Математический анализ

Никифоровская Анна

13 апреля 2017 г.

Содержание

1. 5. Интегральное исчисление функций от одной переменной.

1.1. §3. Свойства определенного интеграла

Теорема 1.1 (линейность определенного интеграла).

$f, g \in C[a,b] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство.

F – первообразная f.

G – первообразная g.

$\implies \alpha F + \beta G$ – первообразная $\alpha f + \beta g$.

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) =$$
$$= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g \qquad \square$$

Теорема 1.2 (ф-ла интегрирования по частям).

$u, v \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v$$

Доказательство.

$\int uv' = uv - \int u'v$

F – первообразная $u'v \implies (uv - F)$ – первообразная uv'. (Проверка дифференцированием: $(uv - F)' = u'v + uv' - u'v = uv'$)

$$\int\limits_a^b uv' = (uv - F)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - F\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v \qquad \square$$

Теорема 1.3 (ф-ла замены переменной).

$f \in C\langle a,b\rangle \quad \varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a,b\rangle$ – непрерывная дифференцируемая.

$p, q \in \langle \alpha, \beta\rangle$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx$$

Соглашение. С этого места и далее $a > b \quad \int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f$

Доказательство.

F – первообразная для $f \implies F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx \qquad \square$$

Пример.

$$\int\limits_2^3 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \begin{bmatrix} \varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t \end{bmatrix} = \int\limits_2^3 \frac{\frac{1}{2}\varphi'(t)\,dt}{1+\varphi^2(t)} = \int\limits_4^9 \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_4^9 = \frac{\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 4}{2}$$

Пример.

$$W_n := \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$$

$$W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t(\sin t)'\,dt = \cos^{n-1} t \sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} t)' \sin t\,dt =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t\,dt = (n-1)(\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t\,dt - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt)$$

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \implies nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Следствие (Формула Валлиса).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство.

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos^{2n+2} t \leqslant \cos^{2n+1} t \leqslant cos^{2n} t$

Проинтегрируем. Получим $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$

$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}$

И левая, и правая часть стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$

Тогда по непрерывности $\sqrt{\cdot}$, получаем:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ □

Следствие.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство.

$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^n2^n} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ □

Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.**

$f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle$ и $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Доказательство.

Индукция по n.

База $n = 0$.

$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^x f'(t)\,dt$ – формула Ньютона-Лейбница для f'.

Индукционный переход. $n \to n+1$

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = -\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)'\,dt = -\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)((x-t)^{n+1})'\,dt =$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!}\left((f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1})\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{(n+1)}\,dt\right) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt$$

На самом деле уже получили то, что надо.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt \qquad \square$$

Лемма (в помощь Ламберту)**.**

$$H_j = \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j\cos x\,dx$$

1. $H_j > 0$ $H_j \leqslant \frac{1}{j!}\int\limits_{0}^{\pi/2}((\frac{\pi}{2})^2)^j\cos x\,dx = \frac{1}{j!}(\frac{\pi}{2})^{2j}$

2. При любом $c > 0$ $c^j H_j \to 0$ при $j \to \infty$

   Доказательство.
   $0 < c^j H_j \leqslant \frac{1}{j!}(\frac{\pi^2 c}{4})^j \to 0.$

   (Некогда уже доказывали, что $\frac{c^j}{j!} \to 0$) $\square$

3. $H_0 = \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx = 1$

   $$H_1 = \int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - \int\limits_{0}^{\pi/2}x^2(\sin x)'\,dx = \frac{\pi^2}{4} - x^2\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + 2\int\limits_{0}^{\pi/2}x\sin x\,dx =$$

   $$= -2\int\limits_{0}^{\pi/2}x(\cos x)'\,dx = -2(x\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx) = 2$$

4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

   Доказательство.

   $$j!H_j = \int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j(\sin x)'\,dx = ((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^j\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + 2j\int\limits_{0}^{\pi/2}x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\sin x\,dx =$$

   $$= -2j\int\limits_{0}^{\pi/2}x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}(\cos x)'\,dx = -2j\Big(x((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\,dx +$$

   $$+ 2(j-1)\int\limits_{0}^{\pi/2}x^2((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x\,dx\Big) = 2j(2j-1)\int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-1}\cos x\,dx -$$

   $$- 2j\cdot 2(j-1)(\tfrac{\pi}{2})^2\int\limits_{0}^{\pi/2}((\tfrac{\pi}{2})^2 - x^2)^{j-2}\cos x\,dx = 2j(2j-1)(j-1)!H_{j-1} - j(j-1)\pi^2(j-2)!H_{j-2}$$

$\implies H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

В доказательстве в определенный момент воспользовались идеей $x^2 = -((\frac{\pi}{2})^2 - x^2) + (\frac{\pi}{2})^2$ □

5. Существует такой многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$

   Доказательство.

   Будем доказывать по индукции.

   База. $j = 0, j = 1$

   $H_0 = 1, H_1 = 2$ – многочлены степени 0 с целыми коэффициентами.

   Индукционный переход.

   $j-1, j-2 \to j$

   $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2} = (4j-2)P_{j-1}(\pi^2) - \pi^2 P_{j-2}(\pi^2)$

   Скажем тогда, что $P_j(x) = (4j-2)P_{j-1}(x) - xP_{j-2}(x)$ □

Теорема 1.5 (Теорема Ламберта)**.**
π и π^2 – иррациональны.

Доказательство.

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Тогда

$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j(\frac{m}{n}) = \frac{\text{целое}}{n^j}$

$\implies n^j H_j$ – целое и положительное число.

$\implies 1 \leqslant n^j H_j \to 0$. (стремится к нулю по одному из пунктов предыдущей леммы)

Противоречие. Значит, π^2 число иррациональное.

Тогда и число π иррациональное. □

1.2. §4. Интегральные суммы

***Определение* 1.1.**
$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in E \ \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание.
Равномерная непрерывность влечет за собой непрерывность во всех точках.

***Определение* 1.2.**
$f : E \to \mathbb{R}$ липшицева (с константой M), если $\forall x, y \in E \implies |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$

Замечание.
Липшицевость $\implies$ равномерная непрерывность.

$\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

Пример.
$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – равномерно непрерывны.

Пример.
$f(x) = x^2 \ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не равномерно непрерывна.

Доказательство.

$\varepsilon := 1$ Возьмем $x, y \ |x - y| < \delta$, например, x и $y = x + \frac{\delta}{2}$

$1 > |f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \delta/2)^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > x\delta$

Получаем противоречие, т.к. это число может быть больше единицы при $x > \frac{1}{\delta}$ □

Теорема 1.6 (Теорема Кантора)**.**

$f \in C[a, b] \implies f$ – равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

Возьмем это ε и зафиксируем.

$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n, y_n \in [a, b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$

По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

$c := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a, b]$

$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \to c$

$\implies \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = c.$

Эта функция непрерывна в точке c.

$\implies \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}) = f(c)$

$\lim\limits_{k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(\lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k}) = f(c)$

$0 \longleftarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon$

Получили противоречие – константа стремиться к нулю не может. □

***Определение* 1.3.**

$f : E \to \mathbb{R}$

$w_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \quad |x - y| \leqslant \delta\}$

– модуль непрерывности функции f.

Свойства.

1. $w_f(0) = 0$
2. w_f монотонно возрастает.
3. $w_f \geqslant 0$
4. Если f – липшицева функция с константой M, то $w_f(\delta) \leqslant M\delta$

   Доказательство.

   $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \leqslant M\delta$, если $|x - y| \leqslant \delta$ □

5. $|f(x) - f(y)| \leqslant w_f(|x - y|)$
6. f – равномерно непрерывна $\iff w_f$ – непрерывна в нуле. ($\lim\limits_{\delta \to 0+} w_f(\delta) = 0$)

Доказательство.
"$\implies$"

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E\quad |\,x - y\,| < \delta \implies |\,f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$

Если $|\,x - y\,| \leqslant \frac{\delta}{2}$, то $|\,f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$.

Тогда $w_f(\frac{\delta}{2}) = \sup\{|\,f(x) - f(y)\,| : x, y \in E\quad |\,x - y\,| \leqslant \frac{\delta}{2}\} \leqslant \varepsilon$

$w_f(\frac{\delta}{2}) \leqslant \varepsilon$

Т.е. сейчас получили, что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall 0 < \alpha < \frac{\delta}{2}\quad w_f(\alpha) \leqslant \varepsilon$

– это определение предела $\lim\limits_{\alpha \to 0+} w_f(\alpha) = 0$.

"$\Longleftarrow$"

Пусть $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad w_f(\delta) < \varepsilon$

Если $|\,x - y\,| \leqslant \delta$, то $|\,f(x) - f(y)\,| \leqslant w_f(\delta) < \varepsilon$ $\square$

7. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in C[a, b] \iff w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$.

Доказательство.
$f \in C[a, b] \iff f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \iff$ (по свойству 6) $w_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$. $\square$

***Определение* 1.4.**
Дробление (разбиение, пунктир) отрезка $[a, b]$ – это такой набор точек, что

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$

Мелкость(ранг) дробления – это $\max\limits_{k=1,2,...,n} (x_k - x_{k-1})$

$|\,\tau\,|$ – мелкость дробления.

Оснащение дробления – набор точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Сумма Римана(интегральная сумма)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и оснащенное дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема 1.7 (об интегральных суммах)**.**
$f \in C[a, b]$

Тогда $\left|\int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| \leqslant (b - a) w_f(|\,\tau\,|)$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt)$$

$$|\,\Delta\,| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k))\, dt\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f(t) - f(\xi_k)\,|\, dt \leqslant$$

$|\, t-\xi_k \,| \leqslant |\, x_k - x_{k-1} \,| \leqslant |\, \tau \,|$

$\implies |\, f(t) - f(\xi_k) \,| \leqslant w_f(|\, \tau \,|)$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} w_f(|\, \tau \,|)\, dt = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) w_f(|\, \tau \,|)\, dt = (b-a) w_f(|\, \tau \,|)$ $\square$

Следствие.

1. $f \in C[a,b]$. Тогда

   $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и любого его оснащения ξ

   $\implies \left| \int\limits_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

2. $f \in C[a,b]$. Тогда для любой последовательности дроблений τ_n, для которой $|\, \tau_n \,| \to 0$ и любой последовательности их оснащений ξ_n

   $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, \tau_n, \xi_n) = \int\limits_a^b f$

Пример.

$1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p =: S_p(n)$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} = \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p < S_p(n) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^p$

Введем интегральную сумму...

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \ f(x) = x^p$

$\xi_k = \frac{k}{n} = x_k$

Мелкость этих дроблений $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

***Определение* 1.5.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall$ дробления τ и мелкости $< \delta$ и любого его оснащения ξ

$\implies |\, I - S(f, \tau, \xi) \,| < \varepsilon$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$

I – это её интеграл Римана.

Теорема 1.8 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a,b]$. Тогда:

$\left| \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \frac{|\, \tau \,|^2}{8} \int\limits_a^b |\, f'' \,|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$\left| \int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n} (\frac{f(x_0)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2}) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int\limits_a^b |\, f'' \,|$

Лемма.

$\int\limits_\alpha^\beta f - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta - t)\, dt$

Доказательство. (леммы.)

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})'\,dt = f(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt =$$

$$= f(\beta)\tfrac{\beta-\alpha}{2} + f(\alpha)\tfrac{\beta-\alpha}{2} - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \tfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\tfrac{\alpha+\beta}{2})\,dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$$ □

Доказательство. (теоремы.)

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \Big(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\Big) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt$$

$$|\,\Delta\,| \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f''(t)\,|\,(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\,f''(t)\,|\,\tfrac{|\tau|^2}{4}\,dt = \tfrac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |\,f''\,|$$

□

Теорема 1.9 (Формула Эйлера-Маклорена, частный случай).

$f \in C^2[m,n]\ \ m,n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \tfrac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Доказательство.

$n = m+1$

$$f(m)+f(m+1) = \tfrac{f(m)+f(m+1)}{2} + \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

$$f(m) = \tfrac{f(m)-f(m+1)}{2} + \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Суммируем от m до $n-1$.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \tfrac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(m) = ...$

Надо доказать ф-лу:

$$\tfrac{f(m)+f(m+1)}{2} = \int\limits_m^{m+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^{m+1} f''(t)(t-m)(m+1-t)\,dt$$

А это в точности лемма, которая уже была. □

Пример.

1. $S_p(n) = 1^p + 2^p + ... + n^p$

   $f(t) = t^p\ \ f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

   $S_p(n) = \tfrac{1+n^p}{2} + \int\limits_1^n t^p\,dt + \tfrac{p(p-1)}{2}\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) + \frac{p(p-1)}{2} \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Если $p \in (-1, 1)$, то $\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant C$.

Действительно.

$\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} - \frac{n^{p-1}}{1-p} \leqslant \frac{1}{1-p}$

И получили, что

$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

Если $p > 1$:

$\int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\,dt = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$

$\implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$

2. Гармонические числа. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

   $f(t) = \frac{1}{t}$ $f''(t) = \frac{2}{t^3}$ $m = 1$

   $H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\{t\}(1-\{t\})\,dt = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \ln n + a_n$

   Последовательность a_n монотонно возрастает.

   $a_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\,dt \leqslant \int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{2}$

   $\implies$ (т.к. a_n возрастает и ограничена сверху) a_n имеет предел $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

   Получаем, что:

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1) = \ln n + (\frac{1}{2} + a) + o(1)$

   $\frac{1}{2} + a =: \gamma$ – постоянная Эйлера.

   $\gamma \approx 0,5772156649...$

3. Формула Стирлинга.

   $\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$.

   $f(t) = \ln t$ $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ $m = 1$

   $\ln(n!) = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int\limits_1^n \ln t\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt$

   $\int\limits_1^n \ln t\,dt = t\ln t\Big|_1^n - \int\limits_1^n t(\ln t)'\,dt = n\ln n - n + 1$

   $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b_n$

   b_n монотонно возрастают.

   $b_n = \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{t})\Big|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant 1$

   $\implies$ у b_n есть предел b.

   $b_n = b + o(1)$

   $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 + b + o(1)$

$n! = \exp(n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1 - b + o(1)) = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} e^{o(1)} =$
$= n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} (1 + o(1)) \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}$

Хотим понять, что такое $e^{1-b} = c$.

$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} c}{(n^n e^{-n} \sqrt{n} c)^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2n} c}{\sqrt{n}^2 c^2} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} c}$

$\implies \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} c}$

$\implies c = \sqrt{2\pi}$

Итого формула Стирлинга:

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

1.3. §5. Несобственные интегралы

***Определение* 1.6.**

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$

$f \in C[a, b)$

$\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

$-\infty \leqslant a < b < +\infty$

$f \in C(a, b]$

$\lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^b f(x)\,dx$

Если этот предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^b f(x)\,dx$

А если он еще и конечен, то скажем, что интеграл сходится. В противном случае расходится.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

$\left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \right| = \left| \int\limits_c^b f \right| \leqslant \int\limits_c^b |f| \leqslant \int\limits_c^b M = M(b - c) \to 0$ при $c \to b-$

Теорема 1.10 (Критерий Коши сходимости интегралов)**.**

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

$\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{b} \in (a, b): \;\; \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \quad \left| \int\limits_c^d f \right| < \varepsilon$

Доказательство.

“$\implies$”

$\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c = \int\limits_a^b f$ – конечен.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall c \in (b-\delta, b) \quad \left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon$

Аналогично получаем для $d \in (b-\delta, b) \quad \left| \int\limits_a^d f - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon$

$\left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^d f \right| \leqslant \left| \int\limits_a^c f - \int\limits_a^b f \right| + \left| \int\limits_a^b f - \int\limits_a^d f \right| < 2\varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

$F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{b} \in (a, b) \;\; \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |\, F(c) - F(d) \,| < \varepsilon$

$\tilde{b} = b - \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall c, d \in (b-\delta, b) \implies |\, F(c) - F(d) \,| < \varepsilon$

Это критерий Коши для $\lim\limits_{c \to b-} F(c)$. $\square$

Следствие.

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} d_n = b$

и $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int\limits_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \to b \implies \exists N \;\; \forall n > N \;\; c_n, d_n > \tilde{b}$

$\implies \left| \int\limits_{c_n}^{d_n} f \right| < \varepsilon.$

Значит, $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$, что противоречит условию. $\square$

Замечание.

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty.$

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F.

$\int\limits_a^c f = F(c) - F(a)$

Существование $\int\limits_a^b f$ – существование $\lim\limits_{c \to b-} (F(c) - F(a)) = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b(слева)

Соглашение. Если F не определена в точке b, считать, что

$F\Big|_a^b := \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int\limits_a^b f$ существует, то $\int\limits_a^b f = F\Big|_a^b$

Пример.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1}\Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim\limits_{c\to+\infty} \ln x\Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$

   $p = 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \to +\infty$

   Тогда интеграл расходится.

   Если $p \neq 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \to \frac{1}{p-1}$, если $p > 1$

   Если же $p < 1$, то $\to +\infty$.

   Получили, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to 0+} \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p}$

   Если $p = 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x\Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$

   Значит, интеграл расходится.

   Если же $p \neq 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$

   Если $p > 1 \implies \to +\infty$

   Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

   Получили, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

Свойства.

$f \in C[a, b) \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$

1. Аддитивность.

   $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \forall c \in (a, b) \quad \int\limits_c^b f$ сходится.

   Доказательство.

   $\int\limits_a^b f$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: \int\limits_a^b f$

   $\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B f \implies \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_c^B f$

   Вот и получили, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$. ☐

2. $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \int\limits_c^b f \to 0$ при $c \to b-$.

   $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

   $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f$

   $\implies \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. Линейность. $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся $\implies \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

   И $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $\int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g$ при $B \to b-$
   $\implies$ предел конечен и

   $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ $\square$

Замечание.
$\int\limits_a^b f$ сходится $\int\limits_a^b g$ расходится $\implies \int\limits_a^b (f \pm g)$ расходится.
Доказательство – от противного.

Свойства (продолжение).

4. Монотонность $f, g \in C[a, b)$ $f \leqslant g \implies \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $c \in [a, b) \implies f, g \in C[a, c]$

   $\int\limits_a^c f \leqslant \int\limits_a^c g$

   Переходим к пределу в неравенстве. $c \to b-$

   $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   $\square$

5. Интегрирование по частям.

   $f, g \in C^1[a, b) \implies \int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

   (Если существуют два предела из трех, то существует и третий и равенство верно)

Доказательство.

$c \in [a, b)\ \ f, g \in C^1[a, c]$

$\int\limits_a^c fg' = fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g$

Теперь напишем предел $c \to b-$

$\implies \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c fg' = \lim\limits_{c \to b-} (fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g) = \lim\limits_{c \to b-} fg\Big|_a^c - \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f'g$

□

6. Замена переменной.

$f \in C[a, b)\ \ \varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ и φ непрерывна и дифференцируема. $c := \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma)$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

(Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны)

Доказательство.

$F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\,dx \quad y \in [a, b)$

$\Phi(\gamma) = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$

$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

Если существует предел в правой части. Т.е. $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

Тогда $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - \Phi(\alpha)$

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$\lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

$a \leqslant \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

Теперь надо понять, что $\lim\limits_{y \to c-} F(y) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

Возьмем $\gamma_n \to \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to c$ оба стремятся слева

$F(c_n) \to \lim\limits_{y \to c} F(y)$

$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma)$

Случай второй. Существует $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Т.е. существует $\lim\limits_{\gamma\to\beta-}\Phi(\gamma)$

Если $c<b$, то $f\in C[\varphi(a),c]$ и $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{c} f(x)\,dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c=b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n\to\beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n)\to b$

Пусть $y_n\to b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists\delta_n\in[\alpha,\beta)\ \ \varphi(\delta_n)=y_n$.

$\varphi(\alpha)\leqslant y_n\leqslant\varphi(\gamma_m)$

$\implies$ по непрерывности φ существует $\delta_n\in[\alpha,\gamma_m]$, т.ч. $y_n=\varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n\to\beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k}<\beta-\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$.

$\varphi:[\alpha,\beta-\varepsilon]\to[a,b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k})\leqslant\varphi(p)<b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k}\to b$.

Тогда $F(y_n)=F(\varphi(\delta_n))=\Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Замечание.

$f\in C[a,b)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Сделаем замену. $x=b-\frac{1}{t}$. Тогда

$\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b-\frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.3.1. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

$f\geqslant 0\ \ f\in C[a,b)$

Интересуемся сходимостью $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Теорема 1.11.

$f\geqslant 0\ \ f\in C[a,b)\ \ F(y)=\int\limits_a^y f(x)\,dx$

Сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности F.

Доказательство.

$F(y_2)-F(y_1)=\int\limits_a^{y_2} f-\int\limits_a^{y_1} f=\int\limits_{y_1}^{y_2} f\geqslant 0$

$\implies F$ монотонно возрастает.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{y\to b} F(y) - F(a)$

Но для монотонных функций существование предела равносильно ограниченности. □

Следствие.

1. $0 \leqslant f \leqslant g \;\; f, g \in C[a,b)$

   Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то и $\int\limits_a^b f$ сходится.

   Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то и $\int\limits_a^b g$ расходится.

   Доказательство.
   $F(y) := \int\limits_a^y f \;\; G(y) := \int\limits_a^y g$

   $F \leqslant G$ на $[a,b)$ (по монотонности интеграла)

   $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies G$ ограничена сверху.

   $\implies F$ ограничена сверху $\implies F$ ограничена $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.

   (Второй пункт – переформулировка) □

2. $f \geqslant 0 \;\; f \in C[a,+\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \quad \varepsilon > 0$.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f$ – сходится.

   Доказательство.
   $f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

   Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

   $\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится. □

   Замечание.
   Неравенства $f \leqslant g$ или $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ могут выполняться лишь при достаточно больших x.

   (Выкинем начало, на сходимость не повлияет)

3. $f, g \geqslant 0 \;\; f, g \in C[a,b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

   Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

   (или оба сходятся, или оба расходятся)

   Доказательство.
   $f = \varphi g$, где $\varphi(x) \to 1$, при $x \to b-$.

   $\implies$ существует такое c, что при $x \geqslant c \;\; \frac{1}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant 2$

   $\implies \frac{g}{2} \leqslant f = \varphi g \leqslant 2g$ при $x \geqslant c$

$\implies$ если $\int\limits_c^b g$ сходится, то $\int\limits_c^b f$ сходится. (и наоборот)

А значит, и $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково. $\square$

Замечание.

$f \geqslant 0 \ \ f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$.

1.3.2. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.

***Определение* 1.7** (Абсолютная сходимость.).

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |\, f\,|$ сходится.

Теорема 1.12.

Если $\int$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство.

$F(c) = \int\limits_a^c f = \int\limits_a^c f_+ - \int\limits_a^c f_-$

$\Phi(c) = \int\limits_a^c |\, f\,| = \int\limits_a^c f_+ + \int\limits_a^c f_-$

$\int\limits_a^c f_+ =: F_1(c)$

$\int\limits_a^c f_- =: F_2(c)$

Знаем, что $\Phi(c)$ сходится. Значит, Φ ограничена сверху.

$\Phi = F_1 + F_2,\ F_1 \geqslant 0\ F_2 \geqslant 0 \implies F_1$ и F_2 ограничены.

$\implies \int\limits_a^b f_+$ и $\int\limits_a^b f_-$ сходятся $\implies \int\limits_a^b f$ сходится по линейности. $\square$

Следствие.

$\left|\int\limits_a^b f\right| \leqslant \int\limits_a^b |\, f\,|$, если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится.

Доказательство.

$-|\, f\,| \leqslant f \leqslant |\, f\,|$

и монотонность интеграла $\square$

Теорема 1.13 (признак Дирихле).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists K:\ \left|\int\limits_a^y f\right| \leqslant K$ при всех y.

2. g монотонна.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$ (В другом случае тоже верно, но нам доказывать не стали)

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^y fg = Fg\Big|_a^y - \int\limits_a^y Fg'$

Посмотрим на $F(y)g(y)$.

$|\,F(y)g(y)\,| \leqslant K\,|\,g(y)\,| \to 0$.

Получаем, что первое слагаемое точно имеет предел.

Покажем, что $\int\limits_a^{+\infty} Fg'$ сходится.

Для этого проверим, что он абсолютно сходится.

Пусть g монотонно возрастает.

$\int\limits_a^{+\infty} |\,Fg'\,|$

$|\,Fg'\,| = |\,F\,|\,g' \leqslant Kg'$.

Т.е. надо понять, что $\int\limits_a^{+\infty} Kg'$ сходится.

$\int\limits_a^y Kg' = Kg(y) - Kg(a) \to -Kg(a)$ □

Теорема 1.14 (признак Абеля)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ –сходится
2. $|\,g(x)\,| \leqslant K \;\; \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле.

g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ и $|\,A\,| \leqslant K$

$\widetilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\implies \exists$ конечный $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y f(x)\,dx \implies \int\limits_a^y f(x)\,dx$ ограничена в окрестности $+\infty$ (т.е. при $y \geqslant b$).

Но при $y \in [a, b]$ она ограничена, т.к. непрерывна.

Т.е. показали, что f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx$ – сходится

$fg = fA + f\widetilde{g}$ и $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} fA + \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$ $\square$

Следствие.

$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T.

g монотонна и стремится к 0 на бесконечности, и $\int\limits_a^{+\infty} |\,g(x)\,|\,dx$ расходится.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$

Доказательство.

"$\Longleftarrow$"

$F(y) := \int\limits_a^{y} f(x)\,dx = \int\limits_{a+kT}^{y} f(x)\,dx = \int\limits_a^{y-kT} f(x)\,dx$

$a \leqslant y - kT \leqslant a + T$.

Т.е. множество значение $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a+T]$ совпадает.

Но F непрерывна $\implies$ ограничена на $[a, a+T]$

$\implies F$ ограничена на $\mathbb{R}$

$\implies$ по принципу Дирихле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

"$\implies$"

Докажем, что если $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx =: A \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится.

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ – периодическая.

$\int\limits_a^{a+T} \tilde{f} = \int\limits_a^{a+T} f - \int\limits_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0.$

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится.

Но $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g + A\int\limits_a^{+\infty} g$

Получили, что одно слагаемое сходится, а другое расходится(т.к. хвост знакопостоянен, а $\int\limits_a^{+\infty} |\,g\,|$ расходится и g монотонна)

$\square$

Пример.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

Случай 1.

$p > 1$ $\frac{|\sin x|}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p}$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится

$\Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ – абсолютно сходится.

Случай 2.

$0 < p \leqslant 1$

$\sin x$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \to 0$ и монотонна.

$\Longrightarrow$ по следствию признака Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \neq 0$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^p}$ сходится $\iff \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$

(Т.к. если $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится, то пользуемся $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$, если же расходится, то есть следствие из признака Дирихле)

$\Longrightarrow$ нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$p \leqslant 0$

Воспользуемся критерием Коши.

$\int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi}{3}$

$\Longrightarrow$ нет сходимости.

2. 6. Метрические и нормированные пространства

2.1. §1. Открытые и замкнутые множества

***Определение* 2.1.**
(X, ρ) – метрическое пространство, если $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример.

1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |\, x - y \,|$
2. $\mathbb{R}^2$ $\rho(x, y)$ – длина отрезка xy.
3. X $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{если } x = y \\ 1 & \text{если } x \neq y \end{cases}$
4. Множество – сфера. Расстояние – дуги.
5. Манхэттенская метрика. $\mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

   $\rho(x, y) = |\, x_1 - y_1 \,| + |\, x_2 - y_2 \,|$
6. Французская железнодорожная метрика. Есть город Париж и радиальные дороги от него. Больше никто никак между собой не связан.

   Если A и B лежат на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

   Если A и B лежат на разных лучах, то $\rho(A, B) = AP + BP$

   Упражнение – проверить, что это метрика.

***Определение* 2.2.**
Открытый шар радиуса r с центром в точке a $B_r(a) = \{x \in X : \ \rho(x, a) < r\}$.

Замкнутый шар радиуса r с центром в точке a $\overline{B}_r(a) = \{x \in X : \ \rho(x, a) \leqslant r\}$

Свойства.

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. Если $a \neq b$, то $\exists r > 0$

   $B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing$

   Доказательство.
   Возьмем радиус $r := \frac{\rho(a,b)}{3}$. Он подходит.

   От противного. Пусть пересекаются, т.е. $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$

   $\implies \rho(x, a) < r,\ \rho(x, b) < r \implies \rho(a, b) \leqslant \rho(x, a) + \rho(x, b) < 2r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$

   Получили противоречие. $\square$

***Определение* 2.3.**

$A \subset X$ – метрическое пространство.

$a \in A$ – внутренняя точка, если $\exists r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset A$

***Определение* 2.4.**

Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства открытых множеств.

1. $\varnothing, X$ – открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
4. $B_r(a)$ – открытое множество.

Доказательство.

2. A_α – открытые, $\alpha \in I$.

   $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

   Возьмем $a \in A$, тогда $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$

   A_β открытое $\implies \exists r > 0 \;\; B_r(a) \subset A_\beta \subset A$

3. $A_1, A_2, ..., A_n$ – открытые. $A := \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$

   Возьмем $a \in A \implies a \in A_k \;\; \forall k = 1, .., n$

   A_k – открытое $\implies \exists r_k > 0 \;\; B_{r_k}(a) \subset A_k$

   $r := \min\{r_1, r_2, ..., r_n\} > 0 \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k$

   $\implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A$

4. Пусть $x \in B_r(a)$

   Возьмем $\tilde{r} := r - \rho(x, a) > 0$

   Проверим, что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$.

   Возьмем $y \in B_{\tilde{r}}(x) \implies \rho(y, x) < \tilde{r} = r - \rho(x, a)$

   $\rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < \tilde{r} + \rho(x, a) = r$

$\square$

Замечание.

Конечность в третьем свойстве существенна.

$A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$

***Определение* 2.5.**

Внутренность множества $int\, A$ – множество всех внутренних точек A

(другое обозначение – $\mathring{A}$)

Свойства.

1. $int\,A \subset A$
2. $int\,A$ – объединение всех открытых множеств, содержащихся в A.
3. $int\,A$ – открытое множество.
4. $int\,A = A \iff A$ открыто
5. $A \subset B \implies int\,A \subset int\,B$
6. $int\,(A \cap B) = int\,A \cap int\,B$
7. $int\,(int\,A) = int\,A$

Доказательство.

2. $G := \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открытое из A.

   Надо доказать, что $int\,A = G$

   "$\supset$"

   Берем $x \in G \implies x \in U_\alpha \subset A \implies \exists r > 0\ :\ \ B_r(x) \subset U_\alpha \subset A$

   $\implies x$ – внутренняя точка $\implies x \in int\,A$

   "$\subset$"

   Берем $x \in int\,A \implies \exists r > 0\ \ B_r(x) \subset A$

   $B_r(x)$ – открытое множество, которое содержится в A и содержит x.

   $\implies x \in G$.

3. По пункту 2 $int\,A$ – объединение открытых множеств $\implies$ открыто

4. "$\implies$"

   $int\,A$ открыто по пункту 3 $\implies A$ открыто.

   "$\impliedby$"

   A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies int\,A = A$.

6. "$\subset$"

   $A \cap B \subset A\ \ int\,(A \cap B) \subset int\,A$

   $A \cap B \subset B\ \ int\,(A \cap B) \subset int\,B$

   $\implies int\,(A \cap B) \subset int\,A \cap int\,B$

   "$\supset$"

   $x \in int\,A \cap int\,B \implies x \in int\,A\,,\ x \in int\,B \implies B_{r_1}(x) \subset A,\ \ B_{r_2}(x) \subset B$

   $\implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies x \in int\,(A \cap B)$

7. $int\,A$ открыто $\implies int\,(int\,A) = int\,A$ по пункту 4.

$\square$

***Определение* 2.6.**

Замкнутое множество.

$A \subset X$ – замкнутое, если $X \setminus A$ – открытое.

Свойства.

1. $\varnothing,\ X$ – замкнутое.
2. Пересечение любого семейства замкнутых множеств – замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
4. $\overline{B}_r(a)$ – замкнутое множество.

Доказательство.

2. $A_\alpha \implies X \setminus A_\alpha =: B_\alpha$ – открытое.
   $\implies B := \bigcup B_\alpha$ – открыто
   $X \setminus B = \bigcap (X \setminus B_\alpha) = \bigcap A_\alpha$ – замкнуто.
3. $X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$ – открыто.
4. $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X :\ \rho(x,a) > r\}$ – открыто?
   Возьмем $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$
   $\tilde{r} := \rho(x,a) - r$
   $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \varnothing$
   От противного. Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) \implies$
   $\rho(y,x) < \tilde{r}$ и $\rho(y,a) \leqslant r$
   $\implies \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a) < \tilde{r} + r = \rho(x,a)$
   Противоречие.

$\square$

Замечание.

В пункте 3 существенна конечность.

$\mathbb{R}\ \ A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$

$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$ – не является замкнутым.

***Определение* 2.7.**

Замыкание множества A – $Cl\, A$ (другое обозначение – $\overline{A}$)

– пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Свойства.

1. $A \subset Cl\, A$
2. $Cl\, A$ – замкнутое множество

3. $Cl\,A = A \iff A$ – замкнуто
4. $A \subset B \implies Cl\,A \subset Cl\,B$
5. $Cl\,(A \cup B) = Cl\,A \cup Cl\,B$
6. $Cl\,(Cl\,A) = Cl\,A$

Теорема 2.1.
$Cl\,A = X \setminus int\,(X \setminus A)$

Доказательство. (теоремы)
$X \setminus Cl\,A = int\,(X \setminus A)$
$int\,(X \setminus A) = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset X \setminus A$ и открыт.
$X \setminus int\,(X \setminus A) = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha}(X \setminus U_\alpha) = Cl\,A$
$X \setminus U_\alpha \supset A$ и замкнуто. □

Доказательство. (свойств)

3. $Cl\,A = A \iff X \setminus A = X \setminus Cl\,A \ \ (= int\,(X \setminus A))$
   $\iff X \setminus A = int\,(X \setminus A) \iff X \setminus A$ – открыто $\iff A$ замкнуто.
4. $A \subset B \implies X \setminus B \subset X \setminus A \implies int\,(X \setminus B) \subset int\,(X \setminus A)$
   $\implies X \setminus int\,(X \setminus A) \subset X \setminus int\,(X \setminus B)$
   $\implies Cl\,A \subset Cl\,B$

□

Пример в $\mathbb{R}$.
$int\,[0,1] = (0,1)$
$Cl\,(0,1] = [0,1]$
$int\,\mathbb{Q} = \varnothing$
$Cl\,\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Упражнение. A, $\quad int\,(Cl\,(int\,(Cl\,...(A)...)))$. Какое количество различных множеств таким образом может быть получено?

Теорема 2.2.
$a \in Cl\,A \iff \forall r > 0 \ \ B_r(a) \cap A \neq \varnothing$

Доказательство.
“$\implies$”
Пусть для некоторого $r > 0 \ \ B_r(a) \cap A = \varnothing$
$\implies a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A \implies a$ – внутренняя точка $X \setminus A$
$\implies a \in int\,(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus int\,(X \setminus A) = Cl\,A$
Противоречие.
“$\impliedby$”

Пусть $a \notin Cl\,A = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$, где F_α – замкнуто и $\supset A$

$\implies$ существует β, что $a \notin F_\beta \supset A \implies a \in X \setminus F_\beta$ – открыто.

$\implies$ возьмем $r > 0$, т.ч. $B_r(a) \subset X \setminus F_\beta \subset X \setminus A$

$\implies B_r(a) \cap A = \varnothing$

Получили противоречие. □

Следствие.

$A \subset X$ и U – открытое множество, $U \cap A = \varnothing$

Тогда $U \cap Cl\,A = \varnothing$

Доказательство.

Если $x \in U \cap Cl\,A$, то $x \in U$ – открытое

$\implies$ для некоторого $r > 0$ $B_r(x) \subset U$

$\implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin Cl\,A$

Противоречие. □

***Определение* 2.8.**

Проколотая окрестность точки – шарик без центра.

$\mathring{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

***Определение* 2.9.**

$A \subset X$ a – предельная точка, если в любой проколотой окрестности точки a есть точка из A.

***Определение* 2.10** (Обозначения)**.**

A' – множество предельных точек A.

Свойства.

1. $Cl\,A = A \cup A'$
2. $A \subset B \implies A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4. A – замкнутое $\iff A' \subset A$

Доказательство.

1. $a \in Cl\,A \iff \forall r > 0 \;\; B_r(a) \cap A \neq \varnothing$

   $$\iff \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \notin A \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \;\; \forall r > 0 \end{array}\right.$$

   $$\iff \left[\begin{array}{c} a \in A \\ a \notin A, \text{ но } a \in A' \end{array}\right.$$

2. Пусть $a \in A'$. Тогда $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \;\; \forall r > 0$

   но $A \subset B \implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \;\; \forall r > 0 \implies a \in B'$

3. $A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$

   $B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$

   $\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$

   Обратное включение.

   Возьмем $x \in (A \cup B)'$. Пусть $x \notin A'$

   $\implies \exists r > 0 \ \mathring{B}_r(x) \cap A = \varnothing$

   Но $\mathring{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$

   $\implies \mathring{B}_r(x) \cap B \neq \varnothing \implies \forall R \geqslant r \ \ \mathring{B}_R(x) \cap B \neq \varnothing$

   Заметим, что сие верно и для радиусов, меньших r. Ведь для всех меньших радиусов будет верно $\mathring{B}_r(x) \cap A = \varnothing$. А значит, для них можно провести те же рассуждения.

4. A – замкнутое $\iff A = Cl\, A$. $(= A \cup A')$

   $\iff A = A \cup A' \iff A' \subset A$.

□

Теорема 2.3.
$a \in A' \iff \forall r > 0 \ \ B_r(a)$ содержит бесконечное множество точек из A.

Доказательство.
“$\implies$”

$a \in A' \implies \forall r > 0 \ \ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$

$\exists a \neq x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A \implies r > \rho(x_1, a) > 0$. Пусть $\rho(x_1, a) = r_1$.

$\implies \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \varnothing \implies \exists x_2 \in \mathring{B}_{r_1}(a) \cap A$ и $x_1 \neq x$.

$r_2 := \rho(a, x_2)$

Ну и делаем так далее.

“$\impliedby$”

Возьмем $B_r(a)$. $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек.

$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек, т.к. выкинули одну точку.

$\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \implies a$ – предельная точка. □

Следствие.
Конечное множество не содержит предельных точек.

Замечание.
Можно было выбирать последовательность x_n, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ и $\rho(x_n, a) \downarrow$

***Определение* 2.11.**
(X, ρ) – метрическое пространство. $Y \subset X$.

$(Y, \tilde{\rho})$ – подпространство метрического пространства X.

$\tilde{\rho} = \rho\Big|_{Y \times Y}$

Теорема 2.4 (об открытых и замкнутых множествах в подпространстве)**.**
(X, ρ) – метрическое пространство, Y – подпространство. Тогда

1. $A \subset Y$ – открыто в $Y \iff \exists G$ – открытое в X множество, т.ч. $A = G \cap Y$

2. $A \subset Y$ – замкнуто в $Y \iff \exists F$ – замкнутое в X множество, т.ч. $A = F \cap Y$

Доказательство.

1. "$\implies$"

   A – открыто в Y.

   $\forall a \in A \ \exists r(a) > 0 \ B^Y_{r(a)}(a) \subset A$

   $A = \bigcup\limits_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) \subset \bigcup\limits_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G$ – открыто в X.

   Это то самое G, которое нам надо.

   $B^Y_{r(a)}(a) = B^X_{r(a)}(a) \cap Y$

   $A = A \cap Y = \bigcup\limits_{a \in A} (B^X_{r(a)}(a) \cap Y) = G \cap Y$

   "$\impliedby$"

   Пусть $A = G \cap Y$. Возьмем $a \in A$, тогда

   $a \in G$ – открыто в $X \implies \exists r > 0 \ B^X_r(a) \subset G$.

   $\implies B^Y_r(a) = B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y = A$

   $\implies a$ – внутренняя точка $\implies A$ – открыто в Y.

2. A – замкнуто в $Y \iff Y \setminus A$ – открыто в Y

   $\iff \exists G$ – открыто в X, т.ч. $Y \setminus A = G \cap Y$

   $A = (X \setminus G) \cap Y$.

   И положим $F := X \setminus G$.

   И все получилось.

□

Пример.

$X = \mathbb{R} \ \ Y = [0, 2)$

$[0, 1)$ – открыто в Y.

$B^Y_r(0) = [0, r)$ при маленьких r.

$[1, 2)$ – замкнуто в Y.

$[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$

$[1, 2) = [1, 2] \cap [0, 2)$

***Определение* 2.12.**

X – линейное пространство (над $\mathbb{R}$).

Тогда норма $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\,\lambda\,| \, \|x\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \ \ \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Пример.

1. $X = \mathbb{R}$ $\|x\| := |\,x\,|$
2. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_\infty := \max\limits_{k=1,..,d} |\,x_k\,|$
3. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_1 := \sum\limits_{k=1}^{d} |\,x_k\,|$
4. $X = \mathbb{R}^d$ $\|x\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} |\,x_k\,|^2}$
5. $X = C[a,b]$

   $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\,f(x)\,|$

   Комментарий к неравенству треугольника.

   $\|f+g\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\,f(x)+g(x)\,| = |\,f(x_0)+g(x_0)\,| \leqslant |\,f(x_0)\,| + |\,g(x_0)\,| \leqslant$
   $\leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} |\,f(x)\,| + \max\limits_{x\in[a,b]} |\,g(x)\,| = \|f\| + \|g\|$

***Определение* 2.13.**

Скалярное произведение.

$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

1. $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\,\langle x,y\rangle$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ и $\forall x,y \in X$
3. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (Если над $\mathbb{C}$, то $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$)
4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

Пример.

1. $\mathbb{R}^d$ $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$
2. Если $w_1,..,w_d > 0$, то $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} w_k x_k y_k$
3. $C[a,b]$ $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$

Свойства скалярного произведения над $\mathbb{R}$.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\,\langle x,z\rangle + \mu\,\langle y,z\rangle$

   $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\,\langle x,y\rangle + \mu\,\langle x,z\rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского

   $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$

Доказательство.

$t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0$

$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geqslant 0$

Квадратный трехчлен относительно t

$\implies$ его дискриминант $\leqslant 0$

$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leqslant 0$

$\implies \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ □

Замечание.

Когда равенство?

Когда есть корень у трехчлена $\langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle \geqslant 0$ относительно t_0.

$\implies x + t_0 y = 0 \implies x = (-t_0) y$

3. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

Доказательство.

$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\,\lambda\,|^2 \langle x, x \rangle} = |\,\lambda\,| \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Неравенство треугольника.

$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$

$\langle x + y, x + y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$ – это неравенство Коши-Буняковского. □

Следствие.

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2}$ – норма.

Упражнение. Доказать, что норма по формуле выше задается некоторым скалярным произведением $\iff \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Свойства нормы.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ – метрика

   $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |\,(-1)\,|\,\|y - x\|$

   $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$

2. $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$ – надо доказать.

$\|y\| \leqslant \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\|$

$\|x\| \leqslant \|y\| + \|x - y\|$ □

***Определение* 2.14.**

Предел последовательности в метрическом пространстве.

(X, ρ) – метрическое пространство, $x_n \in X$.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geqslant N \;\; \rho(x_n, a) < \varepsilon$

***Определение* 2.15.**
$E \subset X$ – ограничено, если E содержится в каком-то шаре.

Свойства предела последовательности в метрическом пространстве.

1. Единственность предела.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \rho(x_n, a) \to 0$

   Доказательство.
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$
   Это просто и есть определение того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ □

3. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

   Доказательство.
   Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\rho(x_n, a) \to 0$
   $\implies \rho(x_n, a)$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.
   $\implies \exists R\ :\ \ \rho(x_n, a) \leqslant R$
   $\implies x_n \in \overline{B}_R(a)$ при всех n. □

4. Если a – предельная точка множества A, то $\exists\{x_n\} \subset A\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   Более того можно выбрать такую последовательность, что $\rho(x_n, a) \downarrow$

Теорема 2.5 (об арифметических свойствах в нормированном пространстве)**.**
X – пространство с нормой $\|\cdot\|$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda,\ \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},$
Тогда.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda a$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$
4. $\|x_n\| \to \|a\|$
5. Если есть скалярное произведение, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$

Доказательство.
$\|x_n - a\| \to 0$
$\|y_n - b\| \to 0$

1. $0 \leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \to 0$
   $\implies \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \to 0$

2. $\|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \leqslant \|\lambda_n (x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda) a\| \leqslant$
   $\leqslant |\,\lambda_n\,|\,\|x_n - a\| + |\,\lambda_n - \lambda\,|\,\|a\| \leqslant$

   λ_n – имеет предел $\implies$ ограничена $\implies$ $|\,\lambda_n\,| \leqslant K$

   $\leqslant K\|x_n - a\| + |\,\lambda_n - \lambda\,|\,\|a\| \to 0$

4. $|\,\|x_n\| - \|a\|\,| \leqslant \|x_n - a\| \to 0$

5. Для доказательства этого факта введем новую норму $|||\,a\,||| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ – уже показывали где-то, что это норма.

   Тогда верно, что

   $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|||\,x + y\,|||^2 - |||\,x - y\,|||^2)$

   $\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle = \langle x_n, y_n - b\rangle + \langle x_n - a, b\rangle =$
   $= \frac{1}{4}(|||\,x_n + y_n - b\,|||^2 - |||\,x_n - y_n + b\,|||^2 + |||\,x_n - a + b\,|||^2 - |||\,x_n - a - b\,|||^2) \to$
   $\to \frac{1}{4}(|||\,a\,|||^2 - |||\,a\,|||^2 + |||\,b\,|||^2 - |||\,b\,|||^2) = 0$

□

***Определение* 2.16.**
$\mathbb{R}^d \;\; x_n \in \mathbb{R}^d \;\; x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(d)})$

x_n покоординатно сходится к x_0,

если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)} \;\; \forall k = 1, 2, .., d$

Теорема 2.6.
В $\mathbb{R}^d$ покоординатная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство.
"$\implies$"

$\|x_n - x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{d} (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \to 0$

"$\impliedby$"

$0 \leqslant (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0$ □

2.2. §2. Компактность

***Определение* 2.17.**
$A \subset X \;\; U_\alpha \subset X \;\; \alpha \in I$

U_α образуют покрытие A, если $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$

***Определение* 2.18.**
U_α – открытое покрытие A (= покрытие открытыми множествами),

если это покрытие и все U_α – открытые множества.

***Определение* 2.19.**
$K \subset X$ – компакт (компактное множество), если из любого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2.7.

Пусть X – метрическое пространство, Y – его подпространство.

$K \subset Y$.

Тогда компактность K в метрическом пространстве X и в метрическом пространстве Y равносильны.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

Берем U_α – открытые множества из Y, образующие покрытие K.

Тогда $U_\alpha = Y \cap G_\alpha$, где G_α – открытые множества в X.

$K \subset \bigcup U_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$ – покрытие открытыми множествами из X.

$\Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \ : \ K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$

$\Longrightarrow K = K \cap Y \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \cap Y) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$

"$\Longleftarrow$"

Берем открытые множества G_α из X, которые покрывают K.

$\Longrightarrow K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y)$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, т.ч. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \cap Y) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$ □

Теорема 2.8.

K – компактное $\Longrightarrow$ K – замкнуто и ограничено.

Доказательство.

Ограниченность. Возьмем $a \in K$

$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ – покрытие открытыми множествами

Выберем конечное подпокрытие $B_{n_1}(a), .., B_{n_m}(a)$

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{n_j}(a) = B_r(a) \ \ r = \max\{n_1, ..., n_m\}$

Замкнутость. $X \setminus K$ – открыто?

Берем $a \in X \setminus K$ и хотим проверить, что лежит там вместе с окрестностью.

$x \in K$ и шар $B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) \not\ni a$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$

Выберем конечное подпространство.

$K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$

$B_r(a) \cap K = \varnothing$, где $r = \min\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$ □

Следствие из теоремы.

$\tilde{K} \subset K$

Если K – компакт и $\tilde{K}$ – замкнуто, то $\tilde{K}$ – компакт.

Доказательство.

$\tilde{K} \subset \bigcup U_\alpha$ – покрыто открытыми множествами

$\bigcup U_\alpha \cup (X \setminus \tilde{K})$ – покрытие открытыми множествами для K.

Можно выбрать конечное подпокрытие.

$\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K}$

$\implies \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \supset \tilde{K}$ – конечное подпокрытие. □

Теорема 2.9.

K_α – семейство компактов и любой конечный набор этих компактов имеет непустое пересечение.

Тогда $\bigcap K_\alpha \neq \varnothing$

Доказательство.

От противного. Пусть $\bigcap K_\alpha = \varnothing$

$K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_0} X \setminus K_\alpha$ – все множества в объединении открытые.

Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие.

$K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_j} = X \setminus \bigcap\limits_{j=1}^{n} K_{\alpha_j}$

$\implies \bigcap\limits_{j=0}^{n} K_{\alpha_j} = \varnothing$

Получили противоречие с условием, где сказано, что любое конечное покрытие не пусто. □

Следствие.

$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ – непустые компакты

$\implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов – самый маленький компакт.

$\implies \neq \varnothing$ □

***Определение* 2.20.**

$a, b \in \mathbb{R}^d$

$a = (a_1, a_2, ..., a_d)$

$b = (b_1, b_2, ..., b_d)$

Замкнутый параллелепипед $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_d, b_d)$

Теорема 2.10 (о вложенных параллелепипедах)**.**

$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset ...$ – замкнутые параллелепипеды.

$\implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$

Доказательство.

$P_n = [a^{(n)}, b^{(n)}]$

На самом деле есть цепочка вложенных отрезков

$[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \supset [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] \supset ...$

Тогда по теореме о вложенных отрезках $\exists c_k \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

$c = (c_1, c_2, ..., c_d) \in P_n \ \ \forall n$

$a_k^{(n)} \leqslant c_k \leqslant b_k^{(n)} \forall k \ \ \forall n$ $\square$

Теорема 2.11 (Гейне-Бореля)**.**

Замкнутый куб в $\mathbb{R}^d$ – компакт.

Доказательство.

K – замкнутый куб и $\bigcup U_\alpha$ – его покрытие открытыми множествами.

Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разобьем все стороны пополам. Получим 2^d кубиков. $\bigcup U_\alpha$ – покрытие каждого из них.

Найдется маленький кубик, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Назовем его K_1.

Каждую сторону этого кубика располовиним. Т.к. K_1 не покрывается конечным подпокрытием, то найдется меньший кубик, который тоже нельзя покрыть конечно. Обозначим его K_2.

Делаем так далее.

$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$

По теореме о вложенных параллелепипедах есть точка, которая принадлежит всем K_i.

Рассмотрим ее. $c \in \bigcap K_n$

Точка c покрыта каким-то U_{α_0}.

$\implies \exists r > 0 \ \ B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$

Длина ребра K_n – $\frac{l}{2^n}$

$\implies$ максимальное расстояние между точками $\sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n}$.

Эта штука стремится к 0.

$\implies$ найдется такой номер n, что $\sqrt{d} \cdot \frac{l}{2^n} < r$.

$\implies K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Но это противоречит тому, как мы выбирали кубики, т.к. нашлось множество одно, которое покрывает какой-то кубик целиком.

Получили, что куб – компакт. $\square$

Теорема 2.12 (о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$)**.**

$K \subset \mathbb{R}^d \implies$ следующие условия равносильны.

1. K – компакт.
2. K – замкнуто и ограничено.
3. Из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к точке из K.

Замечание.

Третье свойство называется секвенциальная компактность.

Доказательство.

1) $\implies$ 2) – было.

2) $\implies$ 1)

K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. (Куб замкнутен и компактен)

$\implies K$ – замкнутое подмножество компакта $\implies K$ – компактно.

1) $\implies$ 3)

Пусть есть какая-то последовательность точек $\{x_n\} \subset K$.

D – множество $\{x_n : n \in N\}$.

Есть два случая.

Если D конечно, то какая-то точка повторилась бесконечно много раз.

Возьмем подпоследовательность, состоящую из этой точки – она имеет предел.

D бесконечно. Тогда есть ситуация хорошая – когда там есть предельная точка. Обозначим ее a.

Там есть точка x_{n_1}.

$r_1 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), .., \rho(a, x_{n_1}), 1\}$

$B_{r_1}(a)$ содержит точку из последовательности. Назовем ее x_{n_2}.

$n_2 > n_1$

$r_2 := \min\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), .., \rho(a, x_{n_2}), \frac{1}{2}\}$

Делаем и так далее.

$n_1 < n_2 < n_2 < ... \;\; \rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$

$\implies \rho(a, x_{n_k}) \to 0$ и $x_{n_k} \to a$.

Поймем, что $a \in K$. a – предельная в $D \implies a \in Cl\, D \subset K$.

Пусть у D нет предельной точки. Тогда D замкнуто (т.к. $Cl\, D = D \cap D'$, где $D' = \varnothing$)

$\implies D$ – компакт. Покроем его шариками, каждый из которых содержит ровно одну точку.

$x_n \in D$ и это не предельная точка, ибо их нет.

$\implies \exists \mathring{B}_{r_n}(x_n)$ не содержит точек из D.

$\implies B_{r_n}(x_n)$ содержит ровно одну точку из D.

$\implies D \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$ – покрытие множествами, из которого не выбрать конечное подпокрытие.

Получили противоречие.

3) $\implies$ 2)

K – замкнуто. Пусть нет. Тогда $Cl\, K = K \cup K'$.

Возьмем такую $a \in Cl\, K \setminus K$. a – это предельная точка. Тогда $\exists x_1, x_2, ... \in K$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Но у любой подпоследовательности x_{n_k} будет тот же предел. Противоречие, т.к. по условию у любой последовательности из K должна быть подпоследовательность, имеющая предел в K.

Значит, K действительно замкнуто.

K ограничено. От противного. K не лежит в $B_n(0) \;\; \forall n$.

$\implies \exists x_n \in K \setminus B_n(0) \implies \rho(x_n, 0) \geqslant n$.

Пусть x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies x_{n_k}$ ограничена, а это не так.

$\square$

Замечание.

1) $\implies$ 3) доказана для произвольного метрического пространства.

3) $\implies$ 1) верна для произвольного метрического пространства. (Но это слишком сложно)

2) $\implies$ 1) для произвольного метрического пространства не верна.

Пример.

$\mathbb{R}$ с дискретной метрикой (лентяя)

$[0,1]$ – замкнуто и ограничено. Поймем, что нет компактности.

$[0,1] \subset \bigcup\limits_{x\in[0,1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$

Следствие.

$K \subset \mathbb{R}^d$ – компакт

$\implies$ всякое бесконечное множество точек из K имеет предельные точки, принадлежащие K.

Доказательство.

$x_1, x_2, x_3, ...$ – выбрали последовательность в этом бесконечном множестве.

А у нее есть предельная точка из K. $\square$

Теорема 2.13 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности точек из $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничена $\implies$ $\{x_n\} \subset \overline{B}_R(a)$ – замкнуто и ограничено $\implies$ компакт.

$\implies$ по пункту 3 из теоремы о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

***Определение* 2.21.**

(X, ρ) – метрическое пространство.

$x_1, x_2, x_3, ...$ – фундаментальная последовательность, если

$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

***Определение* 2.22.**

(X, ρ) – полное, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Замечание.

Фундаментальная последовательность ограничена.

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ – полное.
2. K – компакт в (X, ρ), то (K, ρ) – полное.

Доказательство.

1. Пусть x_n – фундаментальная последовательность. $\implies \{x_n\}$ ограничена.

   $\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность.

   $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

   Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   $\forall\varepsilon\ \ \exists M\ \ \forall k \geqslant M\ \ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$

   $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall m, n \geqslant N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

   Пусть $n \geqslant \max\{N, n_M\}$

   $\implies$ существует $n_k > n$. $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

   $\implies \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

2. x_n – фундаментальная последовательность в K

   $\implies$ существует x_{n_k} – сходящаяся подпоследовательность $\implies$ x_n – сходится.

□

2.3. §3. Непрерывные функции

***Определение* 2.23.**

(X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства.

$f : E \to Y \quad E \in X$.

a – предельная точка множества E.

$A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall a \neq x \in E$ и $\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$

Это было определение по Коши.

Запишем определение по Гейне.

$\forall x_n \in E,\ x_n \neq a\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теорема 2.14 (равносильность определения по Коши и по Гейне)**.**

Коши $\implies$ Гейне.

Берем $x_n \in E\ \ x_n \neq a\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \rho_X(x_n, a) \to 0$

$\implies \exists N\ \ \forall n \geqslant N\ \ \rho_X(x_n, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$

$\implies \rho_Y(f(x), A) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Гейне $\implies$ Коши

От противного. Пусть нашелся ε, для которого нет δ.

$\delta = \frac{1}{n}\ \ \exists x_n \in E\ x_n \neq a\ \ \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$, но $\rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon$

$\rho_X(x_n, a) \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но $\rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon$

Но мы знаем из определения по Гейне $\rho_Y(f(x_n), A) \to 0$

Противоречие.

Следствие.

Предел единственен.

Теорема 2.15.

$f : E \to Y \;\; E \subset X \;\; a$ – предельная точка E.

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Тогда $\exists B_r(a)$, т.ч. функция на $B_r(a)$ ограничена.

Доказательство.

$\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; x \neq a$ и $\rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < 1$

$r := \delta \;\; f(\mathring{B}_r(a) \cap E) \subset B_1(a)$

$f(B_r(a) \cap E) \subset B_R(A) \;\; R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\}$ □

Теорема 2.16 (об арифметических действиях с пределами)**.**

$f, g : E \to Y \;\; E \subset X$

(X, ρ) – метрическое пространство, Y – нормированное пространство.

a – предельная точка множества E.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$

Тогда

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda A$
3. $\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|A\|$
4. Если $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lambda$, то $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) f(x) = \lambda A$
5. Если в Y есть скалярное произведение, то

   $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle A, B \rangle$

Теорема 2.17 (Критерий Коши)**.**

$(X, \rho_X), \; (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, Y – полное.

$f : E \to Y \;\; E \subset X$ и a – предельная точка множества E.

Существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \; x \neq a \;\; \forall y \in E \; y \neq a \;\; \rho_X(x, a) < \delta \; \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Доказательство.

“$\implies$”

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \; x \neq a \;\; \forall y \in E \; y \neq a \;\; \rho_X(x, a) < \delta \; \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon \; \rho_Y(f(y), A) < \varepsilon$

$\implies \rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant \rho_Y(f(x), A) + \rho_y(A, f(y)) < 2\varepsilon$

“$\Longleftarrow$”

Проверим определение по Гейне. Возьмем $x_n \in E \; x_n \neq a \;\; x_n \to a$.

Проверим, что $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность в Y.

Возьмем ε и выберем по нему $\delta > 0$ из условия критерия Коши.

$\implies \exists N \;\; \forall n, m \geqslant N \;\; \rho_X(x_n, a) < \delta \; \rho_X(x_m, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

$\implies \{f(x_n)\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, т.к. Y – полное.

Если на разных последовательностях оказались разные пределы, то смешаем их, будет та сходящаяся последовательность. Отсюда узнаем, что пределы функции от них должны были быть равны. □

***Определение* 2.24.**

$f : E \to Y \;\; E \subset X \;\; a \in E$

f непрерывна в точке a, если либо a – изолированная точка, либо a – предельная точка множества E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Замечание.

$f : E \to Y \; E \subset X$ и непрерывна в точке a.

$g : \tilde{E} \to Z \;\; \tilde{E} \supset f(E)$ и непрерывна в точке $f(a)$.

Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Теорема 2.18.

$f : X \to Y$

f непрерывна на $X \iff$

$\forall$ открытого в Y множества $U \;\; f^{-1}(U)$ открыто в X.

Доказательство.

“$\implies$”

$V := f^{-1}(U) = \{x \in X \;:\; f(x) \in U\}$

Хотим доказать, что V открыто. Берем $a \in V$.

$\implies f(a) \in U$ – открытое множество.

$\exists \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(f(a)) \subset U$

По непрерывности в точке a $\exists \delta > 0 \;\; f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

А это определение непрерывности в “шариках”.

$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$

$\implies B_\delta(a) \subset V$,. т.е. a – внутренняя точка множества V.

$\implies$ все точки множества V – внутренние $\implies V$ открыто.

“$\impliedby$”

Берем $a \in X$. Надо проверить непрерывность в точке a.

$U := B_\varepsilon(f(a))$ – открытое множество.

$\implies f^{-1}(U)$ открыто. $a \in f^{-1}(U)$.

$\implies \exists \delta > 0 \;\; B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\implies f(B_\delta(a)) \subset U = B_\varepsilon(f(a))$ – это определение непрерывности в точке a. □

Теорема 2.19.

Непрерывный образ компакта – компакт.

Доказательство.

$f : X \to Y \;\; K \subset X \;\; K$ – компакт.

$\implies f(K)$ – компакт.

Возьмем покрытие $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ открытыми множествами

$V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ – открытые множества.

Это покрытие $K \subset \bigcup V_\alpha$

(если $x \in K$, но $x \neq V_\alpha \;\; \forall \alpha$, то $f(x) \in f(K)$, но $f(x) \notin U_\alpha$)

$\implies \exists V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n} \;\; K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{\alpha_j}$

$\implies f(K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} f(V_{\alpha_j}) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ – конечное покрытие. □

Следствие.

Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие теорема Вейерштрасса.

$f : K \to \mathbb{R} \;\; K \subset X$ непрерывна $\implies \exists u, v \in K$, т.ч. $\forall x \in K \;\; f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$

Доказательство.

$f(K)$ – компакт. $\implies$ замкнут и ограничен.

Раз ограничен, то $\inf f(K)$ и $\sup f(K)$ – конечные числа.

Пусть $b := \sup f(K)$ и $b \notin f(K)$.

$\implies \exists y_n \in f(K) \;\; y_n \to b$.

b – предельная точка $\implies b \in Cl\, f(K) = f(K)$.

$\implies \exists v \in K \;\; f(v) = b$.

Аналогично найдем a. □

Теорема 2.20.

$f : X \to Y$.

f – непрерывная, биекция, X – компакт.

Тогда

$f^{-1} : Y \to X$ – непрерывно.

Доказательство.

$g := f^{-1}$ и надо проверить, что $\forall U$ – открыто в X.

$f(U) = g^{-1}(U)$ – открыто.

$f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$

$X \setminus U$ – замкнутое подмножество компакта, значит и сам компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – компакт.

$\implies f(X \setminus U)$ – замкнуто.

$\implies Y \setminus f(X \setminus U)$ – открыто. □

***Определение* 2.25.**

$f : E \to Y \;\; E \subset X$

f равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in E$ и $\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Теорема 2.21 (Кантора).

$f : K \to Y \ \ K$ – компакт, f – непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

От противного.

Пусть нашлось $\varepsilon > 0$, для которого не походит ни одно $\delta > 0$.

$\delta = \frac{1}{n}$. Оно не подошло, т.е. $\exists x_n, y_n \in K \ \ \rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$

x_n – последовательность точек из компакта K.

$\implies \exists x_{n_k}$ – сходящаяся подпоследовательность

$a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

$\rho_X(x_{n_k}, a) \to 0 \ \ \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$

$\implies \rho_X(y_{n_k}, a) \leqslant \rho_X(x_{n_k}, a) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$

$\implies \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = a$

По непрерывности функции f в точке a.

$\exists \delta > 0 \ \ \forall \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\rho_X(x_{n_k}, a) \to 0, \ \ \rho_X(y_{n_k}, a) \to 0$

$\implies \exists$ номер, для которого $\rho_X(x_n, a) < \delta, \ \rho_X(y_n, a) < \delta$

$\implies \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \varepsilon \leqslant \rho_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_j}), f(a)) + \rho_Y(f(y_{n_j}), f(a)) < \varepsilon$

А так не бывает. $\square$

***Определение* 2.26.**

X – линейное пространство и $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ – нормы в X.

Эти нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0$, т.ч.

$C_1\|x\| \leqslant |||\,x\,||| \leqslant C_2\|x\| \ \ \forall x \in X$

Замечание.

Сходимости по эквивалентным нормам равносильны.

$x_n \to a$ в смысле $\|\cdot\| \ \ \|x_n - a\| \to 0$

$x_n \to a$ в смысле $|||\cdot||| \ \ |||\,x_n - a\,||| \to 0$

$C_1\|x_n - a\| \leqslant |||\,x - a\,||| \leqslant C_2\|x_n - a\|$

Теорема 2.22.

В $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.

Доказательство.

$\|\cdot\|$ – стандартная норма.

$p(x)$ – другая норма, e_k – элемент стандартного базиса пространства (стоит 1 на месте k).

$p(x - y) = p(\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - y_k)e_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} p((x_k - y_k)e_k) = \sum\limits_{k=1}^{d} |\,x_k - y_k\,| \, p(e_k) \leqslant (\sum\limits_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum\limits_{k=1}^{d} p(e_k)^2)^{\frac{1}{2}} = C\|x - y\|$

Правое неравенство доказано.

$\implies p(x)$ – непрерывная функция.

S – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ – компакт.

p достигает на S наименьшего значения.

Это значение $\neq 0$ и неотрицательно $\implies > 0$.

$\min\limits_{x \in S} p(x) =: C_1 > 0$

$p(x) = p(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|) = \|x\| \cdot p(\frac{x}{\|x\|}) \geqslant \|x\| \cdot C_1$, т.к $\frac{x}{\|x\|}$ – точка на сфере S.

Левое неравенство доказали. □

2.4. §4. Линейные операторы

***Определение* 2.27.**

X, Y – линейные пространства. $A : X \to Y$

A – линейный оператор, если

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \forall x, y \in X \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Свойства.

1. $A(0_X) = 0_Y$

   Доказательство.
   $A(0_X) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y$ □

2. $A(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$

   Доказательство.
   По индукции. □

***Определение* 2.28.**

$A, B : X \to Y$

$(A \pm B)(x) := A(x) \pm B(x)$

$(\lambda A)(x) := \lambda \cdot A(x)$

Замечание.

Такими операция получили снова линейные операторы.

Доказательство.

$(A+B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) = \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y)$ □

Замечание.

На самом деле сейчас получили, что операторы из X в Y образуют линейное пространство.

***Определение* 2.29.**

Композиция линейных операторов

$A : X \to Y,\ B : Y \to Z$

$(BA)(x) := B(A(x))$

Обратный оператор

$A^{-1}A = Id_X$ и $AA^{-1} = Id_Y$

$A^{-1} : Y \to X$

Свойства.

1. Композиция линейных операторов – линейный оператор.
2. Обратный оператор, если он существует, единственный.
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
4. Множество обратимых линейных операторов из X в X образуют группу относительно композиции.

Доказательство.

2. Пусть B и C – обратимые к A.

   $C = Id_X \circ C = (BA)C = BAC = B(AC) = B \circ Id_Y = B$

   $\implies B = C$

4. Id_X – единица.

   $A(B \circ C(x)) = A(B(Cx)) = A \circ B(Cx)$

   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

   $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}Id_X B = B^{-1}B = Id_X$

□

Замечание.

Важный частный случай. $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Матричная запись.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

A_i – линейное отображение, дающее i-ю координату Ax.

$a_{ik} = A_i \cdot e_k$, где

e_k – столбик нулей, на k-й позиции 1.

***Определение* 2.30.**

Норма оператора. $A : X \to Y$, X, Y – нормированные пространства.

$\|A\| := \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$

***Определение* 2.31.**

Если $\|A\| \neq \infty$, то A называется ограниченным оператором.

Замечание.

Ограниченный оператор и ограниченное отображение – совершенно разные вещи.

Ограниченное линейное отображение – лишь тождественный ноль.

Свойства.

1. $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = |\,\lambda\,|\,\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
4. $\|\cdot\|$ – норма в пространстве линейных ограниченных операторов.

Доказательство.

1. $\|A+B\| = \sup\|(A+B)x\| = \sup\|Ax+Bx\| \leqslant \sup(\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup\|Ax\| + \sup\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = \sup\|\lambda Ax\| = \sup|\,\lambda\,|\,\|Ax\| = |\,\lambda\,|\sup\|AX\| = |\,\lambda\,|\,\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \implies \sup\|Ax\| = 0 \implies \|Ax\| = 0 \;\; \forall x \;\; \|x\| \leqslant 1$

   Пусть $x \in X \;\; x = \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$

   $Ax = A(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|A(\frac{x}{\|x\|}) = 0$
4. Следует из предыдущих трех.

□

Теорема 2.23.

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{c > 0 \;:\; \|Ax\| \leqslant C\|x\| \text{ при всех } x \in X\}$

Доказательство.

Пронумеруем их $N_1, ...N_5$.

$N_1 = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$

$N_1 \geqslant N_2 \;\; N_1 \geqslant N_3$

$N_3 = N_4 \;\; \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| = \|\frac{1}{\|x\|}Ax\| = \|A(\frac{x}{\|x\|})\|$

$N_4 = N_5$

$N_4 = \sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|\lambda x\| \leqslant N_4\|x\|$

$N_2 \geqslant N_1$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Возьмем $x : \|x\| \leqslant 1 \implies \|\frac{x}{1+\varepsilon}\| < 1$

$\implies \|A(\frac{x}{1+\varepsilon})\| \leqslant N_2$

$\implies \frac{1}{1+\varepsilon}\|Ax\| \leqslant N_2$

$\implies \|Ax\| \leqslant (1+\varepsilon)N_2$

$\implies \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| \leqslant (1+\varepsilon)N_2$

$\implies N_1 \leqslant (1+\varepsilon)N_2$ и устремим ε к 0.

$N_5 \geqslant N_1$

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$\implies \|Ax\| \leqslant (N_5 + \varepsilon)\|x\|$

$\implies$ если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ax\| \leqslant N_5 + \varepsilon$

$\implies \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant N_5 + \varepsilon$

$\implies N_1 \leqslant N_5 + \varepsilon$ и устремим $\varepsilon \to 0$. □

Следствие.

1. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \;\; \forall x \in X$

2. $\|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$

   Доказательство.
   $\|BA\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|B(Ax)\| \leqslant \sup\limits_{\|y\| \leqslant \|A\|} \|By\| = \|A\| \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} \|By\| = \|A\|\|B\|$ □

Теорема 2.24.
$A : X \to Y$ – линейный оператор.

Тогда следующие условия равносильны:

1. A – ограниченный оператор.

2. A – непрерывен в 0.

3. A – непрерывен.

4. A – равномерно непрерывен.

Доказательство.
$4 \implies 3 \implies 2$ – очевидно.

$1 \implies 4$

$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leqslant \|A\|\|x - y\|$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \forall \|x - y\| < \delta \implies \|Ax - Ay\| < \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$2 \implies 1$

$A0_X = 0_Y$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \|x\| = \|x - 0_X\| < \delta \implies \|Ax\| = \|Ax - A0_X\| < \varepsilon$

Поймем, что $\|A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$

Если $\|x\| < 1$, то $\|\delta x\| < \delta \implies \|A(\delta x)\| < \varepsilon$

$\implies \delta\|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$ □

Теорема 2.25.
$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (говорим про стандартную норму, т.е. корень из суммы квадратов)

$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$

Доказательство.

$\|Ax\|^2$. Как эта штука устроена?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2) = \|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$ □

2.5. §5. Длина кривой

***Определение* 2.32.**

$\gamma : [a,b] \to X$, X – метрическое пространство. γ – непрерывно.

Тогда это отображение называется путём.

Начало пути – $\gamma(a)$.

Конец пути – $\gamma(b)$.

Носитель пути – $\gamma([a,b])$.

Замкнутый путь – $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Простой путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$.

Простой замкнутый путь – $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, если $t \neq s$, кроме точек a, b но $\gamma(a) = \gamma(b)$

Противоположный путь – $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, где $\tilde{\gamma} : [a,b] \to X$

Конец γ = начало $\tilde{\gamma}$

Начало γ = конец $\tilde{\gamma}$

Эквивалентные пути. $\gamma : [a,b] \to X$, $\tilde{\gamma} : [c,d] \to X$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$, если $\exists \tau : [a,b] \to [c,d]$ строго монотонна, непрерывна и $\tau(a) = c \ \ \tau(b) = d$, такое что $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau$.

Замечание.

Это действительно отношение эквивалентности.

$\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies \tilde{\gamma} \sim \gamma$, т.к. $\exists \tau^{-1}$ – обратная к τ, тоже строго монотонна, непрерывна и $\tau^{-1}(c) = a \ \ \tau^{-1}(d) = b$

Тогда $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \tau^{-1}$

$\gamma \sim \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\tilde{\gamma}}$

$\exists \tau \ \ \gamma = \tilde{\gamma}\tau \ \ \exists \tilde{\tau} \ \ \tilde{\gamma} = \tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tau}$

$\implies \gamma = \tilde{\gamma}\tau = \tilde{\tilde{\gamma}}\tilde{\tau}\tau$

***Определение* 2.33.**

Кривая – класс эквивалентных путей.

Представитель этого класса – параметризация кривой

Носитель кривой – носитель путей из этого класса.

***Определение* 2.34.**

Длина пути $l(\gamma)$.

$\gamma : [a,b] \to X$

Разобьем отрезок $[a, b]$ какими-то промежуточными точками.

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$

$l(\gamma) := \sup \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$

Замечание.

Длины эквивалентных путей равны, длины противоположных путей тоже равны.

***Определение* 2.35.**

Длина кривой – длина любого пути из класса эквивалентности.

Свойства.

1. $l(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$
2. $l(\gamma) \geqslant$ длине любой вписанной в нее ломаной.

Теорема 2.26 (об аддитивности длины кривой)**.**

$\gamma : [a, b] \to X \quad c \in (a, b)$

$\implies l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$

Доказательство.

"$\geqslant$"

Возьмем разбиение для $[a, c]$ $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c$

И разбиение для $[c, b]$ $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leqslant l(\gamma)$

Припишем sup по всем t. (От t зависит лишь одна сумма). Получим

$l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + \sum\limits_{j=1}^{m} \rho(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leqslant l(\gamma)$

Припишем sup по всем разбиениям s.

$l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]}) \leqslant l(\gamma)$

"$\leqslant$"

Снова возьмем разбиение. Только теперь – всего отрезка $[a, b]$

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

Возможно, одна из t_i попала на c. Тогда надо просто разбить и понять по отдельности.

А что если нет?

$\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leqslant$

Пусть $t_j < c < t_{j+1}$.

Заметим, что по неравенству треугольника $\rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leqslant \rho(\gamma(t_j), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{j+1}))$

Можем тогда добавить точку c в разбиение.

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) = \sum\limits_{k=1}^{j+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) + \sum\limits_{k=j+2}^{n+1} \rho(\gamma(\tilde{t}_{k-1}), \gamma(\tilde{t}_k)) \leqslant l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$

Переходим к sup по t и получаем:

$l(\gamma) \leqslant l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$ $\square$

Дальше кривые и пути в $\mathbb{R}^m$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

***Определение* 2.36.**

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

γ – r-гладкий путь, если все $\lambda_k \in C^r[a, b]$

Гладкий путь – $r = 1$.

Гладкая кривая, если в классе эквивалентности есть гладкая параметризация.

***Определение* 2.37.**

Кусочно гладкий путь – можно нарезать на конечное число кусочков, на каждом из которых путь гладкий.

Лемма.

γ – гладкий путь.

$\Delta \subset [a, b]$ – отрезок.

$m_\Delta^{(i)} := \min\limits_{t \in \Delta} |\, \gamma_i'(t)\, |$

$M_\Delta^{(i)} := \max\limits_{t \in \Delta} |\, \gamma_i'(t)\, |$

$m_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (m_{Delta}^{(i)})^2}$

$M_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (M_{Delta}^{(i)})^2}$

Тогда $m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_\Delta) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$

Доказательство.

Возьмем разбиение $\Delta : t_0, t_1, ..., t_n$

a_k – длина k-го звена ломаной. (От $\gamma(t_{k-1})$ до $\gamma(t_k)$)

$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma_i'(\xi_{ik})(t_k - t_{k-1})$ $\xi_{ik} \in (t_{k-1}, t_k)$ по теореме Лагранжа.

$|\, \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})\, | = |\, \gamma_i'(\xi_{ik})\, |\, (t_k - t_{k-1}) \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$

$a_k^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} |\, \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})\, |^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} (M_\Delta^{(i)})^2 (t_k - t_{k-1})^2$

$\implies a_k \leqslant M_\Delta(t_k - t_{k-1})$

Аналогично $a_k \geqslant m_\Delta(t_k - t_{k-1})$

$m_\Delta l(\Delta) = m_\Delta \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant M_\Delta \sum\limits_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = M_\Delta l(\Delta)$

А теперь переходим к sup по t.

$m_\Delta l(\Delta) \leqslant l(\gamma\Big|_\Delta) \leqslant M_\Delta l(\Delta)$ $\square$

Теорема 2.27.

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – гладкий путь.

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + ... + \gamma_m'(t)^2}\, dt = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Доказательство.

Рассмотрим разбиения $[a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$

$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$

Тогда уже знаем, что

$m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant l(\gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leqslant M_k(t_k - t_{k-1})$

Заметим, что так же верно будет и

$m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant M_k(t_k - t_{k-1})$

Теперь все сложим.

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

И

$\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$

Осталось понять, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \to 0$, когда мелкость разбиения $\to 0$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k}(t_k - t_{k-1}) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}}^2 - {m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}}^2}{M_k + m_k}(t_k - t_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} + m_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)}}{M_k + m_k}(M_{[t_{k-1}, t_k]}^{(i)} - m_{[t_k - t_{k-1}]}^{(i)})(t_k - t_{k-1}) \leqslant$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} (M_{[t_k - t_{k-1}]}^{(i)} - m_{[t_k - t_{k-1}]}^{(i)})(t_k - t_{k-1}) \leqslant$

Заметим, что $M_{[t_k - t_{k-1}]}^{(i)} - m_{[t_k - t_{k-1}]}^{(i)} \leqslant w_{\gamma_i'}(t_k - t_{k-1}) \leqslant w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|)$

$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|)(t_k - t_{k-1}) = (b - a) \sum\limits_{i=1}^{m} w_{\gamma_i'}(|\,\tau\,|) \to 0$ □

Следствие.

1. Длина графика функции. $f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

   $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$

   Доказательство.

   $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

   $\gamma_1'(t) = 1$

   $\gamma_2'(t) = f'(t)$ и подставим. □

2. Длина в полярных координатах.

   $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

   (по углу задаем длину, получаем путь, заданный полярными координатами)

   $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$

   Доказательство.

   $\gamma_1(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$

   $\gamma_2(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$

   $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$

   $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

   $\|\gamma'(\varphi)\| = ((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2$

   $\square$

3. $l(\gamma) \leqslant (b-a) \max\limits_{t\in[a,b]} \|\gamma'(t)\|$

   Доказательство.

   $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$ $\square$

***Определение* 2.38.**

Точка t_0, в которой $\gamma'(t_0) = 0$ называется особой точкой.

***Определение* 2.39.**

γ – кривая, имеющая конечную длину S.

Натуральная параметризация кривой

$\tilde{\gamma} : [0, S] \to X$, т.ч. $\forall s \in [0, S]$ $l(\tilde{\gamma}\Big|_{[0,s]}) = s$

Теорема 2.28.

Любая гладкая кривая без особых точек имеет натуральную параметризацию.

Доказательство.

γ – какая-то гладкая параметризация без особых точек.

$S = l(\gamma) \leqslant (b-a)\max\|\gamma'\|$, т.е. кривая имеет конечную длину.

$\tau : [a, b] \to [0, S]$

$\tau(t) = l(\gamma\Big|_{[a,t]})$

$\tau(a) = 0$ $\tau(b) = S$

Поймем, что τ строго монотонно возрастает и непрерывна.

$\tau(t) = \int\limits_a^t \|\gamma'(u)\|\, du$ – непрерывная функция.

$\tau'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \implies \tau$ строго монотонна.

$\implies$ существует τ^{-1}

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau^{-1}$ – натуральная параметризация.

Задана на том отрезке, на котором надо.

Надо понять, что такое $l(\tilde{\gamma}\Big|_{[}0, s]) = l(\gamma\tau^{-1}\Big|_{[}0, s]) = l(\gamma\Big|_{[}a, \tau^{-1}(s)]) =$

Если $\tau^{-1}(s) = t$, то

$= l(\gamma\Big|_{[a,t]}) = \tau(t) = \tau(\tau^{-1}(s)) = s$ □

Свойства натуральной параметризации.

Если γ – натуральная параметризация, то $\|\gamma'(t)\| = 1$

Доказательство.

$s = l(\gamma\Big|_{[0,s]}) = \int\limits_0^s \|\gamma'(t)\|\, dt$

Продифференцируем по s

$1 = \|\gamma'(t)\|$ □

Определение* 2.40*.

$E \subset X$ – линейно связное. (Часто слово линейно будет опускаться, т.к. других связностей не будет)

$\forall u, v \in E$ существует путь $\gamma : [a, b] \to E$, т.ч. u – его начало, а v – его конец.

Определение* 2.41*.

Область – открытое линейно связное множество.

Теорема 2.29.

Ω – область в $\mathbb{R}^m$. Тогда между любыми двумя ее точками существует ломаная, целиком содержащаяся в Ω и соединяющая эти точки.

Доказательство.

$u, v \in \Omega$

$\gamma : [a, b] \to \Omega$

$\gamma(a) = u \quad \gamma(b) = v$

$\gamma([a, b])$ – компакт.

У каждой точки пути можно выбрать шарик с центром в ней, что $B_{2r_x}(x) \subset \Omega$

Выберем конечное подпокрытие.

$B_{r_{x_1}}(x_1), ..., B_{r_{x_n}}(x_n)$ покрывают $\gamma([a, b])$

И

$\overline{B}_{r_{x_1}}(x_1), ..., \overline{B}_{r_{x_n}}(x_n) \subset \Omega$ (в силу уполовинивания радиуса)

$\gamma([a, b]) \cap \overline{B}_{r_{x_1}}(x_1)$

Тогда можно выбрать последнюю точку на пути из каждого шарика и построить по ним ломаную. □

Теорема 2.30 (Больцано-Коши)**.**

E – связное множество

$f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна

$a, b \in E \quad f(a) = A \quad f(b) = B$

Тогда $\forall C$ между A и B существует $c \in E$, т.ч. $f(c) = C$

Доказательство.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$ – кривая, соединяющая a и b.

$g := f \circ \gamma \quad g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция

$g(\alpha) = f(\gamma(\alpha)) = f(a) = A$

$g(\beta) = f(\gamma(\beta)) = f(b) = B$

$\implies$ существует $t \in [\alpha, \beta]$, т.ч. $f(\gamma(t)) = g(t) = C$

$c := \gamma(t) \in E$ $\square$