$\tilde{r} := \rho(x, a) - r$$

$$B_{\tilde{r}}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

От противного. Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \bar{B}_r(a) \implies$

$$\rho(y, x) < \tilde{r} \text{ и } \rho(y, a) \leq r$$

$$\implies \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a)$$

Противоречие.

□

Замечание. В пункте 3 существенна конечность.

$$\mathbb{R} \quad A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1) \text{ – не является замкнутым.}$$

Определение 2.7. Замыкание множества $Cl A = \bar{A}$

– пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Свойства. 1. $Cl A \subset A$

2. $Cl A$ – замкнутое множество

3. $Cl A = A \iff A$ – замкнуто

4. $A \subset B \implies Cl A \subset Cl B$

5. $Cl(A \cup B) = Cl A \cup Cl B$

6. $Cl(Cl A) = Cl A$

Теорема 2.1. $Cl A = X \setminus int(X \setminus A)$

Доказательство. $x \in Cl A = int(X \setminus A)$

$int(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, где $U_{\alpha} \subset X \setminus A$ и открыт.

$$X \setminus int(X \setminus A) = X \setminus \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus U_{\alpha}) = Cl A$$

$X \setminus U_{\alpha} \supset A$ и замкнуто.

□

свойств. 3. $Cl A = A \iff X \setminus A = X \setminus Cl A (= int(X \setminus A))$

$\iff X \setminus A = int(X \setminus A) \iff X \setminus A$ – открыто $\iff A$ замкнуто.

4. $A \subset B \implies X \setminus B \subset X \setminus A \implies int(X \setminus B) \subset int(X \setminus A)$

$\implies X \setminus int(X \setminus A) \subset X \setminus int(X \setminus B)$

□

Пример в \mathbb{R} . $int[0, 1] = (0, 1)$

$$cl(0, 1] = [0, 1]$$

$$int \mathbb{Q} = \emptyset$$

$$cl \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Упражнение. $A = \text{int}(cl(\text{int}(cl(A))))$. Какое количество различных множеств таким образом может быть получено?

Теорема 2.2. $a \in Cl A \iff \forall r > 0 B_r(a) \cap A \neq \emptyset$

Доказательство. “ \implies ”

Пусть для некоторого $r > 0$ $B_r(a) \cap A = \emptyset$
 $\implies a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A \implies a$ – внутренняя точка $X \setminus A$
 $\implies a \in \text{int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \text{int}(X \setminus A) = Cl A$

Противоречие.

“ \impliedby ”

Пусть $a \notin Cl A = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$, где F_{α} – замкнуто и $\supset A$
 \implies существует β , что $a \notin F_{\beta} \supset A \implies a \in X \setminus F_{\beta}$ – открыто.
 \implies возьмем $r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset X \setminus F_{\beta} \subset X \setminus A$
 $\implies B_r(a) \cap A = \emptyset$

Получили противоречие. □

Следствие. $A \subset X$ и U – открытое множество, $U \cap A = \emptyset$

Тогда $U \cap Cl A = \emptyset$

Доказательство. Если $x \in U \cap Cl A$, то $x \in U$ – открытое

\implies для некоторого $r > 0$ $B_r(x) \subset U$
 $\implies B_r(x) \cap A = \emptyset \implies x \notin Cl A$

Противоречие. □

Определение 2.8. Проколота окружность точки – шарик без центра.

$$B_r(a) \setminus \{a\}$$

Определение 2.9. $a \in X$ – предельная точка, если в любой проколоте окружности точки a есть точка из A .

Определение 2.10 (Обозначения). A' – множество предельных точек A .

Свойства. 1. $Cl A = A \cup A'$

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

4. A – замкнутое $\iff A' \subset A$

Доказательство. 1. $a \in Cl A \iff \forall r > 0 B_r(a) \cap A \neq \emptyset$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A \quad \overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ a \notin A, \text{ но } a \in A' \end{cases}$$

2. Пусть $a \in A'$. Тогда $\mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \quad \forall r > 0$
но $A \subset B \implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \implies a \in B'$
3. $A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$
 $B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$
 $\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$
- Обратное включение.
Возьмем $x \in (A \cup B)'$. Пусть $x \notin A'$
 $\implies \exists r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap A = \emptyset$
Но $\mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
 $\implies \mathring{B}_r(x) \cap B \neq \emptyset \implies \forall R > r \quad \mathring{B}_R(x) \cap B \neq \emptyset$
4. A – замкнутое $\iff A = Cl A. (= A \cup A')$
 $\iff A = A \cup A' \iff A' \subset A.$

□

Теорема 2.3. $a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a)$ содержит бесконечное множество точек из A .

Доказательство. “ \implies ”

$$a \in A' \implies \forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

$$\exists a \neq x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A \implies r > \rho(x_1, a) > 0. \text{ Пусть } \rho(x_1, a) = r_1.$$

$$\implies \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \text{ и } x_1 \neq x.$$

$$r_2 := \rho(a, x_2)$$

Ну и делаем так далее.

“ \longleftarrow ”

Возьмем $B_r(a)$. $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек.

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек, т.к. выкинули одну точку.}$$

$$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a \text{ – предельная точка.}$$

□

Следствие. Конечное множество не одержит предельных точек.

Замечание. Можно было выбирать последовательность x_n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ и $\rho(x, a) \downarrow$

Определение 2.11. (X, ρ) – метрическое пространство. $Y \subset X$.

$(Y, \tilde{\rho})$ – подпространство метрического пространства X .

$$\tilde{\rho} = \rho \Big|_{Y \times Y}$$

Теорема 2.4 (об открытых и замкнутых множествах в подпространстве). (X, ρ) – метрическое пространство, Y – подпространство. Тогда

1. $A \subset Y$ – открыто в $Y \iff \exists G$ – открытое в X множество, т.ч. $A = G \cap Y$
2. $A \subset Y$ – замкнуто в $Y \iff \exists F$ – замкнутое в X множество, т.ч. $A = F \cap Y$

Доказательство. 1. “ \implies ”

A – открыто в Y .

$$\forall a \in A \exists r(a) > 0 B_{r(a)}^Y(a) \subset A$$

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \text{ – открыто в } X.$$

Это то самое G , которое нам надо.

$$B_{r(a)}^Y(a) = B_{r(a)}^X(a) \cap Y$$

$$A = A \cap Y = \bigcup_{a \in A} (B_{r(a)}^X(a) \cap Y) = G \cap Y$$

“ \impliedby ”

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмем $a \in A$, тогда

$$a \in G \text{ – открыто в } X \implies \exists r > 0 B_r^X(a) \subset G.$$

$$\implies B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

$$\implies a \text{ – внутренняя точка} \implies A \text{ – открыто в } Y.$$

2. A – замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ – открыто в Y

$$\iff \exists G \text{ – открыто в } X, \text{ т.ч. } Y \setminus A = G \cap Y$$

$$A = (X \setminus G) \cap Y.$$

И положим $F := X \setminus G$.

И все получилось.

□

Пример. $X = \mathbb{R}$ $Y = [0, 2)$

$[0, 1)$ – открыто в Y .

$B_r(0) = [0, r)$ при маленьких r .

$[1, 2)$ – замкнуто в Y .

$$[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$$

$$[1, 2) = [1, 2] \cap [0, 2)$$

Определение 2.12. X – линейное пространство (над \mathbb{R}).

Тогда норма $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \quad \|\cdot\| \geq 0 \text{ и } \|\cdot\| = 0 \iff x = 0$$

$$2. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C}) \quad \forall x \in X$$

$$3. \quad \text{Неравенство треугольника } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Пример. 1. $X = \mathbb{R} \quad \|\cdot\| := |\cdot|$

$$2. \quad X = \mathbb{R}^d \quad \|\cdot\|_\infty := \max_{k=1, \dots, d} |x_k|$$

$$3. \quad X = \mathbb{R}^d \quad \|\cdot\|_1 := \sum_{k=1}^d |x_k|$$

$$4. \quad X = \mathbb{R}^d \quad \|\cdot\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^d |x_k|^2}$$

5. $X = C[a, b]$

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Комментарий к неравенству треугольника.

$$\|f + g\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| = |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \max |f(x)| + \max |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

Определение 2.13. Скалярное произведение.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и $\forall x, y \in X$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (Если над \mathbb{C} , то $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Пример. 1. $\mathbb{R}^d \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$

2. Если $w_1, \dots, w_d > 0$, то $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d w_k x_k y_k$

3. $C[a, b] \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

Свойства скалярного произведения над \mathbb{R} . 1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
 $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$

2. Неравенство Коши-Буняковского

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Доказательство. $t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$$

Квадратный трехчлен относительно t

$$\implies \text{его дискриминант} \leq 0$$

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \quad \square$$

Замечание. Когда равенство?

Когда есть корень у трехчлена $\langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle \geq 0$ относительно t_0 .

$$\implies x + t_0 y = 0 \implies x = (-t_0) y$$

3. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

Доказательство. $\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Неравенство треугольника.

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \text{ – это неравенство Коши-Буняковского.} \quad \square$$

Следствие. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}$ – норма.

Упражнение. Доказать, что норма по формуле выше задается некоторым скалярным произведением $\iff \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Свойства нормы. 1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \|y - x\|$$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - x\|$$

$$2. \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Доказательство. $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|$$

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|$$

□

Определение 2.14. Предел последовательности в метрическом пространстве.

(X, ρ) – метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Определение 2.15. $E \subset X$ – ограничено, если E содержится в каком-то шаре.

Свойства предела последовательности в метрическом пространстве.

1. Единственность

предела.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \rho(x_n, a) \rightarrow 0$$

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \rho(x_n, a) < \varepsilon$

Это просто и есть определение того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$

□

3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$

$\implies \rho(x_n, a)$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.

$\implies \exists \mathbb{R} : \rho(x_n, a) \leq \mathbb{R}$

$\implies x_n \in \overline{B}_R(a)$ при всех n .

□

4. Если a – предельная точка множества A , то $\exists \{x_n\} \subset A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Более того можно выбрать такую последовательность, что $\rho(x_n, a) \downarrow$

Теорема 2.5 (об арифметических свойствах в нормированном пространстве). X – пространство с нормой $\|\cdot\|$

$$\lim x_n = a, \lim y_n = b, \lim \lambda_n = \lambda, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},$$

Тогда.

$$1. \lim(x_n + y_n) = a + b$$

$$2. \lim \lambda_n x_n = \lambda a$$

3. $\lim(x_n - y_n) = a - b$
4. $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$
5. Если есть скалярное произведение, то $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

Доказательство. $\|x_n - a\| \rightarrow 0$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0$$

1. $0 \leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0$
 $\implies \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \rightarrow 0$
2. $\|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \leq |\lambda_n| \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \leq$
 $\lambda_n - \text{имеет предел} \implies \text{ограничена} \implies |\lambda_n| \leq K$
 $\leq K \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \|a\| \rightarrow 0$
4. $|\|x_n\| - \|a\|| \leq \|x_n - a\| \rightarrow 0$
5. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
 $\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle = \langle x_n, y_n - b \rangle + \langle x_n - a, b \rangle =$
 $= \frac{1}{4}(\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 + \|x_n - a + b\|^2 - \|x_n - a - b\|^2) \rightarrow \frac{1}{4}(\|a\|^2 - \|a\|^2 + \|b\|^2 - \|b\|^2) = 0$

□

Определение 2.16. \mathbb{R}^d $x_n \in \mathbb{R}^d$ $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)})$

x_n покоординатно сходится к x_0 ,

если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \quad \forall k = 1, 2, \dots, d$

Теорема 2.6. В \mathbb{R}^d покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство. “ \implies ”

$$\|x_n - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0$$

“ \impliedby ”

$$0 \leq (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 \leq \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0$$

□

2.2. §2. Компактность

Определение 2.17. $A \subset X$ $U_\alpha \subset X$ $\alpha \in I$

U_α образуют покрытие A , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Определение 2.18. U_α – открытое покрытие A (=открытое покрытие множествами),

если это покрытие и все U_α – открытые множества.

Определение 2.19. $K \subset X$ – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2.7. Пусть X – метрическое пространство, Y – его подпространство.

$$K \subset Y.$$

Тогда компактность K в метрическом пространстве X и в метрическом пространстве Y равносильны.

Доказательство. “ \implies ”

Берем U_α – открытые множества из Y , образующие покрытие K .

Тогда $U_\alpha = Y \cap G_\alpha$, где G_α – открытые множества в X .

$K \subset \bigcup U_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$ – покрытие открытыми множествами из X .

$$\implies \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

$$\implies K = K \cap Y \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$$

“ \impliedby ”

Берем открытые множества G_α из X , которые покрывают K .

$$\implies K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y)$$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \text{ т.ч. } K \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

□

Теорема 2.8. K – компактное $\implies K$ – замкнуто и ограничено.

Доказательство. Ограниченность. Возьмем $a \in K$

$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ – покрытие открытыми множествами

Выберем конечное подпокрытие $B_{n_1}(a), \dots, B_{n_m}(a)$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{n_j}(a) = B_r(a) \quad r = \max\{n_1, \dots, n_m\}$$

Замкнутость. $X \setminus K$ – открыто?

Берем $a \in X \setminus K$ и хотим проверить, что лежит там вместе с окрестностью.

$x \in K$ и шар $B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) \not\ni a$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a)$$

Выберем конечное подпространство.

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}$$

$$B_r(a) \cap K = \emptyset, \text{ где } r = \min\left\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\right\}$$

□

Следствие из теоремы. $\tilde{K} \subset K$

Если K – компакт и \tilde{K} – замкнуто, то \tilde{K} – компакт.

Доказательство. $\tilde{K} \subset \bigcup U_\alpha$ – покрыто открытыми множествами

$\bigcup U_\alpha \cup (X \setminus \tilde{K})$ – покрытие открытыми множествами для K .

Можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K}$$

$$\implies \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \supset \tilde{K} - \text{конечное подпокрытие.} \quad \square$$

Теорема 2.9. K_α – семейство компактов и любой конечный набор этих компактов имеет непустое пересечение.

$$\text{Тогда } \bigcap K_\alpha \neq \emptyset$$

Доказательство. От противного. Пусть $\bigcap K_\alpha = \emptyset$

$$K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} X \setminus K_\alpha - \text{все множества в объединении открыты.}$$

Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcap_{j=1}^n X \setminus K_{\alpha_j} = X \setminus \bigcap_{j=1}^n K_{\alpha_j}$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^n K_{\alpha_j} \neq \emptyset$$

Получили противоречие. □

Следствие. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ – непустые компакты

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

Доказательство. Пересечение конечного числа компактов – самый маленький компакт.

$$\implies \neq \emptyset \quad \square$$

Определение 2.20. $a, b \in \mathbb{R}^d$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$$

Замкнутый параллелепипед $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$

Теорема 2.10 (о вложенных параллелепипедах). $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ – замкнутые параллелепипеды.

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$$

Доказательство. $P_n = [a^{(n)}, b^{(n)}]$

На самом деле есть цепочка вложенных отрезков

$$[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \supset [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] \supset \dots$$

Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in P_n \quad \forall n$$

$$a_k^{(n)} \leq c_k \leq b_k^{(n)} \quad \forall k \quad \forall n \quad \square$$

Теорема 2.11 (Гейне-Бореля). Замкнутый куб в \mathbb{R}^d – компакт.

Доказательство. K – замкнутый куб и $\bigcup U_\alpha$ – его покрытие открытыми множествами.

Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разобьем все стороны пополам. Получим 2^d кубиков. $\bigcup U_\alpha$ – покрытие каждого из них.

Найдется маленький кубик, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Назовем его K_1 .

Каждую сторону этого кубика располовиним. Т.к. K_1 не покрывается конечным подпокрытием, то найдется меньший кубик, который тоже нельзя покрыть конечно. Обозначим его K_2 .

Делаем так далее.

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

По теореме о вложенных параллелепипедах есть точка, которая принадлежит всем K_i .

Рассмотрим ее. $c \in \bigcap K_n$

Точка c покрыта каким-то U_{α_0} .

$$\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$$

Длина ребра $K_n - \frac{l}{2^n}$

$$\implies \text{максимальное расстояние между точками } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n}.$$

Эта штука стремится к 0.

$$\implies \text{найдется такой номер } n, \text{ что } \sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n} < r.$$

$$\implies K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это противоречит тому, как мы выбирали кубики, т.к. нашлось множество одно, которое покрывает какой-то кубик целиком.

Получили, что куб – компакт. □

Теорема 2.12 (о характеристике компактов в \mathbb{R}^d). $K \subset \mathbb{R}^d \implies$ следующие условия равносильны.

1. K – компакт.
2. K – замкнуто и ограничено.
3. Из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к точке из K .

Замечание. Третье свойство называется секвенциальная компактность.

Доказательство. 1) \implies 2) – было.

$$2) \implies 1)$$

K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. (Куб замкнут и компактен)

$$\implies K - \text{замкнутое подмножество компакта} \implies K - \text{компактно.}$$

$$1) \implies 3)$$

Пусть есть какая-то последовательность точек $\{x_n\} \subset K$.

D – множество $\{x_n : n \in N\}$.

Есть два случая.

Если D конечно, то какая-то точка повторилась бесконечно много раз.

Возьмем подпоследовательность, состоящую из этой точки – она имеет предел.

D бесконечно. Тогда есть ситуация хорошая – когда там есть предельная точка. Обозначим ее a .

Там есть точка x_{n_1} .

$$r_1 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_1}), 1\}$$

$B_{r_1}(a)$ содержит точку из последовательности. Назовем ее x_{n_2} .

$$n_2 > n_1$$

$$r_2 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \dots, \rho(a, x_{n_2}), \frac{1}{2}\}$$

Делаем и так далее.

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad \rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$$

$$\implies \rho(a, x_{n_k}) \rightarrow 0 \text{ и } x_{n_k} \rightarrow a.$$

Поймем, что $a \in K$. a – предельная в $D \implies a \in Cl D \subset K$.

Пусть у D нет предельной точки. Тогда D замкнуто (т.к. $Cl D = D \cap D'$, где $D' = \emptyset$)

$\implies D$ – компакт. Покроем его шариками, каждый из которых содержит ровно одну точку.

$x_n \in D$ и это не предельная точка, ибо их нет.

$\implies \exists \mathring{B}_{r_n}(x_n)$ не содержит точек из D .

$\implies B_{r_n}(x_n)$ содержит ровно одну точку из D .

$\implies D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$ – покрытие множествами, из которого не выбрать конечное подпокрытие.

Получили противоречие.

3) \implies 2)

K – замкнуто. Пусть нет. Тогда $Cl K = K \cup K'$.

Возьмем такую $a \in Cl K \setminus K$. a – это предельная точка. Тогда $\exists x_1, x_2, \dots \in K$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Но у любой подпоследовательности x_{n_k} будет тот же предел. Противоречие.

K ограничено. От противного. K не лежит в $B_n(0)$.

$$\implies \exists x_n \in K \setminus B_n(0) \implies \rho(x_n, 0) \geq n.$$

Пусть x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \implies x_{n_k}$ ограничена, а это не так. □

Замечание. 1) \implies 3) доказана для произвольного метрического пространства.

3) \implies 1) верна для произвольного метрического пространства. (Но это слишком сложно)

2) \implies 1) для произвольного метрического пространства не верна.

Пример. \mathbb{R} с дискретной метрикой (лентяя)

$[0, 1]$ – замкнуто и ограничено. Поймем, что нет компактности.

$$[0, 1] \subset \bigcap_{x \in [0, 1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$$

Следствие. $K \subset \mathbb{R}^d$ – компакт

\implies всякое бесконечное множество точек из K имеет предельные точки, принадлежащие K .

Доказательство. x_1, x_2, x_3, \dots – выбрали последовательность в этом бесконечном множестве.

А у нее есть предельная точка из K . □

Теорема 2.13 (Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности точек из \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ ограничена $\implies \{x_n\} \in \overline{B}_R(a)$ – замкнуто и ограничено \implies компакт.
 \implies по пункту 3 из теоремы о характеристике компактов в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. \square

Определение 2.21. (X, ρ) – метрическое пространство.

x_1, x_2, x_3, \dots – фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Определение 2.22. (X, ρ) – полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Замечание. Фундаментальная последовательность ограничена.

Следствие. 1. \mathbb{R}^d – полное.

2. K – компакт в (X, ρ) , то (X, ρ) – полное.

Доказательство. 1. Пусть x_n – фундаментальная последовательность. $\implies \{x_n\}$ ограничена.

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\forall \varepsilon \exists M \forall k \geq M \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Пусть $n \geq \max\{N, n_M\}$

$$\implies \text{существует } n_k > n. \rho(x_{n_k}) < \varepsilon \text{ и } \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\implies \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

2. x_n – сходящаяся подпоследовательность в K

\implies существует x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies x_n$ – сходится. \square

2.3. §3. Непрерывные функции

Определение 2.23. (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства.

$$f : E \rightarrow Y \quad E \in X.$$

a – предельная точка множества E .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \neq x \in E \text{ и } \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$$

Это было определение по Коши.

Запишем определение по Гейне.

$$\forall x_n \in E, x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Теорема 2.14 (равносильность определения по Коши и по Гейне). Коши \implies Гейне.

$$\begin{aligned} \text{Берем } x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\implies \rho_X(x_n, a) \rightarrow 0 \\ \implies \exists N \quad \forall n \geq N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta &\implies \rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon \\ \implies \rho_Y(f(x), A) \rightarrow 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \end{aligned}$$

Гейне \implies Коши

От противного. Пусть нашлся ε , для которого нет δ .

$$\delta = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in E \quad x_n \neq a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

$$\rho_X(x_n, a) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ но } \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Но мы знаем из определения по Гейне $\rho_Y(f(x_n), A) \rightarrow 0$

Противоречие.

Следствие. Предел единственен.

Теорема 2.15. $f : E \rightarrow Y \quad E \subset X \quad a$ – предельная точка E .

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Тогда $\exists B_r(a)$, т.ч. функция на $B_r(a)$ ограничена.

Доказательство. $\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad x \neq a \text{ и } \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < 1$

$$r := \delta \quad f(\overset{\circ}{B}_r(a) \cap E) \subset B_1(a)$$

$$f(B_r(a) \cap E) \subset B_R(A) \quad R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\} \quad \square$$

Теорема 2.16 (об арифметических действиях с пределами). $f, g : E \rightarrow Y \quad E \subset X$

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – нормированное пространство.

a – предельная точка множества E .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

Тогда

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda A$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$$

$$4. \quad \text{Если } \alpha : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lambda, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = \lambda A$$

5. Если в Y есть скалярное произведение, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$$

Теорема 2.17 (Критерий Коши). $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, Y – полное.

$f : E \rightarrow Y \quad E \subset X$ и a – предельная точка множества E .

Существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

\iff

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad x \neq a \quad \forall y \in E \quad y \neq a \quad \rho_X(x, a) < \delta \quad \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Доказательство. “ \implies ”

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad x \neq a \quad \forall y \in E \quad y \neq a \quad \rho_X(x, a) < \delta \quad \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon \quad \rho_Y(f(y), A) < \varepsilon$$

$$\implies \rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), A) + \rho_Y(A, f(y)) < 2\varepsilon$$

“ \impliedby ”

Проверим определение по Гейне. Возьмем $x_n \in E \quad x_n \neq a \quad x_n \rightarrow a$.

Проверим, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность в Y .

Возьмем ε и выберем по нему $\delta > 0$ из условия критерия Коши.

$$\implies \exists N \quad \forall n, m \geq N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta \quad \rho_X(x_m, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

$$\implies \{f(x_n)\} \text{ – фундаментальная последовательность в } Y.$$

$$\implies \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ т.к. } Y \text{ – полное.}$$

Если на разных последовательностях оказались разные пределы, то смешаем их, будет та сходящаяся последовательность. Отсюда узнаем, что пределы функции от них должны были быть равны. \square

Определение 2.24. $f : E \rightarrow Y \quad E \subset X \quad a \in E$

f непрерывна в точке a , если либо a – изолированная точка, либо a – предельная точка множества E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Замечание. $f : E \rightarrow Y \quad E \subset X$ и непрерывна в точке a .

$$g : \tilde{E} \rightarrow Z \quad \tilde{E} \supset f(E) \text{ и непрерывна в точке } f(a).$$

Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Теорема 2.18. $f : X \rightarrow Y$

$$f \text{ непрерывна на } X \iff$$

$$\forall \text{ открытого в } Y \text{ множества } U \quad f^{-1}(U) \text{ открыто в } X.$$

Доказательство. “ \implies ”

$$V := f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

Хотим доказать, что V открыто. Берем $a \in V$.

$$\implies f(a) \in U \text{ – открытое множество.}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

$$\text{По непрерывности в точке } a \quad \exists \delta > 0 \quad f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

А это определение непрерывности в “шариках”.

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

$$\implies B_\delta(a) \subset V, \text{ т.е. } a \text{ – внутренняя точка множества } V.$$

$$\implies \text{все точки множества } V \text{ – внутренние} \implies V \text{ открыто.}$$

“ \impliedby ”

Берем $a \in X$. Надо проверить непрерывность в точке a .

$$U := B_\varepsilon(f(a)) \text{ – открытое множество.}$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ открыто. } a \in f^{-1}(U).$$

$$\implies \exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a)) \text{ – это определение непрерывности в точке } a. \quad \square$$

Теорема 2.19. Непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство. $f : X \rightarrow Y$ $K \subset X$ K – компакт.

$\implies f(K)$ – компакт.

Возьмем покрытие $f(K) \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ открытыми множествами

$V_{\alpha} := f^{-1}(U_{\alpha})$ – открытые множества.

Это покрытие $K \subset \bigcup V_{\alpha}$

(если $x \in K$, но $x \notin V_{\alpha} \forall \alpha$, то $f(x) \in f(K)$, но $f(x) \notin U_{\alpha}$)

$\implies \exists V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$

$\implies f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n f(V_{\alpha_j}) = \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ – конечное покрытие. □

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие теорема Вейерштрасса. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ $K \subset X$ непрерывна $\implies \exists u, v \in K$, т.ч. $\forall x \in K \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v)$

Доказательство. $f(K)$ – компакт. \implies замкнут и ограничен.

Раз ограничен, то $\inf f(K)$ и $\sup f(K)$ – конечные числа.

Пусть $b := \sup f(K)$ и $b \notin f(K)$.

$\implies \exists y_n \in f(K) \quad y_n \rightarrow b$.

b – предельная точка $\implies b \in Cl f(K) = f(K)$.

$\implies \exists v \in K \quad f(v) = b$.

Аналогично найдем a . □

Теорема 2.20. $f : X \rightarrow Y$.

f – непрерывная, биекция, X – компакт.

Тогда

$f^{-1} : Y \rightarrow X$ – непрерывно.

Доказательство. $g := f^{-1}$ и надо проверить, что $\forall U$ – открыто в X .

$f(U) = g^{-1}(U)$ – открыто.

$f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта, значит и сам компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – замкнуто.

$\implies Y \setminus f(X \setminus U)$ – открыто. □

Определение 2.25. $f : E \rightarrow Y$ $E \subset X$

f равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E$ и $\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Теорема 2.21 (Кантора). $f : K \rightarrow Y$ K – компакт, f – непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного.

Пусть нашлось $\varepsilon > 0$, для которого не походит ни одно $\delta > 0$.

$\delta = \frac{1}{n}$. Оно не подошло, т.е. $\exists x_n, y_n \in K \ \rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$

x_n – последовательность точек из компакта K .

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность

$a := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$.

$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 \ \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$

$\implies \rho_X(y_{n_k}, a) \leq \rho_X(x_{n_k}, a) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$

$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$

По непрерывности функции f в точке a .

$\exists \delta > 0 \ \forall \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\rho_X(x_{n_k}, a) \rightarrow 0, \ \rho_X(y_{n_k}, a) \rightarrow 0$

$\implies \exists$ номер, для которого $\rho_X(x_n, a) < \delta, \ \rho_X(y_n, a) < \delta$

$\implies \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \varepsilon \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leq \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) + \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \varepsilon$

А так не бывает. □

Определение 2.26. X – линейное пространство и $\|\cdot\|$ и $\|\|\cdot\|\|$ – нормы в X .

Эти нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$, т.ч.

$$C_1 \|x\| \leq \|\|x\|\| \leq C_2 \|x\| \quad \forall x \in X$$

Замечание. Сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

$x_n \rightarrow a$ в смысле $\|\cdot\| \implies \|x_n - a\| \rightarrow 0$

$x_n \rightarrow a$ в смысле $\|\|\cdot\|\| \implies \|\|x_n - a\|\| \rightarrow 0$

$$C_1 \|x_n - a\| \leq \|\|x_n - a\|\| \leq C_2 \|x_n - a\|$$

Теорема 2.22. В \mathbb{R}^d все нормы эквивалентны.

Доказательство. $\|\cdot\|$ – стандартная норма.

$p(x)$ – другая норма, e_k – элемент стандартного базиса пространства (стоит 1 на месте k).

$$p(x - y) = p\left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)e_k\right) \leq \sum_{k=1}^d p((x_k - y_k)e_k) = \sum_{k=1}^d |x_k - y_k| p(e_k) \leq \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\sum_{k=1}^d p(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C \|x - y\|$$

Правое неравенство доказано.

$\implies p(x)$ – непрерывная функция.

S – единичная сфера в \mathbb{R}^d – компакт.

p достигает на S наименьшего значения.

Это значение $\neq 0$ и неотрицательно $\implies > 0$.

$$\min_{x \in S} p(x) =: C_1 > 0$$

$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| \cdot p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\| \cdot C_1$, т.к. $\frac{x}{\|x\|}$ – точка на сфере S .

Левое неравенство доказали. □