Математический анализ

Никифоровская Анна

13 февраля 2018 г.

Содержание

1. 8. Функции многих переменных

07.09.2017

1.1. §4. Экстремум функций

***Определение* 1.1.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in D$

a – точка минимума, если $\exists U_a$ – окрестность точки a, что

$\forall x \in D \cap U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$

a – точка максимума, если $\exists U_a$ – окрестность точки a, что

$\forall x \in D \cap U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$

a – точка строгого минимума, если $\exists U_a$ – окрестность точки a, что

$\forall x \in D \cap U_a \;\; x \neq a \quad f(x) > f(a)$

a – точка строгого максимума, если $\exists U_a$ – окрестность точки a, что

$\forall x \in D \cap U_a \;\; x \neq a \quad f(x) < f(a)$

Точка экстремума – точка минимума или точка максимума.

Теорема 1.1 (необходимые условия экстремума)**.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} D$

Пусть a – точка экстремума. Тогда

если $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

В частности, если f – дифференцируема в точке a, то

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

(т.е. $\operatorname{grad} f(a) = 0$)

Доказательство.

$\varphi(t) = f(a_1, ..., a_{k-1}, t, a_{k+1}, .., a_n)$

Пусть a – точка максимума. Тогда

$\exists U_a \;:\; f(x) \leqslant f(a) \;\; \forall x \in U_a$

$\implies$ a_k – точка максимума для функции φ.

$\implies$ (необходимое условие для функции одной переменной) Если φ дифференцируемо в a_k, то $\varphi'(a_k) = 0$.

А это означает, что если существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi'(a_k) = 0$ □

***Определение* 1.2.**

Если f дифференцируема в точке a и $\operatorname{grad} f(a) = 0$, то a – стационарная точка.

Утверждение 1.2 (Формула Тейлора в стационарной точке)**.**

$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k + o(\|h\|^2)$

***Определение* 1.3.**

$Q(h)$ – квадратичная форма, если $Q(h) = \sum\limits_{j,k=1}^{n} c_{jk}h_jh_k$ и $c_{jk} = c_{kj}$

Матрица $(c_{jk})_{j,k=1}^n$ – матрица квадратичной формы Q

***Определение* 1.4.**

Квадратичная форма $Q(h)$ положительно определена, если $\forall h \in \mathbb{R}^n \;\; Q(h) \geqslant 0$

Квадратичная форма отрицательно определена, если $\forall h \in \mathbb{R}^n \;\; Q(h) \leqslant 0$

Квадратичная форма строго положительно определена, если $\forall h \in \mathbb{R}^n \;\; h \neq 0 \;\; Q(h) > 0$

Квадратичная форма строго отрицательно определена, если $\forall h \in \mathbb{R}^n \;\; h \neq 0 \;\; Q(h) < 0$

Замечание.

1. $Q(h) = \langle Ch, h\rangle = h^TCh$, где C – матрица квадратичной формы.
2. $\lambda \in \mathbb{R} \;\; Q(\lambda h) = \lambda^2 Q(h)$

Лемма.

$Q(h)$ – строго положительно определенная квадратичная форма.

Тогда $\exists c > 0$, т.ч. $Q(h) \geqslant c\|h\|^2 \;\; \forall h \in \mathbb{R}^n$

Доказательство.

$Q(h) = Q(\|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}) = \|h\|^2 \cdot Q(\frac{h}{\|h\|})$

Рассмотрим q на единичной сфере. Это непрерывная функция на компакте.

Значит, существует точка h^*, в которой достигается наименьшее значение.

$Q(h) \geqslant Q(h^*) \;\; \forall h$ из единичной сферы.

Пусть $c := Q(h^*)$

Тогда получаем, что

$\|h\|^2 \cdot Q(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant c \cdot \|h\|^2$, что мы и хотели. □

Теорема 1.3 (достаточное условие экстремума)**.**

$f : D \to \mathbb{R} \;\; D \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} D$

f дважды дифференцируема в точке a, и a – стационарная точка.

Пусть $Q(h) := \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k$. Тогда

1. Если $Q(h)$ строго положительно определена, то a – точка строгого минимума.
2. Если $Q(h)$ строго отрицательно определена, то a – точка строгого максимума.
3. Если a – точка минимума, то Q нестрого положительно определена.
4. Если a – точка максимума, то Q нестрого отрицательно определена.

Доказательство.

$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2)$

1. $Q(h)$ строго положительно определена. Значит, по лемме $\exists c > 0$, т.ч. $Q(h) \geqslant c\|h\|^2$

   $f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2) = (\frac{c}{2} + o(1)) \cdot \|h\|^2$

при очень маленьких h $\frac{c}{2} + o(1) > 0$

$\implies f(a+h) - f(a) > 0 \implies a$ – точка минимума.

2. $f \rightsquigarrow -f$

3. $f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2}Q(th) + o(\|th\|^2)$. Зафиксируем h, $\|h\| = 1$

   $f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot Q(h) + o(t^2)$

   $0 \leqslant \frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{1}{2}Q(h) + o(1) \to \frac{Q(h)}{2}$

   $\implies Q(h) \geqslant 0$

   $\implies Q(th) = t^2 Q(h) \geqslant 0 \implies$ положительно определенна.

$\square$

Теорема 1.4 (критерий Сильвестра)**.**

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \det(c_{11}) > 0 \\ \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0 \\ \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} > 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$\iff$ квадратичная форма строго положительно определена

Если все знаки $\geqslant$ $\iff$ квадратичная форма положительно определена

1.2. §5. Обратные отображения.

Теорема 1.5.

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор. Тогда равносильны следующие условия:

1. A – обратим
2. $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$
3. $\det A \neq 0$
4. Если $Ax = 0$, то $x = 0$

Теорема 1.6.

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор и $\exists m > 0$, т.ч.

$\|Ax\| \geqslant m\|x\| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Тогда A – обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$

Доказательство.

Проверим пункт 4.

Пусть $Ax = 0 \implies 0 = \|Ax\| \geqslant m\|x\| \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$

$\implies A$ обратим.

$\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}(Ax)\| = \|x\| \leqslant \frac{\|Ax\|}{m} = \frac{\|y\|}{m}$

$\|A^{-1}\| = \sup\limits_{\|y\| \neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} \leqslant \sup\limits_{\|y\| \neq 0} \frac{\frac{\|y\|}{m}}{\|y\|} = \frac{1}{m}$

$\implies \|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$ □

Замечание.

$\|Ax\| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$

$\|x\| = \|A^{-1}(Ax)\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$

Теорема 1.7.

Ω – множество всех обратимых линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

$A \in \Omega \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$

B – линейный оператор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $\|B - A\| = \beta < \alpha$.

1. B – обратим.
2. $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$
3. Ω – открыто и отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно на Ω.

Доказательство.

1. $\|Bx\| = \|Ax - (A - B)x\| \geqslant \|Ax\| - \|(A - B)x\| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| - \|A - B\|\|x\| = (\alpha - \beta)\|x\| > 0$

   $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}$
2. $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$

   $\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\|A - B\|\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$
3. Ω – открыто.

   Если $A \in \Omega$, то шар радиуса $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ с центром в A содержится в Ω (пункт 1).

   Непрерывность.

   $A_n \to A \;\; A_n, A \in \Omega$

   $\overset{?}{\implies} A_n^{-1} \to A^{-1}$

   $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A_n - A\| \cdot \|A^{-1}\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|A_n - A\|} \to 0$

   Неравенство – по доказанному во втором пункте.

□

Теорема 1.8 (об обратной функции)**.**

$f : D \to \mathbb{R}^n \;\; D \subset \mathbb{R}^n \;\; D$ – открыто, f – непрерывно дифференцируема, $a \in D$, $d_a f$ – обратим. $b = f(a)$

Тогда:

1. Существуют окрестности U и V точек a и b такие, что $f : U \to V$ – биекция.

2. Если g – обратная функция к f, то g непрерывно дифференцируема в V.

Замечание.
$g(f(x)) = x$ при $x \in U$
$d_{f(x)}g \cdot d_x f = Id \quad d_{f(x)}g(d_x f(h)) = h \implies d_{f(x)}g(k) = h = (d_x f)^{-1}(k)$
$\implies d_{f(x)}g = (d_x f)^{-1}$

План доказательства.
$A := d_a f$
$\lambda = \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$
U – шар радиуса λ с центром в точке a.
Шаг 1. f – инъективно на U.
Шаг 2. $V = f(U)$ – открытое множество.
Шаг 3. Дифференцируемость g.
Шаг 4. Непрерывная дифференцируемость g. □

13.09.2017

Доказательство.
$A := d_a f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \lambda := \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$
U – шар, для которого $\|d_x f - d_a f\| < 2\lambda$
Шаг 1. $f\Big|_U$ – инъекция.
$x, x + h \in U$
$F(t) = f(x + th) - f(x) - t \cdot Ah \quad t \in [0, 1]$
$F(0) = 0 \quad F(1) = f(x + h) - f(x) - Ah$
F – дифференцируема.
$\implies$ по неравенству Лагранжа $\exists t_0 \in [0, 1] \ : \ \|f(x + h) - f(x) - Ah\| = \|F(1) - F(0)\| \leqslant$
$\leqslant \|F'(t_0)\| \cdot (1 - 0) = \|F'(t_0)\|$
$F'(t_0) = d_{x+t_0h}f \circ h - Ah = d_{x+t_0h}f(h) - d_a f(h)$
$\|F'(t_0)\| \leqslant \|d_{x+t_0h}f - d_a f\| \cdot \|h\| < 2\lambda\|h\|$
$\|f(x + h) - f(x) - Ah\| < 2\lambda\|h\| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|$
$\|f(x + h) - f(x)\| \geqslant \|Ah\| - \|f(x + h) - f(x) - Ah\| > \|Ah\| - \frac{1}{2}\|Ah\| = \frac{1}{2}\|Ah\| \geqslant 2\lambda\|h\|$
$\implies f$ – инъекция.
Шаг 2. $V := f(U) \ni b$ – открыто
Пусть $x_0 \in U$. Возьмем $r > 0$, т.ч. $\overline{B}_r(x_0) \subset U$
Докажем, что $f(U) \supset f(\overline{B}_r(x_0)) \supset B_{\lambda r}(f(x_0))$
Возьмем $y \in B_{\lambda r}(f(x_0))$. Рассмотрим $\varphi(x) := \|f(x) - y\|$ – непрерывная функция.
$\varphi(x_0) = \|f(x_0) - y\| < \lambda r$
$\overline{B}_r(x_0)$ – компакт $\implies \varphi$ принимает в какой-то точке x^* наименьшее значение.

Поймем, что оно не может достигаться на границе.

Рассмотрим точку на границе $x \;:\quad \|x - x_0\| = r$.

$\|f(x) - f(x_0)\| \geqslant 2\lambda\|x - x_0\| = 2\lambda r$

$\|f(x) - f(x_0)\| = \|(f(x) - y) - (f(x_0) - y)\| \leqslant \varphi(x) + \varphi(x_0) < \varphi(x) + \lambda r$

$2\lambda r < \varphi(x) + \lambda r$

$\implies \varphi(x) > \lambda r > \varphi(x_0) \implies$ на границе не минимум.

$\implies x^* \in B_r(x_0)$

x^* – минимум и функции φ^2 – дифференцируемая функция.

$\implies \operatorname{grad} \varphi^2(x^*) = 0$

$\varphi^2(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (f_k(x) - y_k)^2 \quad \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_j}(x^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} 2(f_k(x^*) - y_k)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^*)$

$B(f(x^*) - y) = 0$, где $B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) \\ \cdots & & \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} = (f'(x^*))^T$.

$f'(x^*)$ – обратима по предыдущей теореме $\implies B$ – обратима.

$\implies f(x^*) - y = 0$

$\implies y = f(x^*) \in f(\overline{B}_r(x_0)) \subset f(U)$.

Шаг 3. $g := (f\Big|_U)^{-1}$ – дифференцируемая функция.

$y, y + k \in V = f(U)$

Пусть $y = f(x) \;\; y + k = f(x + h)$

(т.е. $g(y) = x \quad g(y + k) = x + h$)

$g(y + k) = g(y) + d_y g(k) + o(\|k\|)$ – надо доказать.

$d_y g(k) = d_{f(x)} g(k) = (d_x f)^{-1}(k)$

Т.е. хотим доказать, что

$h = (d_x f)^{-1}(k) + o(\|k\|)$

Дифференцируемость f в точке x:

$f(x + h) = f(x) + d_x f(h) + r(h)$, где $r(h) = o(\|h\|)$

Т.е. знаем, что

$k = d_x f(h) + r(h) \implies (d_x f)^{-1}(k) = h + (d_x f)^{-1}(r(h))$

Осталось понять, что $(d_x f)^{-1}(r(h)) = o(\|k\|)$

$\|(d_x f)^{-1}(r(h))\| \leqslant \|(d_x f)^{-1}\| \cdot \|r(h)\| = \|(d_x f)^{-1}\| \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\| \leqslant$

Если $h \to 0$, то $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \to 0$.

Оценим $\|h\|$ через $\|k\|$.

$\|k\| = \|f(x + h) - f(x)\| > 2\lambda\|h\|$

$\leqslant \|(d_x f)^{-1}\| \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \cdot \|k\| = o(\|k\|)$

Шаг 4. Непрерывная дифференцируемость g.

$d_y g = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}$

$f^{-1}(y)$ – непрерывно зависит от y, значит и дифференциал непрерывно зависит от y.

А на множестве обратимых отображений переход к обратному непрерывен. Т.е. все непрерывно зависит от y.

$\square$

Замечание.

Рудин, Основы мат. анализа. Можно почитать это же доказательство там.

Следствие.

$f : D \to \mathbb{R}^n \;\; D \subset \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируема, D – открыто,

$d_x f$ – обратим $\forall x \in D$. Тогда $\forall W \subset D \;\; W$ – открыто $\implies f(W)$ открыто.

Доказательство.

W – открыто. $b \in f(W) \implies b = f(a)$ при $a \in W$.

Применяя теорему, получаем, что

$\exists U$ – окрестность точки a и $V = f(U)$ – окрестность точки b.

$U \subset W \implies V = f(U) \subset f(W)$. $\square$

***Определение* 1.5.**

$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in R^m \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$

Утверждение 1.9.

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение.

Если $A(h, 0_m) = 0_n \implies h = 0_n$, то уравнение $A(x, y) = b$ имеет единственное решение $\forall y \in \mathbb{R}^m$ и $\forall b \in \mathbb{R}^n$

Доказательство.

$A(x, y) = b$

$A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y)$

$A(x, 0) = b - A(0, y)$

Единственность. Если $A(x, 0) = b - A(0, y)$ и $A(\tilde{x}, 0) = b - A(0, y) \implies A(x - \tilde{x}, 0) = 0 \implies x - \tilde{x} = 0$

Существование.

$A(x, 0)$ – инъекция. $A(\circ, 0) \; : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\implies A(\circ, 0)$ – биекция (инъекция и совпадает размерность)

$\square$

Пример.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

***Определение* 1.6.**

Функции, задаваемые уравнениями – неявные функции.

Теорема 1.10 (о неявной функции)**.**

$f \; : D \to \mathbb{R}^n \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

f – непрерывно дифференцируема. $f(a, b) = 0 \;\; (a, b) \subset D$

$d_{(a,b)} f(h, 0) = 0 \implies h = 0.$

Тогда $\exists W$ – окрестность точки b и единственная функция

$g : W \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(b) = a, \;\; g$ непрерывна

$f(g(y), y) = 0 \ \ \forall y \in W$

Более того, такая функция g, будет непрерывно дифференцируема.

Доказательство.

$F(x,y) = (f(x,y), y) \quad F \ : \ \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ – непрерывно дифференцируема.

$A := d_{(a,b)} f$

$f(a+h, b+k) = f(a,b) + A(h,k) + r(h,k)$

$F(a+h, b+k) = F(a,b) + (A(h,k), 0) + (0,k) + (r(h,k), 0)$

Нужна обратимость $(A(h,k), k)$

$(A(h,k), k) = (0,0) \implies k = 0$ и $A(h,0) = 0 \implies h = 0$.

$\implies$ есть обратимость $d_{(a,b)}F$.

$\exists U$ – окрестность точки (a,b) и V – окрестность точки $F(a,b)$,

что $G \ : \ V \to U$ – обратная к F функция.

$F(a,b) = (f(a,b), b) = (0,b)$

Возьмем W – окрестность точки b, т.ч. $\{0\} \times W \subset V$

$F(x,y) = (f(x,y), y) = (z,w)$

$G(z,w) = (\varphi(z,w), w)$

Положим $g(w) := \varphi(0,w)$. Проверим, что подходит.

g определена на W, непрерывно дифференцируема.

$g(b) = \varphi(0,b) = a$, т.к. $F(a,b) = (0,b)$

$f(g(w), w) = f(\varphi(0,w), w) = f(G(0,w)) = 0$

Покажем единственность.

Если $f(x,y) = 0$ и $f(\tilde{x}, y) = 0$

$f(G(0,y)) = x$ и $f(G(0,y)) = \tilde{x}$

$\implies x = \tilde{x}$. ☐

14.09.2017

1.3. §6. Условный экстремум

***Определение* 1.7.**

$\Phi \ : \ D \to \mathbb{R}^m \ \ D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$f \ : \ D \to \mathbb{R}$

$a \in D$ и $\Phi(a) = 0$

a – точка условного локального максимума при условии $\Phi = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0$

$\implies f(x) \leqslant f(a)$

a – точка условного локального минимума, если

$\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0 \implies f(x) \geqslant f(a)$

Аналогично строгий условный максимум и строгий условный минимум.

Пример.

$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$

Теорема 1.11 (Метод неопределенных множителей Лагранжа)**.**

$\Phi : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad a \in D$ – открытое.

$\Phi(a) = 0$

$f : D \to \mathbb{R}$

Φ, f непрерывно дифференцируемы.

Если a точка условного экстремума, то $\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \Phi_1, \operatorname{grad} \Phi_2, ..., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Если $\operatorname{grad} \Phi_1, \operatorname{grad} \Phi_2, ..., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно зависимы, то теорема ничего не утверждает.

2. Если $\operatorname{grad} \Phi_1, .., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно независимы, то $\operatorname{grad} f = \lambda_1 \operatorname{grad} \Phi_1 + ... + \lambda_m \operatorname{grad} \Phi_m$

3. $\Phi'(a)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$

   Столбцы линейно независимы $\iff \operatorname{rank} \Phi'(a) = m$, т.е. максимально возможный.

Доказательство.

$\operatorname{rank} \Phi'(a) = m$. (Рассматривать линейную зависимость градиентов бессмысленно, как показано в замечании)

Перенумеруем координаты Φ так, чтобы определитель последней подматрицы $\neq 0$.

$a = (b, c) \;\; b \in \mathbb{R}^n \;\; c \in \mathbb{R}^m$

$A := \Phi'(a)$

$A(0, h) = 0 \implies h = 0$

По теореме о неявной функции $\exists W$ – окрестность точки b и непрерывно дифференцируемая функция $g : W \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi(w, g(w)) = 0 \;\; \forall w \in W$

$g(b) = c$

Пусть a – точка условного максимума.

$\implies \exists U$ – окрестность точки a такая, что $\forall x \in U \;\; \Phi(x) = 0$

$f(a) \geqslant f(x)$

Уменьшим W так, чтобы $W \times \{c\} \subset U$ и чтобы $(w, g(w)) \in U$ при $w \in W$.

Почему так можем сделать?

$w \to (w, g(w))$ – непрерывное отображение

$\implies$ прообраз открытого открыт $\implies$ прообраз $U \cap W$ подойдет.

$\implies \forall w \in W \;\; f(w, g(w)) \leqslant f(b, g(b))$

$h(w) := f(w, g(w)) \quad h$ имеет локальный максимум в точке b.

h – дифференцируемая функция, а значит выполняется необходимое условие экстремума. Т.е. $\operatorname{grad} h = 0$.

$x = (y, z)\ \ y \in \mathbb{R}^n\ \ z \in \mathbb{R}^m$

$\frac{\partial h}{\partial w_k} = \frac{\partial f}{\partial y_k} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$0 = \operatorname{grad} h = \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \operatorname{grad}_y g_j$

$\Phi(w, g(w)) \equiv 0$

i – фиксированное.

Посмотрим на частные производные Φ_i по w_k.

$\frac{\partial}{\partial w_k}\ \ :\ \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + ... + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$\operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j) + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j}) \operatorname{grad} g_j = 0$

Хотим подобрать λ_i так, что $(*) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0\ \ \forall j$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

Первая матрица здесь обратима, так как это в точности последний минор, который не вырожден.

$\implies$ система имеет решение $\implies$ можно занулить коэффициенты

$\implies \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i = 0$

Но $(*)$ в векторном виде

$\operatorname{grad}_z f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_z \Phi_i = 0$ $\square$

Замечание.

$\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} \Phi_i$

$n + m$ уравнений.

Неизвестных – точка a ($n + m$ неизвестных), λ_i – m неизвестных.

Но $\Phi(a) = 0$ – а это еще m уравнений.

Пример.

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере.

A – симметричная матрица и $Q = \langle Ax, x \rangle$

Минимум и максимум $Q(x)$ при условии $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_n \end{pmatrix}\quad \operatorname{rank} = 1$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \ :\ \ \operatorname{grad} Q - \lambda \operatorname{grad} \Phi = 0$

$F := Q - \lambda\Phi$ – функция Лагранжа.

при некотором $\lambda\quad \operatorname{grad} F = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{k,j}x_j + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{i,k}x_i + a_{k,k}\cdot 2x_k - 2\lambda x_k = 0$

$2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - 2\lambda x_k = 0$

$Ax - \lambda x = 0$

$\implies x$ – единичный собственный вектор, λ – собственное число.

Все точки, в которых достигается экстремум – единичные собственные вектора.

$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \lambda$

Значения в этих точках – соответствующие собственные числа.

Теорема 1.12 (Наибольшее/наименьшее значение квадратичной формы)**.**
$Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ – наибольшее/наименьшее значение на единичной сфере – наибольшее/наименьшее собственное числа матрицы A и достигаются на соответствующих единичных собственных векторах.

Следствие.
$\|A\| = \{\sqrt{\lambda}\ :\ \lambda$ – наибольшее собственное число матрицы $A^TA\}$

Доказательство.
$\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|^2 = \sup\langle Ax, Ax\rangle = \sup\left\langle A^TAx, x\right\rangle$

– квадратичная форма соответствует матрице A^TA. □

Пример.

Расстояние от точки до гиперплоскости.

Гиперплоскость – множество точек, которое удовлетворяет следующему уравнению:

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_jx_j + b = 0$

$\langle a, x\rangle + b = 0$

Назовем эту гиперплоскость L.

$c \in \mathbb{R}^n$

$\inf\limits_{x\in L}\|x-c\| =: \rho(c, L)$

Цель – минимизировать $\|x-c\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - c_j)^2$

$\Phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_jx_j + b = 0$

$F = f - \lambda\Phi$

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 2(x_k - c_k) + \lambda a_k = 0$

Умножим сие на a_k и сложим.

$2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_k - 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kc_k - \lambda\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$

Заметим, что $b = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_k$

$\lambda = \frac{-2b-2\langle a,c\rangle}{\|a\|^2}$

$x_k = \frac{\lambda}{2}a_k + c_k = -\frac{b+\langle a,c\rangle}{\|a\|^2}a_k + c_k$

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - c_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{b+\langle a,c\rangle}{\|a\|^2})^2 a_k^2 = \frac{(b+\langle a,c\rangle)^2}{\|a\|^2}$

Надо показать, что точка минимума существует. Тогда найденное и будет ей.

Возьмем какую-то точку на гиперплоскости, проведем из нее шарик такой, что расстояние до краев шарика больше, чем до этой точки. Тогда и до всех дальних точек расстояние будет больше.

Например, если $\rho(c, y) = d$, то надо взять шарик $\overline{B}_{3d}(y)$.

Тогда пересечение шара и L – компакт, и тогда f достигает минимума на нем и при этом не на границе шара. А для внутренних точек метод Лагранжа работает.

20.09.2017

---

2. 9. Теория меры

2.1. §1. Системы множеств

Замечание.

Полезные книжки:

Friedman Foundation of modern analysis

Макаров, Подкорытов Лекции по вещественному анализу

***Определение* 2.1** (Обозначения)**.**

X 2^X

$\overline{A} := X \setminus A$

***Определение* 2.2.**

$E_1, E_2, \dots, E_n$ разбивают множество A, если $E_i \cap E_j = \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = A$

Дизъюнктные множества – попарно не пересекающиеся.

***Определение* 2.3** (Обозначение)**.**

$A \sqcup B$ – дизъюнктное объединение.

$A \cap B = \varnothing$ и $A \sqcup B := A \cup B$

***Определение* 2.4.**

$\mathcal{A} \subset 2^X$

$\mathcal{A}$ – симметричная, если $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$

Замечание - напоминание.

$A \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

$A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

$A \cap \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

$A \cup \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$

Свойства семейства множеств $\mathcal{A}$.

(σ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

(δ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

(σ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(δ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Утверждение 2.1.

$\mathcal{A}$ – симметрично, то

$(\sigma_0) \iff (\delta_0)$ и $(\sigma) \iff (\delta)$

Доказательство.

$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ $\square$

***Определение* 2.5.**

$\mathcal{A}$ – алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ_0) и (σ_0).

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ) и (σ).

Свойства алгебры множеств.

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
3. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

Доказательство.

2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. индукция $\square$

Пример.

1. $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$ – σ-алгебра
2. 2^X – σ-алгебра
3. $X = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$ – все ограниченные подмножества и их дополнения.

   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра.
4. $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X.

   $Y \subset X$ $\mathcal{A}_Y := \{Y \cap A \ : \ A \in \mathcal{A}\}$

   $\mathcal{A}_Y$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств Y.

   Это индуцированная алгебра (σ-алгебра).

Утверждение 2.2.

$\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры) подмножеств X.

Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X.

Доказательство.

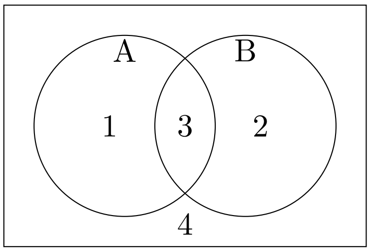
$A, B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \implies A, B \in \mathcal{A}_\alpha \ \ \forall \alpha \in I$

$\implies \overline{A}$ и $A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \ \ \forall \alpha \in I$

$\implies \overline{A}$ и $A \cup B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ $\square$

Пример.

$X \supset A, B$



Все, что можем собрать из кусочков на картинке можно положить в семейство множеств.

Кусочков 4, итого 16 множеств и это будет наименьшая σ-алгебра, содержащая множества A и B.

Теорема 2.3.

$\mathcal{E}$ – система множеств X. Тогда существует единственная наименьшая по включению σ-алгебра подмножеств X, содержащая $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Рассмотрим всевозможные σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$.

$\mathcal{A}_\alpha$. Такие σ-алгебры точно существуют, т.к. например $2^X \supset \mathcal{E}$

$\mathcal{A} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}$ – по предыдущему утверждению, это σ-алгебра.

Покажем, что это наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{B}$ – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.

Тогда $\exists \beta \in I \quad \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B}$

$\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ □

***Определение* 2.6.**

$\mathcal{E}$ – семейство подмножеств X.

Борелевская оболочка $\mathcal{E} \quad \mathcal{B}(\mathcal{E})$

– наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$

***Определение* 2.7.**

Борелевская σ-алгебра – Борелевская оболочка всех открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Замечание.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Более того, у них разные мощности. Первое – континуально, второе еще больше.

Лемма.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Доказательство.

$B_k := A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j) \subset A_k$

Если $i < k$, то $B_k \cap A_i = \varnothing \implies B_k \cap B_i = \varnothing$

$\implies B_k$ –дизъюнктны.

Далее ? означает либо n, если хотим доказать для конечного, либо ∞, если хотим доказать для счетного.

$\bigcup\limits_{k=1}^{?} B_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{?} A_k$

обратное включение:

Возьмем $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{?} A_k$. Рассмотрим наименьший номер m, такой что $x \in A_m$, но $\notin A_j \ \ j < m$

$\implies x \in B_m \subset \bigcup\limits_{k=1}^{?} B_k$ □

***Определение* 2.8.**

$\mathcal{R}$ – кольцо, если $\forall A, B \in \mathcal{R}$

$\implies A \cap B, \ A \cup B, \ A \setminus B \ \in \mathcal{R}$

***Определение* 2.9.**

$\mathcal{P}$ – полукольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \implies$ существует конечное число дизъюнктных множеств $C_1, ..., C_n$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$.

Пример.

$X = \mathbb{R} \ \ \mathcal{P} = \{[a, b) \ \ : \ \ a \leqslant b, \ \ a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{P}$ – полукольцо.

Теорема 2.4.

1. $P_1, ..., P_n, P \in \mathcal{P} \implies \exists Q_1, ..., Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$
2. $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P} \implies \exists Q_{jk} \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_{jk}$, причем $Q_{jk} \subset P_j$
3. аналогично для $n = +\infty$.

Доказательство.

1. Индукция по n. База – определение полукольца.

   Переход $n \to n+1$:

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k) \setminus P_{n+1} = (\bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$

   Надо понять, что $Q_{kj} \subset P_k$.

□

***Определение* 2.10.**

Декартово произведение полуколец.

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – полукольца подмножеств X и Y соответственно.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{P \times Q \ : \ P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q}\}$ – семейство подмножеств $X \times Y$.

Теорема 2.5.

Декартово произведение полуколец – полукольцо.

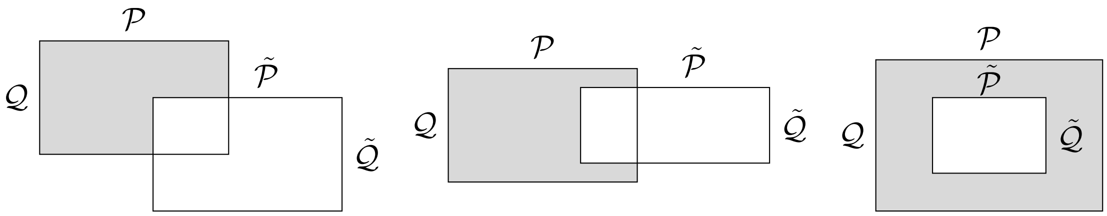
Доказательство.

(скорее махание руками, чем доказательство)

$\varnothing \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$

$(P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

Рисуем картинки. Это два прямоугольника, один вычитаем из другого. Нужно понять, что разность представляется в виде объединения прямоугольников.



Порисовав картинки, понимаем, что:

$(P \times Q) \setminus (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = P \times (Q \setminus \tilde{Q}) \sqcup (P \setminus \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

А это лежит в $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. □

***Определение* 2.11.**

$\mathbb{R}^n$

Замкнутый параллелепипед – $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] =: [a, b]$

$a = [a_1, a_2, ..., a_n]$

$b = [b_1, b_2, ..., b_n]$

Открытый параллелепипед – $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) =: (a, b)$

Ячейка – $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ... \times [a_n, b_n) =: [a, b)$

Обозначения.

$\mathcal{P}^n$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин.

Теорема 2.6.

Непустая ячейка представима в виде пересечения счетного множества открытых параллелепипедов и представима в виде счетного объединения замкнутых.

Доказательство.

$[a, b) = [a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n)$

$C_k := (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times ... \times (a_n - \frac{1}{k}, b_n)$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k = [a, b)$, т.к. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a_j - \frac{1}{k}, b_j) = [a_j, b_j)$

$D_k := [a_1, b_1 - \frac{1}{k}] \times ... \times [a_n, b_n - \frac{1}{k}]$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = [a, b)$ □

Теорема 2.7.

$\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – полукольца.

Доказательство.

$\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^1 \times ... \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}} = \mathcal{P}^1_{\mathbb{Q}} \times ... \times \mathcal{P}^1_{\mathbb{Q}}$

$\mathcal{P}^1_{\mathbb{Q}}$ – полукольцо.

□

21.09.2017

Теорема 2.8.

Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ – счетное объединение дизъюнктных ячеек, замыкание которых содержится в G.

(Можно даже сделать так, что все их вершины имеют рациональные координаты)

Доказательство.

Возьмем $x \in G$

Тогда существует $r > 0$, т.ч. $\overline{B}_r(x) \subset G$

Тогда возьмем кубик $Q \subset \overline{B}_r(x)$

(Чтобы сделать координаты кубика рациональными, достаточно на каждой стороне кубика выбрать по две рациональные точки, по разные стороны от x)

Т.е. нашли ячейку $R_x \ni x$

$\overline{R}_x \subset G$ и координаты всех вершин рациональны.

Тогда $\bigcup\limits_{x \in G} R_x = G$

Но различных R_x счетное число. (в силу того, что задаются рациональными координатами)

Выкинем все повторы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = G$

По предыдущей теореме можно превратить в дизъюнктное объединение множеств из $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$

□

Следствие.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^n) = \mathcal{B}(\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^n) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}})$, т.к. $\mathcal{P}^n \supset \mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$

по теореме $\forall G$ – открытого $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}})$

$\mathcal{B}^n$ – минимальная σ-алгебра, натянутая на открытые множества

$\implies \mathcal{B}^n \subset$ любая σ-алгебра содержащая открытые множества

$\Longrightarrow \mathcal{B}^n \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}})$

Проверим, что $\mathcal{B}^n \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^n)$

Любая ячейка – счетное пересечение открытых множеств

$\Longrightarrow$ любая ячейка лежит в $\mathcal{B}^n$

$\Longrightarrow$ минимальная σ-алгебра, натянутая на ячейки, лежит в $\mathcal{B}^n$ □

2.2. §2. Объем

***Определение* 2.12.**

$\mathcal{E}$ – система подмножеств X.

$\varphi \;:\; \mathcal{E} \to (-\infty, +\infty]$

φ – аддитивная функция, если

$\forall A, B \in \mathcal{E}$, т.ч. $A \sqcup B \in \mathcal{E}$

$\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$

φ – конечно аддитивная функция, если

$\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{E}$, т.ч. $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n \in \mathcal{E}$

$\varphi(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + ... + \varphi(A_n)$

***Определение* 2.13.**

Объем – конечно аддитивная функция φ, которая задана на полукольце подмножеств X, причем:

$\varphi(\varnothing) = 0$ и φ – неотрицательна.

Пример.

1. $\varphi([a, b)) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$ – объем на $\mathcal{P}^n$
2. $\mathbb{R}^1 \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – (нестрого) монотонно возрастает

   $\mathcal{P}^1 \;\; \nu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$
3. X – произвольно, $x_0 \in X \;\; a > 0$

   $$\mu(A) = \begin{cases} a & \text{, если } x_0 \in A \\ 0 & \text{, если } x_0 \notin A \end{cases}$$

   $\mathcal{P} = 2^X$
4. $\mathbb{R}^n \quad \mathcal{P} = \{$все ограниченные множества и все их дополнения$\}$

   $$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{, если } A \text{ – ограничена} \\ 1 & \text{, если } A \text{ – не ограничена} \end{cases}$$

Теорема 2.9.

μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда

1. Если $P \subset Q$ и $P, Q \in \mathcal{P}$, то $\mu P \leqslant \mu Q$ (монотонность объема)
2. Если $P_1, P_2, ..., P_n, Q \in \mathcal{P} \quad P_1, ..., P_n$ дизъюнктны и $\subset Q$, то

   $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leqslant \mu Q$

   (усиленная монотонность)

2'. Если $P_1, P_2, ..., Q \in \mathcal{P} \quad P_1, P_2, ...$ – дизъюнктны и $\subset Q$, то
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leqslant \mu Q$

3. Если $P_1, P_2, ..., P_n, Q \in \mathcal{P}$ и $Q \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu Q \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$
(полуаддитивность)

Доказательство.

1. $Q \setminus P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k \implies Q = P \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$
$\mu Q = \mu P + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu Q_k \geqslant \mu P$

2. $Q \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$
$\implies Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$
$\mu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu Q_j \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

2'. По пункту 2 $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leqslant \mu Q$, т.к. $P_1, ..., P_n \subset Q$ и дизъюнктны
и переходим к пределу при $n \to \infty$

3. $P'_k := P_k \cap Q \in \mathcal{P}$
$Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k$
$\implies Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \subset P'_k \;\; \forall j, k$
$\implies \mu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leqslant$
Тогда по свойству 2 $\sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj} \leqslant \mu P'_k \leqslant \mu P_k$
$\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

□

Замечание.
Если $\mathcal{P}$ – кольцо, то
$\forall A, B \in \mathcal{P} \implies A \setminus B \in \mathcal{P}$
Если $A \supset B$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Замечание.
Если μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$, то из полукольца можно сделать кольцо, добавив всевозможные конечные дизъюнктные объединения и доопределить объем на таких объединениях. (Просто суммой)

Теорема 2.10.

μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$

ν – объем на полукольце $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q$, где $P \in \mathcal{P},\ \ Q \in \mathcal{Q}$

λ определено на $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и это объем.

Доказательство.

Надо проверить конечную аддитивность (все остальное очевидно).

Есть два случая.

Простой случай.

$P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \quad Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$

Тогда

$P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (P_k \times Q_j)$

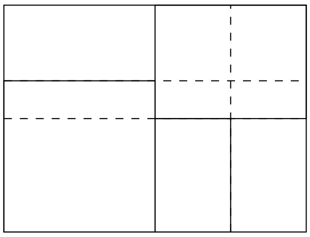
$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \mu P_k \cdot \nu Q_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda(P_k \times Q_j)$

Случай противный (общий). Будет, видимо, доказан не строго.

$P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k$

Хотим разбить каждый из прямоугольников $P_k \times Q_k$ так, чтобы $P \times Q$ разбилось отдельно на прямоугольники по P и на прямоугольники по Q.

Для это просто продолжим линии. Так мы сведем задачу к предыдущей. Отрезочки, на которые разбиваем – всевозможное пересечения P_k и аналогично Q_k.



$\square$

Следствие.

$\varphi([a, b)) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ – объем на $\mathcal{P}^n$

Доказательство.

Для $n = 1$ знаем.

Дальше индукция, теорема дает переход. $\square$

***Определение* 2.14.**

Стандартный объем в $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n([a, b)) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$

2.3. §3. Мера

***Определение* 2.15.**

Объем μ счетно аддитивен, если

$\forall P_1, P_2, ..., P \in \mathcal{P}$, т.ч. $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n = P$, то

$\mu P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

***Определение* 2.16.**
Мера – счетно аддитивный объем.

(Т.е. $\mu \ : \ \mathcal{P} \to [0, +\infty], \ \ \mu\varnothing = 0$ и счетная аддитивность)

Пример.

1. Классический объем в $\mathbb{R}^n$. (потом докажем)
2. $\mathbb{R} \ \ g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонно возрастает и q непрерывна слева во всех точках.

   $\nu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$ – мера (потом докажем).
3. $x_0 \in X \ \ a > 0$

   $\mu(A) = \begin{cases} a & , \text{ если } x_0 \in A \\ 0 & , \text{ если } x_0 \notin A \end{cases}$

   – мера.
4. $\mu A = \#A$ – кол-во элементов множества A.

   – считающая мера.
5. $T = \{t_1, t_2, t_3, ...\} \subset X$ – не более чем счетно (нбчс)

   $\{w_1, w_2, w_3, ...\}$ – неотрицательные числа.

   Если $B \subset T$ и B – конечное множество, то

   $\mu B = \sum\limits_{j \,:\, t_j \in B} w_j$ – мера на T.

   Если $A \subset X$

   $\mu A = \sup\{\mu B \ \ : \ \ B$ – конечно и $B \subset A \cap T\}$

   Получили меру.

   Доказательство.
   Понятно все, кроме счетной аддитивности.

   Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \overset{?}{\implies} \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

   Берем $B \subset A \cap T \implies B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k = B \cap A_k$ – все конечные множества.

   $\implies \mu B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k \leqslant$

   $B_k \subset A_k \cap T \quad \mu B_k \leqslant \mu A_k$

   $\leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

   Получили неравенство $\mu B \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$ и пишем sup по $B \subset A \cap T$

$\implies \mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Обратное неравенство.

Поймем, что надо доказать только для конечной суммы.

$\mu A_k = \sup\{\mu B \ : \ B$ – конечно и $B \subset A_k \cap T\}$

Подберем такое B_k, что $\mu B_k > \mu A_k - \frac{\varepsilon}{n}$, где n – количество множеств A_k.

$B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ – конечное множество

$\mu A \geqslant \mu B = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k > \sum\limits_{k=1}^{n} (\mu A_k - \frac{\varepsilon}{n}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k - \varepsilon$

$\implies \mu A + \varepsilon \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

и устремим $\varepsilon \to 0$.

$\implies$ есть конечная аддитивность $\implies$ есть неравенство и для бесконечной суммы $\implies$ есть счетная аддитивность. □

27.09.2017

Теорема 2.11.

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu \ : \ \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ – объем.

Тогда μ – мера $\iff$

"$\forall P, P_1, P_2, .. \in \mathcal{P}$, т.ч. $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \implies$

$\implies \mu P \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$"

(свойство называется счетной полуаддитивностью)

Доказательство.

"$\impliedby$"

Пусть дано, что $P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.

Пусть $P'_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

Тогда $P'_n \subset P$

$\implies \mu P'_n \leqslant \mu P \implies \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leqslant \mu P$

Переходя к пределу по n, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n \leqslant \mu P$

(А вообще это пункт 2' из теоремы 2.9)

Счетная полуаддитивность дает обратное неравенство.

" $\implies$ "

Пусть $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ положим $P'_n := P \cap P_n$

$\implies P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_n} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \quad \forall k = 1, ..., m_n$

$\implies$, т.к. μ – мера, $\mu P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P'_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n$,

т.к $Q_{nk} \subset P'_n$ и дизъюнктны

$\bigsqcup\limits_{k=1}^{m_n} Q_{nk} \subset P'_n \implies$ по второму свойству объема, $\mu P'_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk}$ □

Следствие.

$\mathcal{P}$ – σ-алгебра, $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ – мера.

Тогда счетное объединение множеств меры 0 – множество меры 0.

Доказательство.

$\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu P_n = 0$ □

Теорема 2.12.

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ – объем.

Тогда μ – мера $\iff$

$\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, т.ч. $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n$

$\implies \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

(непрерывность снизу)

Доказательство.

$A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, считаем, что $A_0 = \varnothing$

"$\implies$"

$\implies B_n$ – дизъюнктны. И $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

$\implies$ т.к. μ – мера, $\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

"$\impliedby$"

Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, тогда $A_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$

$\implies \mu A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k$

Перейдем к пределу по n, получим:

$\mu A \leftarrow \mu A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu B_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k$

$\implies \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_k$

Т.е. получили счетную аддитивность, а значит это мера. □

Теорема 2.13.

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ – объем

$\mu X < +\infty$. Тогда равносильны:

1. μ – мера.

2. непрерывность сверху

   $\forall A_1, A_2, .. \in \mathcal{A}$, т.ч. $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \implies \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu A_n$

3. непрерывность сверху на пустом множестве

   $\forall A_1, A_2, .. \in \mathcal{A}$, т.ч. $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \mu A_n = 0$

Доказательство.

"$1 \implies 2$"

$B_n := X \setminus A_n \implies B_n \subset B_{n+1} \; \forall n$

и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus A$, где $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\implies$ по непрерывности снизу $\mu(X \setminus A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(X \setminus A_n)$

Заметим, что в силу конечности $\mu(X \setminus A) = \mu X - \mu A \quad \mu(X \setminus A_n) = \mu X - \mu A_n$

"$2 \implies 3$" – очевидно.

"$3 \implies 1$" Надо проверить счетную аддитивность.

$A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$

$A_n := \bigsqcup\limits_{k=n+1}^{\infty} C_k$, тогда $A_n \supset A_{n+1} \; \forall n$.

И $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$

$A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k \sqcup A_n \implies$ т.к. μ – объем, $\mu A = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu C_k + \mu A_n \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k + 0$ □

Замечание.

1. Доказательство $3 \implies 1$ не использовало условие $\mu X < +\infty$.

2. $1 \implies 2$(или 3) без условия $\mu X < +\infty$ неверна.

   $X = \mathbb{R} \quad A_n = [n, +\infty) \;\; \mu$ – длина.

   $\mu A_n = +\infty \quad \forall n$, но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$

Следствие.

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ – мера

$A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \quad A_n \supset A_{n+1} \;\; \forall n$

и для некоторого $m \quad \mu A_m < +\infty$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

Доказательство.

Можно считать, что $X = A_m$ □

Замечание.

Это свойство не равносильно тому, что μ – мера.

Упражнение.

Придумать пример, т.е. такой объем, что он не мера, а свойство выполнено.

2.4. §4. Продолжение мер

***Определение* 2.17.**

$\nu : 2^X \to [0, +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu\varnothing = 0$
2. Монотонность $A \subset B \implies \nu A \leqslant \nu B$
3. Счетная полуаддитивность $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \implies \nu A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

***Определение* 2.18.**

μ – полная мера, если

$\forall A \in \mathcal{P} \ : \ \mu A = 0$ и $\forall B \subset A \implies B \in \mathcal{P}$

И тогда $\mu B = 0$.

***Определение* 2.19.**

ν – субмера. Назовем множество E ν-измеримым, если

$\forall A \subset X$

$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Замечание.

Достаточно “$\geqslant$”, т.к. “$\leqslant$” есть из-за счетной полуаддитивности.

Теорема 2.14.

Семейство ν-измеримых множеств образует σ-алгебру. И ν, суженная на эту σ-алгебру, – полная мера.

Доказательство.

$\mathcal{A}$ – все ν-измеримые множества.

Проверяем, что $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

1. $\varnothing \in \mathcal{A} \ : \ \nu A \geqslant \nu(A \cap \varnothing) + \nu(A \setminus \varnothing) = 0 + \nu A$
2. Симметричность.

   $E \in \mathcal{A} \implies \overline{E} \in \mathcal{A}$

   $E \in \mathcal{A} \implies \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \setminus \overline{E}) + \nu(A \cap \overline{E})$
3. $E, F \in \mathcal{A} \implies E \cup F \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \nu(A \setminus E \setminus F) \geqslant$
   $\geqslant \nu((A \cap E) \cup ((A \setminus E) \cap F)) + \nu(A \setminus (E \cup F)) \geqslant$

   $(A \cap E) \cup ((A \setminus E) \cap F) = A \cap (E \cup F)$

   $\geqslant \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$

   Таким образом, получили, что $\mathcal{A}$ – алгебра.

4. Покажем, что ν – объем на $\mathcal{A}$.

   $\nu(E \sqcup F) = \nu E + \nu F$, т.к. $A := E \sqcup F$

5. $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \quad E_n \in \mathcal{A}$

   $\implies \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

   $\nu A = \nu(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) =$

   $A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A \cap E_k)$

   $= \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E)$

   Перейдем к пределу при $n \to \infty$.

   $\nu A \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \geqslant \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

   Последнее неравенство – счетная полуаддитивность.

   Пояснение красного равенства:

   $\nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A \cap E_k)) = \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A \cap E_k) \cap E_n) + \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A \cap E_k) \setminus E_n) = \nu(A \cap E_n) + \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1} (A \cap E_k))$

   Дальше индукция.

6. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \quad E_n \in \mathcal{A}$ переходим к дизъюнктным объединениям.

   Доказали, что $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

7. ν – мера. Уже доказали, что объем. Плюс по условию есть счетная полуаддитивность. Значит, это мера.

8. ν – полная мера. Пусть $E \in \mathcal{A}$ и $\nu E = 0$

   $E \supset F$. Докажем, что $F \in \mathcal{A}$. По монотонности $\nu F = 0$

   $\nu A \geqslant 0 + \nu(A \setminus F) = \nu(A \cap F) + \nu(A \setminus F)$

   А неравенство $\nu A \geqslant \nu(A \setminus F)$ – очевидно по монотонности.

$\square$

***Определение* 2.20.**

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mathcal{P}$ – "хорошее", если

$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_n \in \mathcal{P}$.

Замечание.

Алгебра всегда "хорошая".

***Определение* 2.21.**

Пусть μ – мера, заданная на "хорошем" полукольце.

$\mu^* A = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n \ : \ B_n \in \mathcal{P} \text{ и } \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \supset A\}$

– внешняя мера, порожденная μ.

Замечание.

1. Можем рассматривать только дизъюнктные объединения.

   $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m_n} Q_{nk} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \supset A$

   И $\mu B_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk}$

2. Если μ задано на σ-алгебре, то

   $\mu^* A = \inf\{\mu B \ : \ B \in \mathcal{A} \text{ и } B \supset A\}$

28.09.2017

Теорема 2.15.
μ^* – субмера, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathcal{P}$. Тогда $B_1 = A, \ \ B_2 = B_3 = ... = \varnothing$

   $\implies \mu^* A \leqslant \mu A$

   С другой стороны, если $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \supset A$, то

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n \geqslant \mu A \implies \mu^* A \geqslant \mu A$

   $\implies$ на $\mathcal{P}$ $\mu^* = \mu$

2. Счетная полуаддитивность, т.е. если $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{?}{\implies} \mu^* A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$

   Если $\mu^* A_n = \infty$ для какого-то n, то очевидно.

   Т.е. можем считать, что все конечны.

   $\mu^* A_n = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k \ : \ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k \supset A_n \text{ и } C_k \in \mathcal{P}\}$

   $\exists B_{n_1}, B_{n_2}, ... \in \mathcal{P}, \ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A_n$ и

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

   Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$

   $\mu^* A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \varepsilon$ и устремляем $\varepsilon \to 0$.

   $\mu^* A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$

$\square$

***Определение* 2.22.**

μ_0 – мера, заданная на “хорошем” полукольце $\mathcal{P}$.

μ_0^* – соответствующая внешняя мера и рассмотрим

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра μ_0^*-измеримых множеств и сузим μ_0^* на $\mathcal{A}$.

Получится полная мера μ на $\mathcal{A}$

μ – стандартное продолжение μ_0

Теорема 2.16.

Это действительно продолжение. Т.е. на $\mathcal{P}$ μ и μ_0 совпадают.

Доказательство.

Надо доказать, что если $E \in \mathcal{P}$, то E – μ-измеримо.

Т.е. надо проверить такое неравенство:

$\mu A \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X$

1. Пусть $A \in \mathcal{P}$. Тогда

   $A \cap E \in \mathcal{P}$

   $A \setminus E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k \;\; Q_k \in \mathcal{P}$

   $A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

   $\mu_0 A = \mu_0(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k$

   Тогда верно и

   $\mu_0^* A = \mu_0^*(A \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0^* Q_k \geqslant$

   (т.к. на полукольце $\mu_0 = \mu_0^*$)

   μ_0^* – полуаддитивна

   $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0^* Q_k \geqslant \mu_0^*(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k) = \mu_0^*(A \setminus E)$

   $\geqslant \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

2. A – произвольное. Если $\mu_0^* A = +\infty$, то очевидно.

   Пусть $\mu_0^* A < +\infty$. По определению inf:

   $\exists P_1, P_2, ... \in \mathcal{P} \quad \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$

   Тогда по пункту 1:

   $\mu_0^*(P_k) \geqslant \mu_0^*(P_k \cap E) + \mu_0^*(P_k \setminus E)$

   $\mu_0^*(A) + \varepsilon > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^* P_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)$

   Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E) \geqslant \mu_0^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \cap E) \geqslant \mu_0^*(A \cap E)$

   (первое неравенство – счетная полуаддитивность, второе неравенство – монотонность)

   и

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E) \geqslant \mu_0^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \setminus E) \geqslant \mu_0^*(A \setminus E)$

Все собирая вместе, получаем:

$\mu_0^* A + \varepsilon > \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$ и устремим $\varepsilon \to 0$.

□

Замечание.

1. Дальше будем писать μ и для меры на полукольце, и для меры, получившейся в результате продолжения.

   $\mu A = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \quad : \quad \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset A$ и $P_k \in \mathcal{P}\}$

   $A \in \mathcal{A}$ – σ-алгебра μ-измеримых множеств.

2. Стандартное продолжение от стандартного продолжения не дает ничего нового.

   Упражнение.
   Доказать это.

   (Подсказка – доказать, что μ_0^* и μ^* совпадают)

3. Нельзя ли продолжить на более широкую σ-алгебру?

   Можно, но неоднозначно.

***Определение* 2.23.**
μ – σ-конечная мера на $\mathcal{P}$, если $\exists P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$, т.ч. $\mu P_k < +\infty$ и $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$

(Можно считать, что P_k дизъюнктны)

Замечание.

4. Можно ли по-другому продолжить меру μ на σ-алгебру μ-измеримых подмножеств?

   Если μ σ-конечная мера, то нельзя.

5. Пусть μ продолжили до какой-то полной меры на какой-то σ-алгебре. Обязательно ли эта σ-алгебра содержит μ-измеримые множества?

   Если мера σ-конечная, то обязательно.

Теорема 2.17 (о внешней мере множества)**.**
μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$.

μ – стандартное продолжение, μ^* – внешняя мера, порожденная μ.

Пусть $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{n_k} \in \mathcal{P}$

$C_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \quad C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$, т.ч. $\mu^* A = \mu C$

Доказательство.
$\exists B_{n_1}, B_{n_2}, ..., \in \mathcal{P} \quad : \quad C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A$ и

$\mu C_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$

$\mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$ и $C_n \supset A$.

$\implies \mu C_n \to \mu^* A$

Пусть $D_m := \bigcap\limits_{n=1}^{m} C_n \supset A \quad \mu^* A \leqslant \mu D_m \leqslant \mu C_m < \mu^* A + \frac{1}{m} \to \mu^* A$

$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset ... \implies$ по монотонности меры сверху

$\mu^* A = \lim\limits_{m\to\infty} \mu D_m = \mu(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} D_m) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu C$ □

Следствие.

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение меры с $\mathcal{P}$.

И $\mu A < +\infty$. Тогда:

$A = B \sqcup e$, где

$B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство.

Возьмем C из теоремы. $\implies C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$,

$A \subset C$ и $\mu A = \mu C < +\infty$.

$\implies \mu(C \setminus A) = 0$

Применяем теорему для $C \setminus A$.

Существует $E \supset C \setminus A,\ \ E \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu E = \mu(C \setminus A) = 0$

Тогда $A \supset C \setminus E \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$.

Пусть тогда $B := C \setminus E$

$e := A \setminus B \subset E$

$\mu E = 0$ и μ – полная мера.

$\implies \mu e = 0$. □

Определение 2.24.

Система множеств $\mathcal{M}$ – монотонный класс, если

$\forall A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$ и $A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

$\forall B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset ...$ и $B_n \in \mathcal{M} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$

Теорема 2.18.

$\mathcal{M}$ – монотонный класс, содержащий алгебру $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A})$

Замечание.

Доказательства не будет, ибо оно нудное и отношения к матанализу не имеет.

Пояснение.

$\mathcal{M}$ – минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, является σ-алгеброй.

Теорема 2.19 (Единственность продолжения меры)**.**

Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение меры на σ-алгебру $\mathcal{A}$, и ν – мера $\mathcal{A}$, т.ч.

$\mu E = \nu E\ \ \forall E \in \mathcal{P}$ и μ – σ-конечная мера.

Тогда $\mu A = \nu A\ \ \forall A \in \mathcal{A}$

Доказательство.

1. Докажем, что $\nu A \leqslant \mu A \ \ \forall A \in \mathcal{A}$.

   $\mu A = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ \ : \ \ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \text{ и } P_k \in \mathcal{P}\}$

   Заметим, что внутри этого инфинума $\mu P_k = \nu P_k$

   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu P_k \geqslant \nu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k) \geqslant \nu A$

   Все выражения под inf $\geqslant \nu A \implies \inf = \mu A \geqslant \nu A$

2. Пусть $\mu P < +\infty \ \ P \in \mathcal{P}$. Тогда $\forall E \in \mathcal{A}$

   $\nu P = \mu P \geqslant \mu(P \cap E) + \mu(P \setminus E) \geqslant \nu(P \cap E) + \mu(P \setminus E) \geqslant \nu(P \cap E) + \nu(P \setminus E) = \nu P$

   $\implies$ везде равенства $\implies \mu(P \cap E) = \nu(P \cap E) \ \ \forall E \in \mathcal{A}$.

3. μ – σ-конечна

   $\implies \exists P_k$ – дизъюнктны,

   $\mu P_k < +\infty$ и $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$

   $\mu(P_k \cap E) = \nu(P_k \cap E)$ по пункту 2.

   $\implies \mu E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap E) = \nu E$

   $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E) = X \cap E = E$

□

05.10.2017

2.5. §5. Мера Лебега

Теорема 2.20.
Классический объем λ_m на полукольце $\mathcal{P}^m$ – σ-конечная мера.

Доказательство.
Что он просто объем уже доказали.

σ-конечность очевидна – все пространство можно разбить на единичные ячейки вида $[a, b)$, где $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \ \ b = (b_1, b_2, ..., b_m) \ \ a_i, b_i \in \mathbb{Z}$

Нужно доказать счетную полуаддитивность.

$\forall P, P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}^n \quad P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \implies \lambda_m P \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n$

$P = [a, b) \quad P_n = [a_n, b_n)$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим открытый параллелепипед $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n)$, т.ч. $\lambda_m[a'_n, b_n) < \lambda_m[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$[a, b) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a'_n, b_n)$ – открытое покрытие

Но компакт – $[a, b'] \subset [a, b)$

Выберем конченое подпокрытие.

$[a, b') \subset [a, b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

$\lambda_m[a, b') \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_m[a'_n, b_n) < \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda_m[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) <$

$< \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_m[a_n, b_n) + \varepsilon \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a_n, b_n) + \varepsilon$

$\lambda_m[a, b') \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a_n, b_n) + \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a_n, b_n)$

$\lambda_m[a, b') \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a_n, b_n)$

$\lambda_m[a, b') > \lambda_m[a, b) - \varepsilon$ и снова $\varepsilon \to 0$. □

***Определение* 2.25.**
Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ – стандартное продолжение классического объема.

σ-алгебру, на которой задано это продолжение обозначим $\mathcal{L}^m$ и назовем Лебеговской σ-алгеброй.

Свойства меры Лебега.

1. Открытые множества измеримы и имеют положительную меру.

   Доказательство.
   $\mathcal{L}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \{$все открытые множества$\}$

   Ячейка, соответствующая кубику $\subset G$

   $0 < \lambda_m(-''-) \leqslant \lambda G$ □

2. Все замкнутые множества измеримы. (Т.к. симметричны для открытых)

3. Всякое не более чем счетное множество измеримо и имеет меру 0.

   Доказательство.
   $\lambda_m\{a\} = 0 \quad \{a\} \subset [a, b)$, где $b = a + \varepsilon$

   $\lambda_m[a, a + \varepsilon) = \varepsilon^m$

   $\lambda_m\{a\} \leqslant \lambda_m[a, a + \varepsilon) = \varepsilon^m \to 0$

   □

4. Любое ограниченное измеримое множество имеет конечную меру.

   Доказательство.
   Это множество содержится в какой-то ячейке. □

5. Любое измеримое множество – это дизъюнктное объединение не более чем счетного числа множеств конечной меры.

Доказательство.
$A \subset \bigsqcup\limits_{a \in \mathbb{Z}^m} [a, a+1)$

$A = \bigsqcup\limits_{a \in \mathbb{Z}^m} ([a, a+1) \cap A)$

$([a, a+1) \cap A)$ – ограниченные измеримые множества (содержится в ячейке, пересечение измеримых) $\square$

6. Если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$ измеримые множества A_ε и B_ε.
   $E \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то E – измеримо.

   Доказательство.
   $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ – измеримо

   $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}$

   $A \subset E \subset B$

   $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$

   $\lambda_m(B \setminus A) \subset \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \to 0$

   $\implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$

   $E \setminus A \subset B \setminus A$ – множество нулевой меры.

   Но λ_m – полная мера $\implies E \setminus A$ измеримо

   $\implies E = (E \setminus A) \sqcup A$ – измеримое. $\square$

   Замечание.
   Свойство верно для любой полной меры, заданной на σ-алгебре.

7. $E \subset \mathbb{R}^m$. Если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B_\varepsilon$ – измеримо, $\exists E \subset B_\varepsilon$
   и $\lambda_m B_\varepsilon < \varepsilon$, то E – измеримо и $\lambda_m E = 0$

   Доказательство.
   В пункте 6 $A_\varepsilon = \varnothing = A$ $\square$

8. Счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.

9. Если $\lambda_m E = 0$, то $\operatorname{Int} E = \varnothing$

   Доказательство.
   Пусть $a \in \operatorname{Int} E$.

   $\implies B_r(a) \subset E$

   $\implies 0 < \lambda_m B_r(a) \leqslant \lambda E = 0$ – нехорошо. $\square$

10. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо

    $\lambda_m E = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \quad : \quad P_n \in \mathcal{P}^m \quad E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\}$

    Или

    $\lambda_m E = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \quad : \quad P_n \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \quad E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\}$

11. Если $e \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\lambda_m e = 0$, то существуют кубические ячейки $Q_1, Q_2, ...$, т.ч. $e \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m Q_n < \varepsilon$

    Доказательство.
    $\lambda_m e = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \quad : \quad P_n \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \;\; E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\}$

    и выберем такое покрытие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n < \varepsilon$

    Нарезаем P_n на кубики и перенумеровываем. $\square$

12. Пусть $m \geqslant 2$. $H_k(c) = \{x \in \mathbb{R}^m \quad : \quad x_k = c\}$ – координатная гиперплоскость.
    $\lambda_m H_k(c) = 0$

    Доказательство.
    $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_k(c) \cap [-n, n)^m = H_k(c)$

    Осталось доказать, что $\lambda_m(H_k(c) \cap [-n, n)^m) = 0$

    $H_k(c) \cap [-n, n)^m \subset [-n, n) \times ... \times [-n, n) \times [c - \varepsilon, c + \varepsilon) \times [-n, n) \times ... \times [-n, n)$

    $\lambda_m(H_k(c) \cap [-n, n)^m) \leqslant \lambda_m(...) = (2n)^{m-1} 2\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ $\square$

13. Если множество содержится в счетном объединении координатных гиперплоскостей, то оно имеет меру 0.

14. $\lambda_m[a, b) = \lambda_m(a, b) = \lambda_m[a, b]$

    Доказательство.
    $m = 1$ – множества отличаются одной точкой, которая имеет меру 0.

    $m \geqslant 2$ – множества отличаются добавлением или убиранием множества, содержащегося в конечном объединении координатных гиперплоскостей. Т.е. добавляем или выкидываем множество меры 0. $\square$

Замечание.

1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

   $m \geqslant 2$ $H_k(c)$ – подходит.

   Для $m = 1$ – Канторово множество. Что это?

   Рассмотрим отрезок $[0, 1]$. Поделим на три равные части, выкинем середину.

   Осталось $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

   Из каждого из полученных отрезков снова выкинем серединки:

   $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

   На самом деле – выкинули почти все такие вещественные числа, у которых присутствует 1 в троичной записи. А чисел из 0 и 2 континуум. Ибо есть биекция между тем, чем осталось и отрезком $[0, 1]$. (Заменить все двойки на 1).

   Итог.

   $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ – измеримое множество, т.к. пересечение замкнутых.

   $\lambda_1 K \leqslant \lambda_1 K_n = 2^n \frac{1}{3^n} \to 0$.

2. Существуют неизмеримые множества. Более того, любое множество положительной меры содержит в себе неизмеримое подмножество.

   Построим неизмеримое множество, содержащееся в $[0, 1)$.

   x и $y \in \mathbb{R}$ эквивалентны, если $x - y \in \mathbb{Q}$.

   Выберем в каждом классе эквивалентности представителя из $[0, 1)$.

   Обозначим множество представителей через A.

   Докажем, что A – неизмеримо. От противного.

   Пусть мера $\lambda_1 A = 0$. Тогда заметим, что

   $[0, 1) \subset \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$

   $\implies 1 = \lambda[0, 1) \leqslant \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(A + r) = \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} 0 = 0$

   Пусть тогда мера $\lambda_1 A > 0$.

   $\bigsqcup\limits_{r \in \mathbb{Q} | r | \leqslant 1} (A + r) \subset [-1, 2)$

   Если $(A + r_1) \cap (A + r_2) \neq \varnothing$, то $\exists x \;\; x - r_1 \in A, \;\; x - r_2 \in A$ – что противоречит единственности выбора представителей.

   Тогда

   $\sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} \lambda_1(A + r) \leqslant \lambda[-1, 2) = 3$

   $+\infty \cdot \lambda A = 3$

   Получили противоречие. Значит, A не измеримо.

Теорема 2.21 (регулярность меры Лебега)**.**
$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое и $\varepsilon > 0$. Тогда существует открытое множество G, т.ч. $G \supset E$ и $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon$

Доказательство.
$\lambda_m E = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n \;\; : \;\; P_n \in \mathcal{P}^m$ и $F \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\}$

Можно взять такие ячейки $P_1, P_2, ...$, что

$E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m P_n < \lambda_m E + \varepsilon$

$P_n = [a_n, b_n) \subset (a'_n, b_n)$ и т.ч. $\lambda_m(a'_n, b_n) < \lambda_m[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\lambda_m E + \varepsilon > \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a_n, b_n) > \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda_m(a'_n, b_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a'_n, b_n) - \varepsilon$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a'_n, b_n) < \lambda_m E + 2\varepsilon$

$G := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a'_n, b_n) \supset E$ – открытое множество.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m(a'_n, b_n) \geqslant \lambda_m G$
и

$\lambda_m G < \lambda_m E + 2\varepsilon$

$\lambda_m(G \setminus E) = \lambda_m G - \lambda_m E < 2\varepsilon$

Что делать, если мера E не конечна:

$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_k$

Для каждого E_k найдем $G_k \supset E_k$ – открытое и $\lambda_m(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

$G := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \supset E$

$G \setminus E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n$ □

Следствие.

1. $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримое и $\varepsilon > 0$. Тогда существует замкнутое множество $F \subset E$, т.ч. $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon$

   Доказательство.
   Берем из теоремы G для $\mathbb{R}^m \setminus E$

   $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E \implies E \supset \mathbb{R}^m \setminus G =: F$

   $E \setminus F = G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)$ □

2. E – измеримо $\implies$

   $\lambda E = \inf\{\lambda G \ : \ E \subset G \text{ – открытое}\}$

   $\lambda E = \sup\{\lambda F \ : \ E \supset F \text{ – замкнутое}\}$

   $\lambda E = \sup\{\lambda K \ : \ E \supset K \text{ – компакт}\}$

   Доказательство.
   $\exists G \supset E$ – открытое, $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$

   $\exists F \subset E$ – замкнутое, $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$

   Поймем, что к λE можно сколь угодно близко подойти.

   Возьмем F – замкнутое, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F \cap [-n,n]^m) = \lambda F > \lambda E - \varepsilon$

   Но $F \cap [-n,n]^m$ – замкнуто и ограничено.

   □

3. E – измеримо $\implies \exists K_1 \subset K_2 \subset ... \subset E$ – компакты.

   И e – множество меры 0, т.ч. $E = e \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$

   Доказательство.
   Возьмем $\tilde{K}_n$ – компакт $\subset E$ и

   $\lambda \tilde{K}_n > \lambda E - \frac{1}{n} \quad K_n := \bigcup\limits_{j=1}^{n} \tilde{K}_j \subset E$ – компакт

   $\lambda E \geqslant \lambda K_n \geqslant \lambda \tilde{K}_n > \lambda E - \frac{1}{n}$

   $\implies \lambda(E \setminus K_n) < \frac{1}{n} \implies \lambda(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_n) = \lambda(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(E \setminus K_n) = 0$

   $e := E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$

Упражнение.

E – измеримо. Доказать, что $\exists G_1 \supset G_2 \supset ... \supset E$ – открытые и e – множество меры 0, т.ч. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$

$\square$

11.10.2017

Теорема 2.22.

Измеримость и величины меры не меняется при сдвиге множества.

Доказательство.

Пусть сдвигаем на вектор v.

$\mu E := \lambda(E + v)$ – это мера на $\mathcal{L}^m$.

Меры μ и λ совпадают на ячейках.

$\implies$ вообще совпадают. $\square$

Теорема 2.23.

Пусть μ – мера на $\mathcal{L}^m$ такая, что

1. μ инвариантна относительно сдвига.
2. Мера каждой ячейки конечна (= мера любого ограниченного измеримого множества конечна)

Тогда $\mu = k\lambda$, где $k \in [0, +\infty)$

Доказательство.

$k := \mu([0, 1)^m)$

Случай 1. $k = 1$. Тогда надо показать, что μ и λ совпадают.

Покажем, что они совпадают на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$.

Для этого достаточно показать совпадение на кубических ячейках со стороной $\frac{1}{n}$.

Из-за инвариантности достаточно рассмотреть ячейку $[0, \frac{1}{n})^m$.

Т.к. $\lambda[0, \frac{1}{n})^m = \frac{1}{n^m}$, то надо доказать, что $\mu[0, \frac{1}{n})^m = \frac{1}{n^m}$.

Для этого разрезаем ячейку $[0, 1)^m$ на n^m кубических ячеек со стороной $\frac{1}{n}$.

Из-за инвариантности относительно сдвига меры μ у всех этих ячеек одинаковы.

$1 = \mu[0, 1)^m = n^m \mu[0, \frac{1}{n})^m$

$\implies$ μ и λ совпадают на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ $\implies$ совпадают на $\mathcal{L}^m$.

Случай 2. $k > 0$.

$\tilde{\mu} := \frac{1}{k}m$. По пункту 1 $\tilde{\mu} = \lambda \implies \mu = k\lambda$

Случай 3. $k = 0 \quad \mu[0, 1)^m = 0$.

Но $\mathbb{R}^m$ – счетное объединение сдвигов $[0, 1)^m \implies \mu\mathbb{R}^m = 0$. $\square$

Теорема 2.24.

Мера Лебега инвариантна относительно движения.

Доказательство.

Достаточно проверить, что λ не меняется при повороте.

U – поворот $\mathbb{R}^m$. Т.е. U – ортогональная матрица.

$\mu E := \lambda(UE)$

Покажем, что μ удовлетворяет условию предыдущей теоремы.

2 – очевидно – поворот ограниченного множества – ограниченное множество.

1. Нужна инвариантность относительно сдвига. Т.е.

$\mu(E + v) = \lambda(U(E + v)) = \lambda(UE + \tilde{v}) = \lambda(UE) = \mu E$

$\implies \mu = k\lambda$. Но мы хотим показать, что они совпадают. Т.е. хотим показать ,что $k = 1$.

Но $B_1(0)$ – открытый шар с центром в 0 при повороте переходит в себя.

$\implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$ $\square$

3. 10. Измеримые функции.

3.1. §1. Простейшие свойства измеримых функций.

***Определение* 3.1.**

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $E \subset X$, а в X задана мера.

$E\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$

$E\{f \leqslant a\} = \{x \in E : f(x) \leqslant a\} = f^{-1}([-\infty, a])$

$E\{f > a\} = \{x \in E : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$

$E\{f \geqslant a\} = \{x \in E : f(x) \geqslant a\} = f^{-1}([a, +\infty])$

Это все Лебеговы множества функции f.

Теорема 3.1.

Пусть E – измеримо и $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$

Тогда следующие условия равносильны.

1. $E\{f < a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f \leqslant a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f > a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f \geqslant a\}$ измеримо $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$2 \iff 3 \quad E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leqslant a\}$

$1 \iff 4 \quad E\{f \geqslant a\} = E \setminus E\{f < a\}$

$1 \implies 2$

$E\{f \leqslant a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f < a + \frac{1}{n}\}$

$2 \implies 1$

$E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \leqslant a - \frac{1}{n}\}$ □

Замечание.

Это равносильно тому, что прообраз любого открытого множества измерим.

***Определение* 3.2.**

E – измеримо $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$

f – измеримая, если она удовлетворяет условиям пунктов $1 - 4$ теоремы.

Замечание.

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримо и $E_0 \subset E$ – измеримо

$\implies f\Big|_{E_0}$ – измеримая функция.

Доказательство.

$E_0\{f\Big|_{E_0} < a\} = E\{f < a\} \cap E_0$.

□

Пример.

1. Константа – измеримая функция.
2. Характеристическая функция измеримого множества – измерима.
3. G – открытое $\subset \mathbb{R}^m$ и мера λ. $f \in C(G) \implies f$ – измеримо.
   (прообраз открытого – открытое, а открытые множества измеримы по Лебегу)

Свойства измеримых функций.
$f \,:\, E \to \overline{R}$ – измеримая функция.

1. $E\{a < f < b\}, E\{a \leqslant f < b\}, E\{a < f \leqslant b\}, E\{a \leqslant f \leqslant b\}$ – измеримы.

   Доказательство.
   $E\{a < f < b\} = E\{f < b\} \cap E\{f > a\}$ □

2. $E\{f = a\}$ – измеримо.
3. $|\,f\,|$ – измерим и $-f$ – измерима.

   Доказательство.
   $E\{|\,f\,| < a\} = E\{-a < f < a\}$
   $E\{-f < a\} = E\{f > -a\}$ □

4. $f, g \;:\; E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримы $\implies \max\{f,g\}, \min\{f,g\}$ – измеримы.
   В частности, $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ – измеримы.

   Доказательство.
   $E\{\max\{f,g\} < a\} = E\{f < a\} \cap E\{g < a\}$ □

5. Прообраз любого открытого множества измерим.

   Доказательство.
   G – открытое $\implies G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$

   $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}([a_n, b_n)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{a_n \leqslant f < b_n\}$ □

   Замечание.
   На самом деле прообраз любого борелевского множества измерим. А любого Лебеговского не обязательно измерим.

6. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и $f \,:\, E \to \overline{\mathbb{R}}$

   $f\Big|_{E_n}$ – измеримо $\forall n \implies f$ – измеримо.

   Доказательство.
   $E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\{f < a\}$ □

7. Каждая измеримая на E функция – сужение измеримой на X функции.

   Доказательство.
   $f\ :\ E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримо
   $$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$
   $g\ :\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримо.
   (Т.к. $g\Big|_E = f$ – измеримо, $g\Big|_{X \setminus E} = 0$ – измеримо) □

Теорема 3.2.
$f_n\ :\ E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Тогда

1. $\sup f_n$ (т.е. $f(x) := \sup\limits_n f_n(x)$) – измеримая функции
   $\inf f_n$ – аналогично.
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ – измеримы.
3. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, то он измерим.

Доказательство.

1. $E\{\sup f_n \leqslant a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leqslant a\}$ – измеримы
   $E\{\inf f_n \geqslant a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n \geqslant a\}$
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geqslant n} f_k$ – измеримы.
   $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$
3. Если $\lim$ существует, то $\lim = \varlimsup$.

□

Теорема 3.3.
Измеримые $f_1, ..., f_n\ :\ E \to \mathbb{R}\quad \varphi \in C(H)$
и $\forall x \in E\quad (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \subset H$
Тогда $g(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ – измерима.

Доказательство.
Проверим, что прообраз открытого – измерим.
$g^{-1}(G) =$
$= \{x \in E\ :\ (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in \varphi^{-1}(G)$ – открытое множество в силу непрерывности $\varphi\}$
$\varphi^{-1}(G)$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n \implies$
$$\varphi^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)$$

$g^{-1}(G) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{x \in E \ : \ (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in [a_j, b_j)\}$

Докажем, что $(*) = \{x \in E \ : \ (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in [c, d)\}$ – измеримо.

$[c, d) = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \times ... \times [c_n, d_n)$

$(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in [c, d) \iff f_1(x) \in [c_1, d_1), ..., f_n(x) \in [c_n, d_n)$

$(*) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E\{c_k \leqslant f_k < d_k\}$ – измеримо ☐

Следствие.

Если φ – поточечный предел непрерывных функций, то утверждение тоже верно.

Доказательство.

$\varphi = \lim \varphi_n \quad g = \lim g_n \quad g_n$ – измеримо $\implies g$ – измеримо. ☐

12.10.2017

***Определение* 3.3.**

Арифметические операции с ∞.

1. $x \in \overline{\mathbb{R}} \quad x \cdot \pm\infty = \pm\infty$, если $x > 0$.
   $x \cdot \pm\infty = \mp\infty$, если $x < 0$
2. $0 \cdot \pm\infty = 0$
3. $x \in \overline{\mathbb{R}} \ \frac{x}{\pm\infty} = 0$
4. $x \in \mathbb{R} \ x + (\pm\infty) = \pm\infty$
   $x - (\pm\infty) = \mp\infty$
5. $(\pm\infty) - (\pm\infty) = (\pm\infty) + (\mp\infty) = 0$
6. На ноль не делим.

Теорема 3.4 (об арифметических действиях с измеримыми функциями)**.**

1. Сумма, разность, произведение измеримых функций – измеримы.
2. f – измерима, φ – непрерывна $\implies \varphi \circ f$ – измерима.
3. $f \geqslant 0$ и измерима, то f^p измерима $(p > 0)$
   $(+\infty)^p = +\infty$
4. f – измерима $\implies \frac{1}{f}$ – измерима на $E\{f \neq 0\}$.

Доказательство.

1. На множестве $E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\}$
   применима теорема $\varphi(u, v) = u \pm v$ или uv
   $\varphi(f(x), g(x))$ – измерима.
   Надо добавить проверку измеримости на $E\{f = \pm\infty\} \cup E\{g = \pm\infty\}$
   $E\{f + g = +\infty\} = E\{g = +\infty\} \cap E\{f \neq -\infty\} \cup E\{g \neq -\infty\} \cap E\{f = +\infty\}$
   $E\{f + g = 0\} = E\{f = +\infty\} \cap E\{g = -\infty\} \cup E\{g = +\infty\} \cap E\{f = -\infty\}$
   и т.д.

2. Частный случай теоремы.

3. $f^p = \varphi \circ f$, где $\varphi(x) = x^p$ $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – непрерывна
   $\implies$ f^p измерима на $E\{f \neq +\infty\}$, но на $E\{f = +\infty\}$ получили $f^p = +\infty \implies$ измерима.

4. $\tilde{E} = E\{f \neq 0\}$
   $\implies$ надо проверить, что $\tilde{E}\{\frac{1}{f} < a\}$ – измеримо
   Пусть $a > 0$.
   $\tilde{E}\{\frac{1}{f} < a\} = \tilde{E}\{f < 0\} \cup \tilde{E}\{f > \frac{1}{a}\}$
   $\tilde{E}\{\frac{1}{f} < 0\} = \tilde{E}\{f < 0\}$

□

Следствие.

1. Произведение конечного числа измеримых – измеримое.
2. Линейная комбинация измеримых – измерима.
3. Натуральная степень измеримой функции – измерима.

Теорема 3.5.
E – измеримо, $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C(E) \implies f$ – измерима.

Доказательство.
Надо доказать, что прообраз открытого измерим.

Но прообраз открытого множества – открытое в E множество, т.е. это $G \cap E$, где G – открытое в $\mathbb{R}^m$ множество.

E – измеримо по условию, G – измеримо по Лебегу, т.к. открыто. □

***Определение* 3.4.**
Измеримая функция – простая, если ее множество значений конечно.

Допустимое разбиение X – разбиение X на такие измеримые множества, что на каждом из них функция постоянна.

Замечание.
f – простая функция со значениями $c_1, c_2, ..., c_n$

$X = X\{f = c_1\} \sqcup X\{f = c_2\} \sqcup ... \sqcup X\{f = c_n\}$ – допустимое разбиение.

Если есть разбиение $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n$, то

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$

$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in A \\ 0 & \text{если } x \notin A \end{cases}$

– характеристическая функция χ_A

Свойства.

1. Если f и g простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

   Доказательство.
   $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{B_k}$

   $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_k \cap B_j = X$ и на $A_k \cap B_j$ функции f и g постоянны.

   □

2. Сумма, разность, произведение простых функций – простая.

3. Линейная комбинация простых – простая.

4. Поточечный максимум и поточечный минимум простых функций – простая функция.

Теорема 3.6 (о приближении измеримой функции простыми)**.**
$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательная и измеримая.

Тогда существует последовательность $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3 \leqslant ...$

простых функций такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$.

Если f ограничена, то φ_n можно выбрать так, что

$\varphi_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Доказательство.
$E_k = X\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\}$ при $k = 1, 2, ..., 4^n$

$E_0 = X\{f = 0\}$

$E_{4^n+1} = X\{f \geqslant 2^n\}$

$\varphi_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, если $x \in E_k$ $k = 1, 2, ..., 4^n$

$\varphi_n(x) = 2^n$, если $x \in E_{4^n+1}$

$\varphi_n(x) = 0$, если $x \in E_0$.

– простая функция.

$X\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\} = X\{\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant f < \frac{2k-1}{2^{n+1}}\} \sqcup X\{\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leqslant f < \frac{2k}{2^{n+1}}\}$

$\implies \varphi_{n+1}(x) \geqslant \varphi_n(x) \quad \forall x \in X$

Пусть $f(x) \neq +\infty$. Тогда начиная с какого-то номера, x попадет в E_k для не последнего номера k.

Но тогда $|\,\varphi_n(x) - f(x)\,| < \frac{1}{2^n} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$

Пусть $f(x) = +\infty$. Тогда x попадет в E_k с последним номером. $\implies \varphi_n(x) = 2^n \implies \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$.

Пусть f – ограниченная функция. Докажем, что $\varphi_n \rightrightarrows f$.

$\Longrightarrow$ начиная с какого-то места множества E_k с последним номером пустые.

Тогда $|\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ $\forall x \in X$

Это равномерная сходимость. □

Следствие.

1. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательная.

   f – измерима $\Longleftrightarrow$ f – поточечный предел простых

2. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

   f – измерима $\Longleftrightarrow$ f – поточечный предел простых.

Доказательство.

1. “ $\Longrightarrow$ ” – теорема

   “$\Longleftarrow$” – предел измеримых функций – измеримая функция.

2. “ $\Longrightarrow$ ”

   $f = f_+ - f_-$ φ_n – простые, $\lim \varphi_n = f_+$

   ψ_n – простые, $\lim \psi_n = f_-$

   $\Longrightarrow$ $f = \lim(\varphi_n - \psi_n)$

   “$\Longleftarrow$” – как раньше

□

3.2. §2. Последовательности функций.

Поточечная сходимость: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$

Равномерная сходимость $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

И знаем, что из равномерной сходимости поточечная следует, а обратно – нет.

***Определение* 3.5.**
Обозначение.

μ – мера на $X \supset E$

$\mathcal{L}(E, \mu)$ – множество функций $E \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримых относительно μ.

и каждая функция конечна во всех токах, за исключением множества меры 0.

***Определение* 3.6.**
Сходимость почти всюду (почти везде)

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ f_n сходится к f почти всюду относительно меры μ.

Если $\exists e \in E$, т.ч. $\mu e = 0$ и

на множестве $E \setminus e$ f_n поточечно сходится к f.

***Определение* 3.7.**

Сходимость по мере.

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ f_n сходится к f по мере μ.

если $\mu X\{| f_n - f | > \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при любом $\varepsilon > 0$

$f_n \overset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Замечание.

Равномерная сходимость $\implies$ поточечная сходимость $\implies$ сходимость почти всюду.

С другой стороны, из равномерной сходимости следует сходимость по мере.

Утверждение 3.7.

1. $f_n \to f$ почти всюду и $f_n \to g$ почти всюду $\implies$ $f = g$ почти всюду.
2. $f_n \overset{\mu}{\Longrightarrow} f$ и $f_n \overset{\mu}{\Longrightarrow} g$ $\implies$ $f = g$ почти всюду.

Доказательство.

1. $f_n \to f$ почти всюду $\implies$ $\exists e_1 \subset E$ $\mu e_1 = 0$ и
   $f_n \to f$ поточечно на $E \setminus e_1$
   $f_n \to g$ почти всюду $\implies$ $\exists e_2 \subset E$ $\mu e_2 = 0$
   $f_n \to g$ поточечно на $E \setminus e_2$
   Тогда на $E \setminus (e_1 \cup e_2)$ $f = g$, т.к. $\mu(e_1 \cup e_2) = 0$ – $f = g$ почти всюду.
2. $E\{| f - g | > \varepsilon\} \subset E\{| f_n - f | > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup E\{| f_n - g | > \frac{\varepsilon}{2}\}$
   $\implies$ $\mu E\{| f - g | > \varepsilon\} \leqslant \mu E\{| f_n - f | > \frac{\varepsilon}{2}\} + \mu E\{| f_n - g | > \frac{\varepsilon}{2}\} \to 0$ при $n \to \infty$
   $\implies$ $\mu E\{| f - g | > \varepsilon\} = 0$
   $E\{f \neq g\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\{| f - g | > \frac{1}{k}\}$ – множества нулевой меры.
   $\implies$ $\mu E\{f \neq g\} = 0$

□

19.10.2017

Теорема 3.8 (Лебега)**.**

$\mu E < +\infty$ и $f_n, f \;:\; E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримы и почти везде конечны.

И $f_n \to f$ почти везде.

Тогда $f_n \overset{\mu}{\to} f$

Доказательство.

Подправим функции f_n и f на том множестве нулевой меры, где не было сходимости и сделаем сходимость на всем E.

Случай 1. Пусть $f_n \searrow f$ (т.е. $\forall x \in E$ $f_n(x) \searrow f(x)$)

$E\{| f_n - f | > \varepsilon\} = E\{f_n - f > \varepsilon\} \supset E\{f_{n+1} - f > \varepsilon\}$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu E\{f_n - f > \varepsilon\} = \mu \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E\{f_n - f > \varepsilon\}$

Но пересечение это пустое. Т.к.

$x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E\{f_n - f > \varepsilon\}$, если $f_n(x) - f(x) > \varepsilon \ \ \forall n$, но при этом $f_n \to f$, а так не бывает.

Значит, $\mu \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E\{f_n - f > \varepsilon\} = 0$.

Случай 2. Общий.

$\varphi_n := \sup\limits_{k\geqslant n} |\, f_k - f\,| \searrow 0$

Тогда по пункту 1

$\lim\limits_{n\to\infty} E\{\varphi_n > \varepsilon\} = 0$

$E\{\varphi_n > \varepsilon\} = E\{\sup\limits_{k\geqslant n} |\, f_k - f\,| > \varepsilon\} \supset E\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}$

$0 \leftarrow \mu E\{\varphi_n > \varepsilon\} \geqslant \mu E\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\}$ □

Замечание.

1. Обратное неверно. $E = [0, 1)$

   $\mathbb{1}_{[0,1)} \ \ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})} \ \ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)} \ \ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3})} \ \ \mathbb{1}_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2})} \ \ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}$

   $f_n \xrightarrow{\mu} 0$

   Но последовательность не сходится ни в одной точке.

2. Условие $\mu E < +\infty$ существенно. $E = \mathbb{R}$

   $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}$

   f_n поточечно стремятся к 0.

   Но $\lambda\mathbb{R}\{|\, f_n\,| > \frac{1}{2}\} = +\infty$

Теорема 3.9 (Рисса)**.**

$f_n, f \in \mathcal{L}(E) \quad f_n \xrightarrow{\mu} f$

Тогда существует подпоследовательность f_{n_k}, т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство.

$\mu E\{|\, f_n - f\,| > \varepsilon\} \to 0$

$\implies$ найдется номер n_k, т.ч. (и так, чтобы $n_k > n_{k-1}$)

$\mu E\{|\, f_{n_k} - f\,| > \frac{1}{k}\} < \frac{1}{2^k}$

Докажем, что это нужная нам последовательность.

Если $x \in E$, т.ч. $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \neq f(x)$ (или такой предел вообще не существует)

$\implies \exists \varepsilon > 0$, т.ч. $|\, f_{n_k}(x) - f(x)\,| > \varepsilon$ для бесконечного количества номеров k.

$\implies$ можно найти такое из них, что $k > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \exists k \ \ : \ \ |\, f_{n_k}(x) - f(x)\,| > \frac{1}{k}$

$\implies x \in \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E\{|\, f_{n_k} - f\,| > \frac{1}{k}\}$ при любом m.

$A := E\{\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} \neq f\} \subset \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E\{|\, f_{n_k} - f\,| > \frac{1}{k}\}$

$\mu A \leqslant \sum\limits_{k=m}^{\infty} \mu E\{| f_{n_k} - f | > \frac{1}{k}\} < \sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m}$

Поскольку m любое, то $\mu A = 0$. □

Следствие.

$f_n \leqslant g$ почти везде и $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f \leqslant g$ почти всюду.

Доказательство.

$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies$ существует n_k, т.ч. $f_{n_k} \to f$ почти всюду. □

Замечание.

1. Теорема Фреше. Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $f_n \to f$ почти всюду.
2. Теорема Лузина. $E \subset \mathbb{R}^m$ $f : E \to \mathbb{R}$ – измеримая функция.

   $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists e \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\lambda e < \varepsilon$ и $f\Big|_{E\setminus e}$ – непрерывная.
3. Теорема Егорова. $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ измеримые

   $f_n \to f$ почти везде. $\varepsilon > 0$.

   Тогда

   $\exists e \subset E$ $\mu e < \varepsilon$ и $f_n \underset{E\setminus e}{\rightrightarrows} f$

3.3. §3. Определение интеграла

Лемма.

$f \geqslant 0$ простая, $f : X \to \mathbb{R}$

$A_1, ..., A_n$ и $B_1, ..., B_m$ – допустимые разбиения X.

$a_1, ..., a_n$ и $b_1, ..., b_m$ – значения f на соответствующих множествах.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu A_k = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu B_j$

Доказательство.

Если $A_k \cap B_j \neq \varnothing$, то $a_k = b_j$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (A_k \cap B_j)) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap B_j) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu(A_k \cap B_j) =$

$= \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A_k \cap B_j)) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu B_j$ □

Замечание.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap E) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j \cap E)$

***Определение* 3.8.**

$f \geqslant 0$ и простая.

$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E f(x)\, d\mu(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap E)$, где $A_1, ..., A_n$ – допустимое разбиение X, а $a_1, ..., a_n$ – значения на $A_1, ..., A_n$.

Свойства.

1. $f \equiv c \quad \int\limits_E f\,d\mu = c \cdot \mu E$

2. $0 \leqslant f \leqslant g$ простые, то $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$

   Доказательство.
   Возьмем общее допустимое разбиение $A_1, ..., A_n$

   $a_1, ..., a_n$ – значения f, $b_1, ..., b_n$ – значения g.

   $\implies a_1 \leqslant b_1, ..., a_n \leqslant b_n$

   $\implies \int\limits_E f\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^n a_k\mu(A_k \cap E) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n b_k\mu(A_k \cap E) = \int\limits_E g\,d\mu$ □

***Определение* 3.9.**
Интеграл от неотрицательной измеримой функции.

$\int\limits_E f\,d\mu := \sup\{\int\limits_E \varphi\,d\mu \quad : \quad \varphi \geqslant 0 - \text{простая и } \varphi \leqslant f\}$

Корректность определения.
Нужно показать, что если f простая, то получилось старое определение.

$\sup \geqslant$ старое определение.

Но если $\varphi \leqslant f$ и φ, f – простые, то $\int\limits_E \varphi\,d\mu \leqslant \int\limits_E f\,d\mu$

$\implies \sup \leqslant$ старое определение.

$\implies \sup =$ старое определение. □

***Определение* 3.10.**
f – измеримая.

$\int\limits_E f\,d\mu := \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu$ если нет двух бесконечностей.

Свойства интегралов от неотрицательных функций.

1. $0 \leqslant f \leqslant g \implies \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$

2. $\mu E = 0 \implies \int\limits_E f\,d\mu = 0$

3. $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_X \mathbb{1}_E f\,d\mu$

4. (монотонность по множеству) $A \subset B \implies \int\limits_A f\,d\mu \leqslant \int\limits_B f\,d\mu$

Доказательство.

1. Если $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ – простая, то $0 \leqslant \varphi \leqslant g$

   Т.е. множество простых, по которым берется sup для f содержится в множестве простых, по которым берется sup для g.

2. $\mu E = 0 \;\; \varphi$ – простая.

   $\int\limits_E \varphi\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^n a_k\mu(A_k \cap E) = 0$

   и $\int\limits_E f\,d\mu = \sup 0 = 0$

3. Если φ простая и $0 \leqslant \varphi \leqslant \mathbb{1}_E f$, то $\varphi = 0$ вне множества E.

   $\implies \int\limits_E \varphi\, d\mu = \int\limits_X \varphi\, d\mu = 0$

   Т.е. в sup для $\int\limits_X \mathbb{1}_E f\, d\mu$ рассматриваем $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, т.ч. $\varphi = 0$ вне E.

   А в sup для $\int\limits_E f\, d\mu$ можно все рассмотренные φ занулить вне E.

4. $\int\limits_A f\, d\mu = \int\limits_X \mathbb{1}_A f\, d\mu$

   $\int\limits_B f\, d\mu = \int\limits_X \mathbb{1}_B f\, d\mu$

   Но $\mathbb{1}_A f \leqslant \mathbb{1}_B f$

   Тогда $\int\limits_X \mathbb{1}_A f\, d\mu \leqslant \int\limits_X \mathbb{1}_B f\, d\mu$.

   А тогда и $\int\limits_A f\, d\mu \leqslant \int\limits_B f\, d\mu$

$\square$

Теорема 3.10 (Беппо Леви)**.**

$f \geqslant 0$ – измерима и $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ – измеримы и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu$

Доказательство.

$f_n \leqslant f \implies \int\limits_E f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_E f_{n+1}\, d\mu \leqslant \int\limits_E f\, d\mu$

$\implies L := \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_E f\, d\mu$

Хотим теперь доказать, что $L \geqslant \int\limits_E f\, d\mu$.

$\int\limits_E f\, d\mu = \sup\{\int\limits_E \varphi\, d\mu \quad : \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant f \quad \varphi \text{ – простая } \}$

Т.е. надо доказать, что

$L \geqslant \int\limits_E \varphi\, d\mu \;\; \forall \varphi$ – простая и $0 \leqslant \varphi \leqslant f$.

Зафиксируем $\theta \in (0, 1)$

$E_n := E\{f_n \geqslant \theta\varphi\}$

$E_n \subset E_{n+1}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$

Докажем последнее равенство.

Возьмем $x \in E$. Если $\varphi(x) = 0$, то $f_n(x) \geqslant 0 = \theta\varphi(x) \implies x \in E_n \;\; \forall n$

Если $\varphi(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geqslant \varphi(x) > \theta\varphi(x)$

$\implies$ для каких-то номеров $f_n(x) > \theta\varphi(x) \implies x \in E_n$

Равенство $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$ получили.

$L \geqslant \int\limits_E f_n\, d\mu \geqslant \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu \geqslant \int\limits_{E_n} \theta\varphi\, d\mu = \theta \int\limits_{E_n} \varphi\, d\mu$

$L \geqslant \theta \int\limits_{E_n} \varphi\, d\mu = \theta \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap E_n)$

Но при $n \to \infty \quad \mu(A_k \cap E_n) \to \mu(A_k \cap E)$, т.к. $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$

$L \geqslant \theta \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap E) = \theta \int\limits_{E} \varphi\, d\mu$

Переходим к пределу при $\theta \to 1$. $\square$

25.10.2017

Свойства.

5. Аддитивность $f, g \geqslant 0$
   $\implies \int\limits_E (f+g)\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu + \int\limits_E g\, d\mu$
6. Однородность $a \geqslant 0,\quad f \geqslant 0 \implies \int\limits_E af\, d\mu = a \int\limits_E f\, d\mu$
7. Линейность.
   $a, b \geqslant 0,\quad f, g \geqslant 0 \implies \int\limits_E (af + bg)\, d\mu = a \int\limits_E f\, d\mu + b \int\limits_E g\, d\mu$
8. Аддитивность по множеству. $f \geqslant 0$
   $\implies \int\limits_{A \sqcup B} f\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu + \int\limits_B f\, d\mu$
9. Если $f > 0$ и $\mu E > 0$, то $\int\limits_E f\, d\mu > 0$.

Доказательство.

5. Приблизим измеримые функции f и g последовательностью простых.
   $0 \leqslant \varphi_n \nearrow f \quad 0 \leqslant \psi_n \nearrow g$
   $0 \leqslant \implies \varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$
   $\implies \int\limits_E (f+g)\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \varphi_n\, d\mu + \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \psi_n\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu + \int\limits_E g\, d\mu$
6. $a > 0$ Приближаем f последовательностью φ_n – простые, $\geqslant 0$ и $\varphi_n \nearrow f$
   $\implies 0 \leqslant a\varphi_n \nearrow af$
   $\implies$ (по т. Леви) $\int\limits_E af\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E a\varphi_n\, d\mu = a \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \varphi_n\, d\mu = a \int\limits_E f\, d\mu$
7. Комбинация двух предыдущих.
8. $f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f \implies \int\limits_{A\sqcup B} f\, d\mu = \int\limits_{A\sqcup B} \mathbb{1}_A f\, d\mu + \int\limits_{A\sqcup B} \mathbb{1}_B f\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu + \int\limits_B f\, d\mu$
9. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f > \frac{1}{n}\}$ и $E\{f > \frac{1}{n}\}$ возрастающая последовательность множеств.
   $0 < \mu E = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E\{f > \frac{1}{n}\} \implies \exists n \,:\, \mu E\{f > \frac{1}{n}\} > 0$

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E\{f>\frac{1}{n}\}\sqcup(E\setminus E\{f>\frac{1}{n}\})} f\,d\mu = \int\limits_{E\{f>\frac{1}{n}\}} f\,d\mu + \int\limits_{E\setminus\dots} f\,d\mu \geqslant \int\limits_{E\{f>\frac{1}{n}\}} f\,d\mu \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{E\{f>\frac{1}{n}\}} \tfrac{1}{n}\,d\mu = \tfrac{1}{n}\mu E\{f>\tfrac{1}{n}\} > 0$$

□

Пример.

$T = \{t_1, t_2, t_3, ...\}$ – конечное или счетное

$w_1, w_2, w_3, ... \geqslant 0$

$\mu A := \sum\limits_{k\,:\,t_k\in A\cap T} w_k$ – мера.

Поймем, что для $f \geqslant 0$ $\int\limits_E f\,d\mu = \sum\limits_{k\,:\,t_k\in E} f(t_k)w_k$

Если $E\cap T$ – конечное множество, то равенство очевидно. Т.к. справа конечное количество слагаемых. А слева поменяем функцию на множестве нулевой меры (интеграл от этого не меняется) – на ноль. Тогда получится функция с конечным числом значений, а тогда справа будет для нее ровно определение ее интеграла.

f – простая, тоже. (В силу конечности значений)

Распространим теперь на другие случаи тоже.

Пусть $f \geqslant 0$. Есть две ситуации. Если $\int\limits_E f\,d\mu < +\infty$, то существует такая простая функция $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ и такая, что $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E \varphi\,d\mu + \varepsilon$

$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E \varphi\,d\mu + \varepsilon = \varepsilon + \sum\limits_{k:t_k\in E} \varphi(t_k)w_k \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{k:t_k\in E} f(t_k)w_k$

Пусть $A \subset E$ и A – конечное множество.

$\sum\limits_{k:t_k\in A} f(t_k)w_k = \int\limits_A f\,d\mu \leqslant \int\limits_E f\,d\mu$

Т.е.

$\sum\limits_{k:t_k\in A} f(t_k)w_k \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{k:t_k\in E} f(t_k)w_k$

Устремив $\varepsilon \to 0$, и взяв $\sup\limits_{A\subset E\text{ – конечное}}$, то получим

$\sum\limits_{k\,:\,t_k\in E} f(t_k)w_k \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \sum\limits_{k\,:\,t_k\in E} f(t_k)w_k$

Есть еще случай, когда $\int\limits_E f\,d\mu = +\infty$.

$\implies \exists\varphi_n$ – простая $\leqslant f$, т.ч. $\int\limits_E \varphi_n\,d\mu > n$

$n < \int\limits_E \varphi_n\,d\mu = \sum\limits_{k:t_k\in E} \varphi_n(t_k)w_k \leqslant \sum\limits_{k:t_k\in E} f(t_k)w_k$

$\implies \sum\limits_{k:t_k\in E} f(t_k)w_k = +\infty$

В случаях, когда f может быть отрицательна, то расписываем через $f = f_+ - f_-$

На этом материал, который входит в коллоквиум, заканчивается =).

***Определение* 3.11.**

$P(x)$ – какое-то свойство.

Например, $f(x) \geqslant 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$P(x)$ выполняется почти везде на E, если $\exists e \subset E$, т.ч. $\mu e = 0$, т.ч. $P(x)$ выполнено при всех $x \in E \setminus e$

Замечание.

Если есть не более чем счетное множество свойств $P_1, P_2 ...$, то можно выкинуть общее множество нулевой меры, вне которого все свойства выполнены.

Теорема 3.11 (Неравенство Чебышёва).

f – измеримая $\geqslant 0$ и $p > 0$, $t \geqslant 0$

Тогда $\mu E\{f \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t^p} \int\limits_E f^p \, d\mu$

Доказательство.

$\int\limits_E f^p \, d\mu = \int\limits_{E\{f \geqslant t\} \sqcup E \setminus E\{f \geqslant t\}} f^p \, d\mu \geqslant \int\limits_{E\{f \geqslant t\}} f^p \, d\mu \geqslant \int\limits_{E\{f \geqslant t\}} t^p \, d\mu = t^p \mu E\{f \geqslant t\}$ □

Свойства интегралов, связанные с понятием почти везде.

1. Если $\int\limits_E |\, f \,| \, d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна на E.
2. Если $\int\limits_E |\, f \,| \, d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде на E.
3. Если $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int\limits_A f \, d\mu$ и $\int\limits_B f \, d\mu$ одновременно существуют или нет и если существуют, то равны.
4. $f = g$ почти везде на E, то $\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E g \, d\mu$

Доказательство.

1. $E\{|\, f \,| = +\infty\} \underset{\forall t}{\subset} E\{|\, f \,| \geqslant t\}$

   $\mu E\{|\, f \,| = +\infty\} \leqslant \mu E\{|\, f \,| \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t} \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu \to 0$ при $t \to +\infty$.

   $\implies \mu E\{|\, f \,| = +\infty\} = 0$
2. Пусть $\mu E\{f \neq 0\} > 0$

   $E\{f \neq 0\} = E\{|\, f \,| > 0\}$

   $\mu E\{|\, f \,| > 0\} > 0 \implies$ по свойству 9 $\int\limits_{E\{|\, f \,| \neq 0\}} |\, f \,| \, d\mu > 0$. Но $\int\limits_{E\{|\, f \,| \neq 0\}} |\, f \,| \, d\mu = \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu$

   $\implies$ получили противоречие.
3. $\int\limits_B f_\pm \, d\mu = \int\limits_{A \sqcup (B \setminus A)} f_\pm \, d\mu = \int\limits_A f_\pm \, d\mu + \int\limits_{B \setminus A} f_\pm \, d\mu = \int\limits_A f_\pm \, d\mu$, т.к. $B \setminus A$ нулевой меры.

   $\int\limits_B f_\pm \, d\mu = \int\limits_A f_\pm \, d\mu$

   $\int\limits_B f \, d\mu = \int\limits_B f_+ \, d\mu - \int\limits_B f_- \, d\mu = \int\limits_A f_+ \, d\mu - \int\limits_A f_- \, d\mu = \int\limits_A f \, d\mu$
4. Если $B = E \quad A = E\{f = g\}$, то по предыдущему свойству получаем:

   $\int\limits_B f \, d\mu = \int\limits_A f \, d\mu = \int\limits_A g \, d\mu = \int\limits_B g \, d\mu$

□

3.4. §4. Суммируемые функции

***Определение* 3.12.**

f – измеримая и $\int\limits_E f_\pm \, d\mu < +\infty$

$\implies$ f – суммируемая на множестве E.

Свойства суммируемых функций.

1. f суммируемая на $E \iff f$ измерима и $\int\limits_E |\, f \,| \, d\mu < +\infty$

   Доказательство.
   f – суммируема $\iff \int\limits_E f_\pm \, d\mu < +\infty \iff \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu < +\infty$

   Пояснение к последней стрелочке.

   "$\implies$"

   $|\, f \,| = f_+ + f_- \implies \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu = \int\limits_E f_+ \, d\mu + \int\limits_E f_- \, d\mu$

   "$\impliedby$"

   $|\, f \,| \geqslant f_\pm \geqslant 0 \implies 0 \leqslant \int\limits_E f_\pm \, d\mu \leqslant \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu$ □

2. f суммируема на $E \implies f$ почти везде конечна на E.

   А такое свойство уже было, просто мы не говорили слово "суммируема"

3. $A \supset B$ и f – суммируема на $A \implies f$ суммируема на B.

   Доказательство.
   $\int\limits_A |\, f \,| \, d\mu = \int\limits_B |\, f \,| \, d\mu + \int\limits_{A \setminus B} |\, f \,| \, d\mu \geqslant \int\limits_B |\, f \,| \, d\mu$ □

4. f – ограничена и измерима, E – множество конечной меры, то f суммируема на E.

   Доказательство.
   $|\, f \,| \leqslant M \implies \int\limits_E |\, f \,| \, d\mu \leqslant \int\limits_E M \, d\mu = M\mu E$ □

5. Если f, g – суммируемы и $f \leqslant g$ почти везде на E, то $\int\limits_E f \, d\mu \leqslant \int\limits_E g \, d\mu$.

   Доказательство.
   $f_+ - f_- = f \leqslant g = g_+ - g_-$

   $0 \leqslant f_+ + g_- \leqslant f_- + g_+$

   $\int\limits_E f_+ \, d\mu + \int\limits_E g_- \, d\mu = \int\limits_E (f_+ + g_-) \, d\mu \leqslant \int\limits_E (f_- + g_+) \, d\mu = \int\limits_E f_- \, d\mu + \int\limits_E g_+ \, d\mu$

   $\implies \int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E f_+ \, d\mu - \int\limits_E f_- \, d\mu \leqslant \int\limits_E g_+ \, d\mu - \int\limits_E g_- \, d\mu = \int\limits_E g \, d\mu$ □

6. Аддитивность. f, g – суммируемы $\implies f + g$ суммируема (т.к. $|\, f \,| + |\, g \,| \geqslant |\, f + g \,|$) и
   $\int\limits_E (f + g) \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu + \int\limits_E g \, d\mu$

Доказательство.
$h_+ - h_- = h := f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$
$\implies h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \geqslant 0$
$\int\limits_E h_+\,d\mu + \int\limits_E f_-\,d\mu + \int\limits_E g_-\,d\mu = \int\limits_E h_-\,d\mu + \int\limits_E f_+\,d\mu + \int\limits_E g_+\,d\mu$
А теперь все перекидываем так, как нам нужно. И получаем искомое равенство. □

7. Однородность. f – суммируема, $a \in \mathbb{R} \implies af$ суммируема и
$\int\limits_E (af)\,d\mu = a\int\limits_E f\,d\mu$

Доказательство.
Если $a \geqslant 0$, то $\int\limits_E (af)_\pm\,d\mu = a\int\limits_E f_\pm\,d\mu \implies \int\limits_E (af)\,d\mu = a\int\limits_E f\,d\mu$
Если $a = -1$, то $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$
$\implies \int\limits_E f = \int\limits_E f_+ - \int\limits_E f_- = \int\limits_E (-f)_- - \int\limits_E (-f)_+ = -\int\limits_E (-f)$ □

8. Линейность интеграла. $a, b \in \mathbb{R}$, f, g – суммируемы
$\implies af + bg$ – суммируемы и
$\int\limits_E (af + bg)\,d\mu = a\int\limits_E f\,d\mu + b\int\limits_E g\,d\mu$

9. Аддитивность по множеству. $E = E_1 \sqcup ... \sqcup E_n$
f – суммируема на $E \iff f$ – суммируема на $E_k \forall k$
и если суммируемы, то $\int\limits_E f\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f\,d\mu$

Доказательство.
“ $\implies$ ” свойство 3.
“$\impliedby$”
$f = f \cdot \mathbb{1}_{E_1} + ... + f \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ и все слагаемые суммируемые.
и $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E (\sum\limits_{k=1}^{n} f \cdot \mathbb{1}_{E_k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_E f \cdot \mathbb{1}_{E_k}\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f\,d\mu$ □

10. Интеграл по сумме мер.
μ_1 и μ_2 – меры заданные на одной и той же σ-алгебре.
$\mu := \mu_1 + \mu_2$.
Пусть f измерима относительно этой σ-алгебры.
f суммируема относительно $\mu \iff f$ суммируема относительно μ_1 и μ_2.
И в этом случае $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu_1 + \int\limits_E f\,d\mu_2$

Доказательство.
Достаточно понять, что $\int\limits_E f_\pm\,d\mu = \int\limits_E f_\pm\,d\mu_1 + \int\limits_E f_\pm\,d\mu_2$
Т.е. надо понять, что это выполняется для неотрицательных функций. А для тех надо понять для простых. А для простых это очевидно.

Действительно, пусть φ – простая. Тогда

$$\int\limits_E \varphi\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mu_1 A_k + \mu_2 A_k) = \int\limits_E \varphi\, d\mu_1 + \int\limits_E \varphi\, d\mu_2$$

□

26.10.2017

Замечание.

$f\ :\ E \to \mathbb{C}$

$f = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f$

f – измерима, если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ – измеримы.

$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re} f\, d\mu + i \cdot \int\limits_E \operatorname{Im} f\, d\mu$

Докажем, что $\left| \int\limits_E f\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_E |\, f\,|\ d\mu$

$\left| \int\limits_E f\, d\mu \right| = e^{i\alpha} \int\limits_E f\, d\mu$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Пояснение. Было комплексное число. Это точка на плоскости, умножим на число с модулем 1. Это какой-то поворот. Можно подобрать угол поворота, чтобы попасть на ось Re, т.е. получить в точности модуль числа.)

В силу линейности это равно

$$\left| \int\limits_E f\, d\mu \right| = e^{i\alpha} \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E (e^{i\alpha} f)\, d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{i\alpha} f)\, d\mu + i \int\limits_E \operatorname{Im}(e^{i\alpha} f)\, d\mu$$

Заметим, что т.к. у нас модуль вещественный, то $\int\limits_E \operatorname{Im}(e^{i\alpha} f)\, d\mu = 0$.

$$\left| \int\limits_E f\, d\mu \right| = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{i\alpha} f)\, d\mu \leqslant \int\limits_E |\operatorname{Re}(e^{i\alpha} f)|\ d\mu \leqslant \int\limits_E |\, e^{i\alpha} f\,|\ d\mu = \int\limits_E |\, f\,|\ d\mu$$

Теорема 3.12 (счетная аддитивность интеграла)**.**

$f \geqslant 0$ измерима, $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

Тогда $\int\limits_E f\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f\, d\mu$

Доказательство.

$\mathbb{1}_E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}$

$\implies f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} f$

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{E_k} f \geqslant 0$

$S_{n+1} \geqslant S_n$ и $S_n \to f$.

Тогда по теореме Беппо Леви $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E S_n\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu$

Осталось понять, что же такое $\int\limits_E S_n\, d\mu$:

$$\int\limits_E S_n\,d\mu = \int\limits_E \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{E_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_E \mathbb{1}_{E_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f\,d\mu \to \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\,d\mu$$

Значит, равенство есть. □

Следствие.

1. f – суммируема и $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, тогда

   $$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$$

   Доказательство.
   $\int\limits_E f_{\pm} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f_{\pm}\,d\mu$ и вычтем. □

2. $f \geqslant 0$ измеримая. Тогда $\nu E := \int\limits_E f\,d\mu$ для любого измеримого E – мера на той же σ-алгебре, что и μ.

   Доказательство.
   Неотрицательность очевидна, счетная аддитивность из теоремы. □

3. f – суммируемая и $E_n \subset E_{n+1}$ $\quad E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

   Тогда $\int\limits_E f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$

   Доказательство.
   По пункту 2 $\quad \nu_{\pm} A := \int\limits_A f_{\pm}\,d\mu$ – мера

   $$\implies \int\limits_E f_{\pm}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f_{\pm}\,d\mu$$

   И вычтем равенства. □

4. f – суммируема $E_n \supset E_{n+1}$ и $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$

   В частности, если $\mu E = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu = 0$

   Доказательство.
   Аналогично пункту 3. □

5. f – суммируема на E. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

   $\exists A \subset E$, т.ч. $\mu A < +\infty$ и $\int\limits_{E\setminus A} |\,f\,|\,d\mu < \varepsilon$

Доказательство.

$E_n := E\{|\,f\,| < \frac{1}{n}\}$

$E_{n+1} \subset E_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} |\,f\,|\, d\mu = \int\limits_{E\{f=0\}} |\,f\,|\, d\mu = 0$

$\implies$ найдется номер n, для которого $\int\limits_{E_n} |\,f\,|\, d\mu < \varepsilon$

Положим $A := E \setminus E_n = E\{|\,f\,| \geqslant \frac{1}{n}\}$.

$\mu A = \mu E\{|\,f\,| \geqslant \frac{1}{n}\} \underset{\text{по н. Чебышева}}{\leqslant} \frac{1}{1/n} \cdot \int\limits_{E} |\,f\,|\, d\mu = n \int\limits_{E} |\,f\,|\, d\mu < +\infty$ □

Теорема 3.13 (абсолютная непрерывность интеграла)**.**

f – суммируемая функция на E, $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч.

$\forall e \subset E \quad \mu e < \delta \quad \left| \int\limits_{e} f\, d\mu \right| < \varepsilon$

Доказательство.

Если докажем для неотрицательной функции ($f \geqslant 0$), то дальше останется воспользоваться $\left| \int\limits_{e} f\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_{e} |\,f\,|\, d\mu$

Пусть $f \geqslant 0$. $\forall \varepsilon > 0$ найдем такую простую функцию φ, т.ч.

$0 \leqslant \varphi \leqslant f$ и $\int\limits_{E} f\, d\mu \leqslant \int\limits_{E} \varphi\, d\mu + \varepsilon$

φ – простая $\implies$ ограничена $\implies$ $0 \leqslant \varphi \leqslant C$.

Тогда $0 \leqslant \int\limits_{e} \varphi\, d\mu \leqslant C\mu e < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

(Возьмем $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$)

$0 \leqslant \int\limits_{e} f\, d\mu \leqslant \int\limits_{e} \varphi\, d\mu + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$, если $\mu e < \delta$.

Пояснение: можем перенести неравенство с E на e, поскольку $\int\limits_{e} (f - \varphi)\, d\mu \leqslant \int\limits_{E} (f - \varphi)\, d\mu < \varepsilon$ (т.к. $f - \varphi \geqslant 0$)

□

Следствие.

f – суммируема и e_n – последовательность множеств, т.ч. $\mu e_n \to 0$

Тогда $\int\limits_{e_n} f\, d\mu \to 0$

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall e \; : \; \mu e < \delta \implies \left| \int\limits_{e} f\, d\mu \right| < \varepsilon$

Но начиная с некоторого номера $\mu e_n < \delta \implies \left| \int\limits_{e_n} f\, d\mu \right| < \varepsilon$ □

***Определение* 3.13.**

μ – мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$.

Если существует $w \geqslant 0$ измеримая, т.ч.

$\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu A = \int\limits_A w\, d\mu$

То мера ν имеет плотность w относительно μ.

Теорема 3.14.

ν – мера, имеющая плотность w относительно μ.

Тогда, если $f \geqslant 0$, то $\int\limits_E f\, d\nu = \int\limits_E fw\, d\mu$

Если fw суммируема относительно μ, то это равенство тоже выполняется.

Доказательство.

Если $f = \mathbb{1}_A$, то $\int\limits_E f\, d\nu = \int\limits_E \mathbb{1}_A\, d\nu = \int\limits_A d\nu = \nu A = \int\limits_A w\, d\mu = \int\limits_E \mathbb{1}_A w\, d\mu = \int\limits_E fw\, d\mu$

По линейности это равенство есть и если f – простая.

Если $f \geqslant 0$ и измерима,

$\int\limits_E f\, d\nu = \sup\{\int\limits_E \varphi\, d\nu \ :\ 0 \leqslant \varphi \leqslant f \ \ \varphi$ – простая$\}$ $=$

Заметим, что $\int\limits_E \varphi\, d\nu = \int\limits_E \varphi w\, d\mu$

$=$ $\sup\{\int\limits_E \varphi w\, d\mu \ :\ 0 \leqslant \varphi w \leqslant fw \ \ \varphi$ – простая$\}$

Возьмем $\varphi_n \nearrow f$ простые

$\varphi_n w \nearrow fw \implies \int\limits_E \varphi_n w\, d\mu \to \int\limits_E fw\, d\mu$

Если fw суммируема относительно μ, то

$(fw)_\pm = f_\pm w \implies \int\limits_E f_\pm\, d\nu = \int\limits_E (fw)_\pm\, d\mu < +\infty$

И вычтем. □

Теорема 3.15.

f, g – суммируемы и $\forall E$ – измеримые множества выполняется, что

$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E g\, d\mu$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство.

$h := f - g \quad \forall E \quad \int\limits_E h\, d\mu = 0$

$E_1 := X\{h \geqslant 0\}$

$E_2 := X\{h < 0\}$

$\int\limits_{E_1} h\, d\mu = 0 \implies h$ почти везде 0 на E_1.

$\int\limits_{E_2} (-h)\, d\mu = 0 \implies h$ почти везде 0 на E_2.

$\implies f = g$ почти везде. □

Замечание от Ани.

Из этой теоремы, в частности, следует единственность плотности. Действительно, пусть так оказалось, что

$\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu A = \int\limits_A \omega_1\, d\mu = \int\limits_A \omega_2\, d\mu$

Но тогда по теореме выше $\omega_1 = \omega_2$ почти везде.

Теорема 3.16 (Неравенство Гёльдера).

$p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

f, g – измеримы. Тогда

$\int\limits_E |fg|\, d\mu \leqslant (\int\limits_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_E |g|^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство.

Если $\int\limits_E |f|^p\, d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде $\implies fg = 0$ почти везде $\implies \int\limits_E |fg|\, d\mu = 0$

Можно считать, что интегралы в правой части $\neq 0$.

Тогда если в правой части один из $\int = +\infty$, то неравенство очевидно.

Можно считать, что интегралы в правой части $\neq +\infty$.

$A^p := \int\limits_E |f|^p\, d\mu$

$B^q := \int\limits_E |g|^q\, d\mu$

Неравенство Юнга $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad u, v \geqslant 0$ (доказывали вроде как, примитивно проверяется дифференцированием)

$u := \frac{|f(x)|}{A} \;\; v := \frac{|g(x)|}{B}$

$\frac{|f(x)g(x)|}{AB} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$

$\frac{1}{AB} \int\limits_E |fg|\, d\mu \leqslant \frac{1}{pA^p} \int\limits_E |f|^p\, d\mu + \frac{1}{qB^q} \int\limits_E |g|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\frac{1}{AB} \int\limits_E |fg|\, d\mu \leqslant 1$

$\implies \int\limits_E |fg|\, d\mu \leqslant AB$, что мы и хотели. □

Теорема 3.17 (Неравенство Минковского).

$p > 1 \;\; f, g$ – измеримы.

$(\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\int\limits_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int\limits_E |g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство.

Можно считать, что оба $\int$ в правой части $< +\infty$ (иначе очевидно).

$|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant 2\max\{|f|, |g|\}$

$|f+g|^p \leqslant 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ – суммируемые функции.

$\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu \leqslant \int\limits_E (|f| + |g|)\,|f+g|^{p-1}\, d\mu = \int\limits_E |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu + \int\limits_E |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu$

$\int\limits_E |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant (\int\limits_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int\limits_E |f+g|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}$

$(p-1)q = (p-1)\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = p$

$\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu \leqslant (\int\limits_E |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{q}} + (\int\limits_E |g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$

Сократим на $(\int\limits_E |f+g|^p\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$ и все получится. □

08.11.2017

3.5. §5. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 3.18 (Беппо Леви)**.**

$0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ – измеримые.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ почти везде. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu$

Следствие.

1. $g_n \geqslant 0$ – измеримая. Тогда

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu = \int\limits_E \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu$

   Доказательство.

   $f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} g_k \implies f_n \geqslant 0$ и $f_n \leqslant f_{n+1}$

   Тогда по теореме Беппо Леви $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \int\limits_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int\limits_E \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu$

   С другой стороны,

   $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \sum\limits_{k=1}^{n} g_k \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_E g_k \, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_E g_k \, d\mu$ □

2. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_E |\, f_n \,| \, d\mu < +\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти везде на E.

   Доказательство.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_E |\, f_n \,| \, d\mu = \int\limits_E \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, f_n \,| \, d\mu < +\infty$

   $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, f_n \,|$ почти везде конечна.

   $\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, f_n \,|$ почти везде конечна. □

Лемма (Фату)**.**

$f_n \geqslant 0$ измеримые.

Тогда $\int\limits_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu$

Доказательство.

$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} f_k =: \lim\limits_{n\to\infty} g_n$

$g_n \geqslant 0$ и $g_n \leqslant g_{n+1}$

Тогда по теореме Беппо Леви $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu = \int\limits_E \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \int\limits_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

Т.к. $g_n \leqslant f_n$, то $\int\limits_E g_n \, d\mu \leqslant \int\limits_E f_n \, d\mu$

$\implies \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu = \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu$ □

Замечание.

Может быть "<".

$f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]} \quad E = \mathbb{R} \ \ \mu = \lambda_1$

$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$

$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0$

Следствие (усиленный вариант теоремы Беппо Леви).

$f_n \geqslant 0$ – измеримые, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $f_n \leqslant f$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu$

Доказательство.

$f_n \leqslant f \implies \int\limits_E f_n \, d\mu \leqslant \int\limits_E f \, d\mu$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu \leqslant \int\limits_E f \, d\mu$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu \geqslant \int\limits_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu$ – неравенство по лемме Фату.

Собираем два неравенства вместе, получаем равенство. □

Теорема 3.19 (Лебега о предельном переходе (мажорируемой сходимости))**.**

f_n – измеримые и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Если существует F – измеримая, т.ч. $|\, f_n \,| \leqslant F$ и $\int\limits_E F \, d\mu < +\infty$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu = \int\limits_E f \, d\mu$

Замечание.

Такая F называется суммируемой мажорантой.

Доказательство.

$g_n := 2F - |\, f_n - f \,| \leqslant 2F$ и $g_n \to 2F$, т.к. $f_n \to f$.

$|\, f_n \,| \leqslant F \implies |\, f \,| \leqslant F \implies |\, f_n - f \,| \leqslant |\, f_n \,| + |\, f \,| \leqslant 2F$

$\implies g_n \geqslant 0.$

Т.е. g_n удовлетворяют условию усиленной версии теоремы Беппо Леви.

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu = \int\limits_E 2F \, d\mu$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E (2F - |\, f_n - f \,|) \, d\mu = \int\limits_E 2F \, d\mu - \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E |\, f_n - f \,| \, d\mu$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E |\, f_n - f \,| \, d\mu = 0$

$0 \leftarrow \int\limits_E |\, f_n - f \,| \, d\mu \geqslant \left| \int\limits_E f_n \, d\mu - \int\limits_E f \, d\mu \right|$

$\implies \int\limits_E f_n \, d\mu \to \int\limits_E f \, d\mu$ □

Замечание.

1. В условие теоремы можно заменить условие на наличие предела на $\int\limits_E |\, f_n - f \,| \, d\mu \to 0$

2. Без суммируемой мажоранты утверждение неверно.

   $E = [0,1] \;\; \mu = \lambda_1 \quad f_n = n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})} \to 0 \equiv f$

   $\int\limits_{[0,1]} f_n \, d\lambda_1 = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

3. В теореме Лебега можно написать не поточечную сходимость, а сходимость по мере $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Теорема 3.20 (Связь интегралов Римана и Лебега)**.**

$f \in C[a,b] \implies \int\limits_{[a,b]} f \, d\lambda_1 = \int\limits_a^b f(x) \, dx$

Доказательство.

Рассмотрим дробление $[a,b] \;\; : \;\; a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$S := \sum\limits_{k=1}^n \max\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x) \, dx$

$s := \sum\limits_{k=1}^n \min\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x) \, dx$

Стремятся к интегралу, если мелкость дробления $\to 0$.

$g(x) := \max\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t)$, если $x \in [x_{k-1}, x_k)$

$g(x) \geqslant f(x) \;\; \forall x$

$\int\limits_{[a,b]} g \, d\lambda_1 = S$

$S \geqslant \int\limits_{[a,b]} f \, d\lambda_1$

Аналогично

$h(x) := \min\limits_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t)$, если $x \in [x_{k-1}, x_k)$

$h(x) \leqslant f(x) \;\; \forall x$

$s = \int\limits_{[a,b]} h \, d\lambda_1 \leqslant \int\limits_{[a,b]} f \, d\lambda_1$

$\implies s \leqslant \int\limits_{[a,b]} f \, d\lambda_1 \leqslant S.$

А при мелкости дробления $\to 0$, s и $S \to \int\limits_a^b f(x) \, dx$ $\square$

Замечание.

Интеграл Римана обычно определяется так.

$I = \int\limits_a^b f(x) \, dx$, если

для любой последовательностей дроблений, мелкость которых $\to 0$,

интегральные суммы $\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \to I$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \;\; a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

На самом деле, наше утверждение верно и для такого.

Теорема 3.21.

$f \; : \; [a,b] \to \mathbb{R}$ и интегрируема по Риману, то она суммируема и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda_1$$

Теорема 3.22 (Критерий Лебега интегрируемости функций по Риману)**.**

$f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ – ограничена. Тогда

f – интегрируема по Риману $\iff$ Мера множества ее точек разрыва $= 0$.

3.6. §6. Произведение мер

***Определение* 3.14.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с σ-конечными мерами.

$\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A}\ :\ \mu A < +\infty\}$

$\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B}\ :\ \nu B < +\infty\}$

m_0 – мера на $X \times Y$, если

$A \in \mathcal{A}_0$, $B \in \mathcal{B}_0$, то $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Такие $A \times B$ назовем измеримым прямоугольником.

Теорема 3.23.

Множество измеримых прямоугольников – полукольцо $\mathcal{P}$, а m_0 – мера на нем.

Доказательство.

$\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B}_0$ – полукольца.

Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$ – произведение полуколец $\implies$ полукольцо.

Поймем, что m_0 – мера.

$A \times B = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \overset{?}{\implies} m_0(A \times B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_0(A_n \times B_n)$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

$\mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n \times B_n}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) \cdot \mathbb{1}_{B_n}(y)$

С другой стороны,

$\mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)$

$\int\limits_{X\times Y} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\,d\mu(x) = \mu A \cdot \mathbb{1}_B(y)$

$\int\limits_{X\times Y} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\,d\mu(x) = \int\limits_{X\times Y} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)\mathbb{1}_{B_n}(y)\,d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n \cdot \mathbb{1}_{B_n}(y)$

Проинтегрируем по ν.

$m_0(A \times B) = \mu A \nu B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n \nu B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_0(A_n \times B_n)$ □

***Определение* 3.15.**

Произведением σ-конечных мер μ и ν называется стандартное продолжение меры m_0, определенной ранее.

***Определение* 3.16** (обозначения)**.**

$\mu \times \nu$ – произведение мер.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – σ-алгебра, на которой оно задано.

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$.

Следствие.

1. Декартово произведение измеримых множеств – измеримо относительно $\mu \times \nu$.
2. Если $\nu e = 0$, то $\mu \times \nu(A \times e) = 0$

Доказательство.

1. Для множеств конечной меры декартово произведение лежит в полукольце. Если множество бесконечной меры, то оно есть счетное объединение множеств конечной меры.

   $A = \bigcup A_n \;\; B = \bigcup B_n \quad A_n \times B_n$ – измеримы

   $\implies A \times B = \bigcup A_n \times B_m$

2. Если $\mu A < +\infty$, то $\mu \times \nu(A \times e) = \mu A \nu e = 0$

   Если $\mu A = +\infty$, то $A = \bigcup A_n$, где $\mu A_n < +\infty$

   $A \times e = \bigcup A_n \times e$ и $\mu \times \nu(A_n \times e) = 0$

$\square$

09.11.2017

***Определение* 3.17.**

$C \subset X \times Y \quad C_x = \{y \in Y \;:\; (x, y) \in C\}$

$C^y = \{x \in X \;:\; (x, y) \in C\}$

Свойства.

1. $(\bigcup\limits_{\alpha \in I} C_\alpha)_x = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$
2. $(\bigcap\limits_{\alpha \in I} C_\alpha)_x = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$

***Определение* 3.18.**

$f \;:\; E \to \overline{\mathbb{R}}$ задана не на всем E.

f измерима “в широком смысле”, если

$\exists e \subset E \;:\; \mu e = 0$ и $f\Big|_{E \setminus e}$ – измеримая функция.

Теорема 3.24 (принцип Кавальери)**.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – измеримые пространства с σ-конечными полными мерами.

$m = \mu \times \nu \quad C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда

1. C_x – измеримы при почти всех $x \in X$
2. $\varphi(x) := \nu C_x$ – измерима в широком смысле.
3. $mC = \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_X \nu C_x \, d\mu(x)$

Доказательство.

$\mathcal{P}$ – полукольцо измеримых прямоугольников

Шаг 1. μ и ν – конечные меры, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ – борелевская оболочка $\mathcal{P}$.

$\mathcal{E}$ – система множеств из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, т.ч.

$E_x \in \mathcal{B}\ \ \forall x \in X$ и $x \mapsto \nu E_x$ измерима.

a) $\mathcal{E}$ – симметричная система.
$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x$

b) $E_1 \subset E_2 \subset ...\quad E_n \in \mathcal{E} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$

$(E_1)_x \subset (E_2)_x \subset ...\quad (E_n)_x \in \mathcal{B} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{B}$

$\nu(\bigcup (E_n)_x) = \lim\limits_{n \to \infty} \nu(E_n)_x$ предел измеримых функций – измеримая функция.

c) $E_1 \supset E_2 \supset ...\quad E_n \in \mathcal{E} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$

По пункту a) можем перейти к дополнениям.

d) $\mathcal{E}$ – монотонный класс.

e) $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$

f) $A, B \in \mathcal{E}\ \ A \cap B = \varnothing \implies A \sqcup B \in \mathcal{E}$
$(A \sqcup B)_x = A_x \sqcup B_x \in \mathcal{B}$
$\nu(A \sqcup B)_x = \nu(A_x \sqcup B_x) = \nu A_x + \nu B_x$
сумма измеримых функций – измеримая функция.

g) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E} \implies A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n \in \mathcal{E}$

h) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{P} \implies A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{E}$

Т.к. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ для некоторых $B_j \in \mathcal{P}$

i) $\mathcal{E}$ содержит алгебру, натянутую на $\mathcal{P}$
и $\mathcal{E}$ – монотонный класс.
Значит, $\mathcal{E}$ содержит σ-алгебру, натянутую на $\mathcal{P}$.
$\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{P})$

j) Проверили пункты 1 и 2 без почти везде и “в широком смысле” для $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$

Шаг 2. $\psi E := \int\limits_X \nu E_x \, d\mu(x) \quad E \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$

– интеграл от измеримой неотрицательной функции. Значит, это мера.

Если $E = A \times B$, то $\psi(A \times B) = \int\limits_X \nu(A \times B)_x \, d\mu(x) = \int\limits_X \mathbb{1}_A \cdot \nu B \, d\mu = \mu A \nu B$

На таких $E\quad \psi = m$. По единственности продолжения равенство есть и на всей борелевской оболочке.

Краткий итог: доказали теорему для конечной меры на борелевской оболочке. (причем для везде)

Шаг 3. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad mC = 0$

$\implies \exists \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $m\tilde{C} = 0$

Про $\tilde{C}$ мы доказали, что $0 = m\tilde{C} = \int\limits_X \nu \tilde{C}_x \, d\mu(x) \implies$

раз интеграл от неотрицательной функции $= 0$, то $\nu\tilde{C}_x$ почти везде ноль.

$\implies \nu C_x = 0$ почти везде, т.к. $C_x \subset \tilde{C}_x$

$\implies x \mapsto \nu C_x$ измерима в широком смысле и

$\int\limits_X \nu C_x \, d\mu(x) = 0 = mC$

Шаг 4. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e \quad \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \;\; me = 0$

$C_x = \tilde{C}_x \sqcup e_x$, где $\tilde{C}_x$ измерима при всех x, а e_x измеримо при почти всех x.

$\varphi(x) = \nu\tilde{C}x + \nu e_x$ – измерима в широком смысле.

$mC = m\tilde{C} = \int\limits_X \nu\tilde{C}_x \, d\mu(x) = \int\limits_X (\nu\tilde{C}_x + \nu e_x) \, d\mu(x) = \int\limits_X \nu C_x \, d\mu(x)$

Доказали теорему для произвольного множества, но для конечной меры.

Шаг 5. μ и ν – произвольные σ-конечные меры.

$X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n \quad \mu X_n < +\infty$

$Y = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n \quad \nu Y_n < +\infty$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad C = \bigsqcup\limits_{k=1,n=1}^{\infty} C \cap (X_n \times Y_k)$

На $X_n \times Y_k$ меры μ и ν конечны.

$(C \cap (X_n \times Y_k))_x$ измерима при почти всех x.

$x \mapsto \nu(C \cap (X_n \times Y_k))_x$ – измерима $\implies x \to \nu C_x = \sum\limits_k \nu(C \cap (X_n \times Y_k))_x$ – измеримы

$m(C \cap (X_n \times Y_k)) = \int\limits_{X_n} \nu(C \cap (X_n \times Y_k))_x \, d\mu = \int\limits_{X_n} \nu(C_x \cap Y_k) \, d\mu$

И осталось сложить крайние вещи последнего равенства.

$\square$

Замечание.

1. Аналогично C^y – измерим при почти всех $y \in Y$

   $x \mapsto \mu C^y$ измерима в широком смысле.

   $mC = \int\limits_Y \mu C^y \, d\nu(y)$

2. В доказательстве теоремы не использовали полноту μ. Но использовали полноту ν. Если хочется замечание 1, то придется пользоваться полнотой μ.

***Определение* 3.19.**

$\mathcal{P}_1(C) = \{x \in X \;\;:\;\; C_x \neq \varnothing\}$

$\mathcal{P}_2(C) = \{y \in Y \;\;:\;\; C^y \neq \varnothing\}$

– проекции.

Если $\mathcal{P}_1$ измеримо, то можем интегрироваться по этому множеству, т.е. $mC = \int\limits_{\mathcal{P}_1(C)} \nu C_x \, d\mu(x)$

Если $\mathcal{P}_2$ измеримо, то можем интегрироваться по этому множеству, т.е. $mC = \int\limits_{\mathcal{P}_2(C)} \mu C^y \, d\nu(y)$

Замечание.

Измеримость C не влечет измеримость проекций.

$X = Y = \mathbb{R}$

Пусть A не измеримое множество на прямой.

$C = A \times 0$ – на плоскости измеримо и имеет меру 0.

Но проекция $\mathcal{P}_1(C) = A$ неизмеримое множество.

Замечание.

$\tilde{P}_1(C) = \{x \in X \ : \ \nu C_x > 0\}$ – измеримо.

$mC = \int\limits_{\tilde{\mathcal{P}}_1(C)} \nu C_x \, d\mu(x)$

***Определение* 3.20.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой.

$f \ : \ X \to \overline{\mathbb{R}} \ \ f \geqslant 0 \quad m = \mu \times \lambda_1$

Подграфик функции f над множеством E.

$\mathcal{P}_f(E) = \{(x, y) \ : \ x \in E, \ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$

График функции f над множеством E.

$\Gamma_f(E) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in E, \text{ т.ч. } f(x) \neq \pm\infty\}$

Лемма.

Если f измерима в широком смысле, то $m(\Gamma_f(E)) = 0$

Доказательство.

Можно считать, что $\mu E < +\infty$, т.к. мера μ σ-конечная.

$\varepsilon > 0$

$e_k := \{x \in E \ : \ k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}$ – дизъюнктные.

$\bigsqcup\limits_{x \in \mathbb{Z}} e_k = E \setminus (E\{f = \pm\infty\} \sqcup (\text{ множество, где функция не определена}))$

$\Gamma_f(E) \subset \bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$

$m(\bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} m(e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} me_k \cdot \varepsilon \leqslant \mu E \cdot \varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. □

Лемма.

f – неотрицательна и измерима в широком смысле $\implies \mathcal{P}_f(E)$ – измерима.

Доказательство.

Если f – простая $= \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} a_k$

$\mathcal{P}_f(E) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \times [0, a_k]$ – измеримое множество.

Если f – измеримая, то $\exists \varphi_n$ – простые, $\varphi_n \nearrow f$

$\varphi_n \leqslant f \quad \mathcal{P}_{\varphi_n}(E) \subset \mathcal{P}_f(E)$

$\mathcal{P}_f(E) \setminus \Gamma_f(E) \subset \bigcup \mathcal{P}_{\varphi_n}(E) \subset \mathcal{P}_f(E)$

Правая штука от средней отличается на кусок графика, т.е. на множество меры 0. $\square$

16.11.2017

Теорема 3.25 (о мере подграфика)**.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой.

$f \ : \ X \to \overline{\mathbb{R}}, \ \ f \geqslant 0$

$m = \mu \times \lambda_1$. Тогда

f – измерима в широком смысле $\iff$ $\mathcal{P}_f$ измерим относительно m.

И если это так, что

$m\mathcal{P}_f = \int\limits_X f \, d\mu$

Доказательство.

"$\implies$" – лемма

"$\impliedby$"

$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, f(x)] & \text{если } f(x) \neq +\infty \\ [0, +\infty) & \text{если } f(x) = +\infty \end{cases}$

$\lambda_1(\mathcal{P}_f)_x = f(x)$

Получили, что f измерима в широком смысле (принцип Кавальери)

$m\mathcal{P}_f = \int\limits_X \lambda_1(\mathcal{P}_f)_x \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu$ $\square$

Теорема 3.26 (Тонелли)**.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$m = \mu \times \nu$ и $f \geqslant 0$ измерима относительно m. $f \ \ : \ \ X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – измерима относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$
2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \, d\nu$ – измерима в широком смысле.
3. $\int\limits_{X \times Y} f \, dm = \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_X (\int\limits_Y f(x, y) \, d\nu(y)) \, d\mu(x)$

Доказательство.

Шаг 1. $f = \mathbb{1}_C$

$f_x(y) = \mathbb{1}_{C_x}$

$\int\limits_Y f_x \, d\nu = \int\limits_Y \mathbb{1}_{C_x} \, d\nu = \nu C_x$

По принципу Кавельери C_x измерима при почти всех x.

$\varphi(x) = \nu C_x$ – измерима в широком смысле.

$\int\limits_{X \times Y} f \, dm = mC = \int\limits_X \nu C_x \, d\mu = \int\limits_X (\int\limits_Y f(x, y) \, d\nu) \, d\mu$

Получили, что если функция характеристическая, то по принципу Кавельери все ок.

Шаг 2. Если f – простая. Просто по линейности.

Шаг 3. Если $f \geqslant 0$ измерима относительно m.

Тогда возьмем f_n – простые, $f_n \leqslant f_{n+1}$ и $f_n \underset{\text{поточечно}}{\to} f$

$(f_n)_x(y)$ – измерима при почти всех x.

$\varphi_n(x) := \int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu$ – измерима в широком смысле.

$\int\limits_{X\times Y} f_n \, dm = \int\limits_X \varphi_n \, d\mu$

$(f_n)_x \to f_x \implies f_x$ – измерима.

$(f_n)_x$ – монотонно возрастают и неотрицательны.

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu = \int\limits_Y f_x \, d\nu =: \varphi(x)$

$\implies \varphi(x)$ измерима в широком смысле.

$(f_n)_x \leqslant (f_{n+1})_x \implies \varphi_n(x) = \int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu \leqslant \int\limits_Y (f_{n+1})_x \, d\nu = \varphi_{n+1}(x)$

$\varphi_n \geqslant 0$, монотонно возрастают и $\varphi_n \to \varphi$

$\int\limits_X \varphi_n \, d\mu = \int\limits_{X\times Y} f_n \, dm$

$\int\limits_X \varphi \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} f_n \, dm = \int\limits_{X\times Y} f \, dm$

□

Теорема 3.27 (Фубини)**.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$m = \mu \times \nu$ и $f \;:\; X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема

Тогда

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – суммируема при почти всех $x \in X$
2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \, d\nu$ – суммируема в широком смысле.
3. $\int\limits_{X\times Y} f \, dm = \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_X (\int\limits_Y f(x, y) \, d\nu(y)) \, d\mu(x)$

Доказательство.

$f = f_+ - f_-, \;\; f_+$ и $f_- \geqslant 0$

Применим теорему Тонелли для f_+ и f_-.

$\int\limits_{X\times Y} f_\pm \, dm = \int\limits_X (\int\limits_Y f_\pm(x, y) \, d\nu(y)) \, d\mu(x)$

Оба $\int$ конечны. Поэтому можем вычесть и получить равенство для f.

Суммируемость $\varphi(x) \;:\; \varphi_\pm(x) = \int\limits_Y (f_\pm)_x \, d\nu$

$+\infty > \int\limits_{X\times Y} f_\pm \, dm = \int\limits_X \varphi_\pm \, d\mu \implies \varphi_+$ и φ_- суммируемы.

$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \, d\nu = \int\limits_Y (f_+)_x \, d\nu - \int\limits_Y (f_-)_x \, d\nu = \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$

– суммируема как разность суммируемых.

Покажем суммируемость $f_x(y)$ при почти всех x.

$\int\limits_Y (f_\pm)_x\,d\nu = \varphi_\pm(x)$ – суммируемы $\implies$ почти везде конечны.

$\implies$ при почти всех x $\int\limits_Y (f_\pm)_x\,d\nu$ конечны $\implies \int\limits_Y ((f_+)_x + (f_-)_x)\,d\nu$ – конечно при почти всех x.

$\implies f_x$ суммируема при почти всех x. □

Следствие.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$f \;:\; X \to \overline{\mathbb{R}},\;\; g \;:\; Y \to \overline{\mathbb{R}}$ – суммируемы.

И $h(x,y) := f(x) \cdot g(y) \quad m = \mu \times \nu$

Тогда h суммируема относительно m и

$$\int\limits_{X\times Y} h\,dm = \int\limits_X f\,d\mu \cdot \int\limits_Y g\,d\nu$$

Доказательство.

$|\,h(x,y)\,| = |\,f(x)\,| \cdot |\,g(y)\,|$

Тогда по теореме Тонелли

$$\int\limits_{X\times Y} |\,h(x,y)\,|\;dm = \int\limits_X (\int\limits_Y |\,f(x)\,| \cdot |\,g(y)\,|\;d\nu(y))\,d\mu(x) = \int\limits_X |\,f(x)\,| \cdot (\int\limits_Y |\,g(y)\,|\;d\nu(y))\,d\mu(x) =$$
$$= \int\limits_Y |\,g(y)\,|\;d\nu(y) \cdot \int\limits_X |\,f(x)\,|\;d\mu(x)$$

Т.к. f и g суммируемы, то оба полученных интеграла конечны и h суммируема. А раз так, то можем сделать ровно то же, но без модулей.

$\implies$ по теореме Фубини $\int\limits_{X\times Y} h(x,y)\,dm = \int\limits_X (\int\limits_Y f(x) \cdot g(y)\,d\nu(y))\,d\mu(x) = \ldots$ □

Замечание.

1. По теореме Фубини, если $f(x,y)$ – суммируема относительно $\mu \times \nu$, то

   $\int\limits_X (\int\limits_Y f(x,y)\,d\nu(y))\,d\mu(x) = \int\limits_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int\limits_Y (\int\limits_X f(x,y)\,d\mu(x))\,d\nu(y)$

   Можно ли заменить суммируемость f конечностью левого и(или) правого интеграла?

   или конечностью $\int\limits_X \left|\int\limits_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right|\,d\mu(x)$ и аналогично...

   Ответ на все – нельзя. Этих условий не хватает даже для того, чтобы левый интеграл оказался равен правому.

   Мораль – без суммируемости все плохо.

Пример.

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad g(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

   Все будем считать на $[-1,1]^2$

   Функции f и g не суммируемы на $[-1,1]^2$.

   Повторные интегралы от g равны 0.

   Повторные интегралы от f противоположны по знаку.

   $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} 0\,dy$ (т.к. внутренняя функция нечетная)

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\,2xy\,|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 4\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 4\int\limits_{0}^{1}-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}dy =$$
$$= 4\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{1+y^2}\right)dy = 4(\ln y - \tfrac{1}{2}\ln(1+y^2))\Big|_{0}^{1} = +\infty$$

Теорема 3.28.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой.

$f \ : \ X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда

$$\int\limits_X |\,f\,|\,d\mu = \int\limits_0^{+\infty}\mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}\,d\lambda_1(t)$$

Замечание.

Интеграл, который написан справа – Римановский.

$\mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}$ – монотонно убывает. А значит, у нее не более, чем счетное число точек разрыва.

Для интегрируемости по Риману этого хватает.

Доказательство.

$m = \mu \times \lambda_1$

$$\int\limits_X |\,f\,|\,d\mu = m\mathcal{P}_{|\,f\,|} = \int\limits_{X\times[0,+\infty)}\mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|\,f\,|}}\,dm \underset{\text{по т. Тонелли}}{=} \int\limits_{[0,+\infty)}\Big(\int\limits_X \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|\,f\,|}}(x,t)\,d\mu(x)\Big)\,d\lambda_1(t) =$$

Заметим, что $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|\,f\,|}} = 1$, если $|\,f(x)\,| \geqslant t$

$$= \int\limits_{[0,+\infty)}\mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}\,d\lambda_1(t)$$ □

Следствие.

1. В условии теоремы

$$\int\limits_X |\,f\,|^p\,d\mu = p\int\limits_0^{+\infty}t^{p-1}\mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}\,d\lambda_1(t)$$

Доказательство.

$$\int\limits_x |\,f\,|^p\,d\mu = \int\limits_0^{\infty}\mu X\{|\,f\,|^p \geqslant t\}\,d\lambda_1(t) = \int\limits_0^{+\infty}\mu X\{|\,f\,| \geqslant t^{\frac{1}{p}}\}\,dt \underset{\substack{\text{замена}\\\text{переменной}}}{=} \int\limits_0^{+\infty}\mu X\{|\,f\,| \geqslant s\}\,d(s^p) =$$
$$= \int\limits_0^{\infty}ps^{p-1}\mu X\{|\,f\,| \geqslant s\}\,ds$$ □

2. Как в теореме, так и в следствии 1 можно написать $\mu X\{|\,f\,| > t\}$ вместо $\mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}$

Доказательство.

$F(t) := \mu X\{|\,f\,| \geqslant t\}$ – монотонная функция.

$$X\{|\,f\,| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}X\{|\,f\,| \geqslant t + \tfrac{1}{n}\}$$

$\implies \mu X\{|\,f\,| > t\} = \lim\limits_{n\to\infty}\mu X\{|\,f\,| \geqslant t + \frac{1}{n}\} = \lim\limits_{n\to\infty}F(t+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{s\to t+}F(s) = F(t)$ при почти всех t. □

22.11.2017

3.7. §7. Замена переменной в кратном интеграле

***Определение* 3.21.**

$f \ : \ X \to Y$ – липшицева с константной M, если $\forall x, y \in X \quad \rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant M\rho_X(x, y)$

***Определение* 3.22.**

$f \ : \ X \to Y$ – локально липшицева, если $\forall x \in X \ \ \exists$ такая окрестность $U \ni x$, т.ч. $f\Big|_U$ – липшицева.

Теорема 3.29.

$f \ : \ \Omega \to Y \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ локально липшицева, $K \subset \Omega$ – выпуклый компакт, то f липшицева на K.

Доказательство.

$\forall x \in K \ \ \exists U_x \ni x$ – окрестность точки x такая, что $f\Big|_{U_x}$ липшицева с константой M_x.

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} U_x$ – открытое покрытие K.

Выберем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_{x_j}$

$M := \max\limits_{j=1 \ldots n} M_{x_j}$. Тогда f липшицева с константой M.

Выберем прямую, соединяющую x и y. Заметим, что она посещает какие-то множества U_{x_j} по одному разу.

Тогда

$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \sum \rho(f(x_i), f(x_{i+1})) \leqslant \sum M\rho(x_i, x_{i+1}) = M\rho(x, y)$

(Последнее равенство – т.к. взяли отрезок, а сумма звеньев отрезка – сам отрезок) □

Теорема 3.30.

$f \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема.

Ω – открытое.

Тогда f – локально липшицева.

Доказательство.

Возьмем точку $x \in \Omega$ и $B_r(x) \subset \overline{B}_r(x) \subset \Omega$

$\operatorname{grad} f \quad : \quad \Omega \to \mathbb{R}^n$

$\|\operatorname{grad} f\| \quad : \quad \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

Существует M, т.ч. $\|\operatorname{grad} f(t)\| \leqslant M \quad \forall t \in \overline{B}_r(x)$

$\implies$ оп теореме Лагранжа $|\, f(u) - f(v)\,| \leqslant \|u - v\| \cdot M$ □

Теорема 3.31.

$\Phi \quad : \quad \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ – локально липшицева.

Тогда если A измеримо по Лебегу, то $\Phi(A)$ измеримо по Лебегу. И если $\lambda_n A = 0$, то $\lambda_n \Phi(A) = 0$

Доказательство.

Достаточно доказать все на ячейках.

$\Omega = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \quad P_n \subset \operatorname{Cl} P_n \subset \Omega$ – ячейки.

Достаточно доказать для $A \subset P_n \subset \operatorname{Cl} P_n$

Но на $\operatorname{Cl} P_n$ Φ – липшицева с константой M.

$\lambda_n A = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ покрытие A кубическими ячейками,

$A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k \implies \Phi(A) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(Q_k)$

$\sum \lambda Q_k < \varepsilon$

$\operatorname{diam} \Phi(Q_k) \leqslant M \operatorname{diam} Q_k = M\sqrt{n} \cdot$ сторона Q_k

$\Phi(Q_k) \subset$ кубик со стороной $2M\sqrt{n} \cdot$ сторона Q_k

$\lambda_n \Phi(Q_k) \leqslant (2M\sqrt{n})^n \lambda_n Q_k$

$\lambda_n \Phi(A) \leqslant \sum \lambda_n \Phi(Q_k) \leqslant (2M\sqrt{n})^n \sum \lambda_n Q_k < \varepsilon (2M\sqrt{n})^n = \varepsilon \cdot \mathrm{const}$, устремляем $\varepsilon \to 0$.

Пусть A – произвольное. Можно считать, что $A \subset P_n \subset \operatorname{Cl} P_n \subset \Omega$

$A = e \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где $\lambda e = 0$ и K_n – компакт.

$\Phi(A) = \Phi(e) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n)$, $\Phi(e)$ измеримо, т.к. множество меры 0.

$\Phi(K_n)$ – непрерывный образ компакта, значит компакт, значит измеримо. □

***Определение* 3.23.**

$\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм, если

Φ – биекция, Φ непрерывно дифференцируема и Φ^{-1} непрерывно дифференцируема.

Теорема 3.32 (замена переменной в кратном $\int$)**.**

$\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм.

$f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ – измеримая, $A \subset \Omega$ – измеримо.

$f \geqslant 0$

Тогда $\int\limits_{\Phi(A)} f \, d\lambda_n = \int\limits_{A} f \circ \Phi \cdot |\, J_\Phi \,| \, d\lambda_n$

J_Φ – якобиан – определитель матрицы Якоби.

$$J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Для суммируемых f формула так же справедлива.

Замечание Частные случаи.

1. Φ – сдвиг, тогда матрица Якоби – единичная, $J_\Phi = 1$

   $\int\limits_{A+a} f \, d\lambda_n = \int\limits_{A} f(x+a) \, d\lambda_n(x)$

2. Φ – умножение на константу, тогда матрица Якоби – на диагонали c, $J_\Phi = c^n$

   $\int\limits_{cA} f \, d\lambda_n = c^n \int\limits_{A} f(cx) \, d\lambda_n(x)$

3. Φ – линейное отображение с матрицей T. $J_\Phi = \det T$

   $\int\limits_{T(A)} f \, d\lambda_n = |\det(T)| \int\limits_{A} f(Tx) \, d\lambda_n(x)$

Лемма.

$\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$

$0 < m < n$

$a \in \Omega$. Тогда существует $U_a \ni a$ – окрестность точки a, т.ч.

$\Phi\Big|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2$

Φ_1 оставляет на месте m координат, Φ_2 оставляет на месте $n - m$ координат.

$\Phi_2 \ : \ U_a \to \Phi_2(U_a)$

$\Phi_1 \ : \ \Phi_2(U_a) \to \tilde{\Omega}$

Доказательство.

$x \in \mathbb{R}^m \ \ y \in \mathbb{R}^{n-m}$

$\Phi(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$, где $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^m \ \ \psi(x, y) \in \mathbb{R}^{n-m}$

$\Phi_1(u, v) = (u, f(u, v)) \ \ \Phi_2(u, v) = (g(u, v), v)$

$\Phi_1 \circ \Phi_2(x, y) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$

Но знаем, что $\Phi_1 \circ \Phi_2(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$, но тогда $g(x, y) := \varphi(x, y)$ и Φ_2 определено однозначно.

$f(g(x, y), y) = \psi(x, y) \implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$

Осталось понять, что Φ_2 локально обратимо. Покажем, что она удовлетворяет теореме об обратной функции.

$\det \Phi_2' = \det \begin{pmatrix} g_x' & g_y' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det g_x' = \det \varphi_x'$ – минор $m \times m$ для матрицы Φ'.

Но $\det \Phi' \neq 0 \implies$ есть ненулевой минор. □

План доказательства теоремы.

1. Можно ограничиться случаем, когда Ω – открытый параллелепипед. (Пояснение – аддитивность интеграла)

2. Пусть Φ – фиксировано, тогда достаточно проверить для $f = \mathbb{1}_{\Phi(A)}$.

   Пояснение.

   Если проверим для характеристических, то оно верно по линейности для простых.

   А для измеримых $f_n \nearrow f \quad f_n$ – простые, $f_n \circ \Phi \,|\, J_\Phi \,| \geqslant 0$ – простые и $f_n \circ \Phi \,|\, J_\Phi \,| \nearrow f \circ \Phi \,|\, J_\Phi \,| \implies$ по теореме Беппо Леви доказываемая теорема верна для $f \geqslant 0$

3. $\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\, J_\Phi \,| \, d\lambda_n$ – подставили характеристическую функцию.

   Поймем, что из таких равенство для Φ и Ψ следует равенство для $\Phi \circ \Psi$.

4. $n = 1$

5. Индукция с помощью леммы.

□

23.11.2017

Доказательство.

3. Если формула верна для Φ и для Ψ, то она верна и для $\Phi \circ \Psi$

   $\Omega \xrightarrow{\Psi} \tilde{\Omega} \xrightarrow{\Phi} \tilde{\tilde{\Omega}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

   Напишем формулу для Φ:

   $\int\limits_{\Phi(\Psi(A))} f\, d\lambda_n = \int\limits_{\Psi(A)} f \circ \Phi \,|\, J_\Phi \,|\, d\lambda_n = \int\limits_A g \circ \Psi \,|\, J_\Psi \,|\, d\lambda_n$

   $g(y) = f(\Phi(y)) \,|\, J_\Phi(y) \,|$

   $g(\Psi(x)) \,|\, J_\Psi(x) \,| = f(\Phi(\Psi(x))) \,|\, J_\Phi(\Psi(x)) \,|\,|\, J_\Psi(x) \,| = f(\Phi(\Psi(x))) \,|\, \det(\Phi'(\Psi(x))\Psi'(x)) \,| =$
   $= f(\Phi(\Psi(x))) \,|\, J_{\Phi\circ\Psi}(x) \,|$

4. $n = 1$.

   $\int\limits_{\Phi(A)} f\, d\lambda_1 = \int\limits_A f \circ \Phi \cdot |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_1 \quad f \geqslant 0$

   Знаем, что достаточно показать на характеристических функциях.

   Для $f = \mathbb{1}_{\Phi(A)} \quad \lambda_1(\Phi(A)) = \int\limits_A |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_1$

   Заведем на $\mathbb{R}$ меру $\nu(A) := \int\limits_A |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_1$

   Надо доказать, что $\nu A = \lambda_1(\Phi(A))$.

   Достаточно доказать совпадение на ячейках.

   $\int\limits_{[a,b)} |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_1 = \lambda_1(\Phi([a,b)))$ – хотим доказать.

   Заметим, что на одномерном случае, Φ – монотонная дифференцируемая функция (пусть для определенности возрастает), а $J_\Phi = \Phi'$

   $\int\limits_{[a,b)} \Phi'\, d\lambda_1 = \int\limits_a^b \Phi'(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \lambda_1([\Phi(a), \Phi(b))) = \lambda_1(\Phi([a,b)))$

5. Индукция от размерностей $< n$ к размерности n.

   $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ Φ_1 и Φ_2 оставляют на месте хотя бы одну координату.

   По пункту 3, достаточно показать для Φ_1 и Φ_2, т.е. достаточно проверить для Φ, оставляющего на месте хотя бы одну координату.

   Пусть эта координата – последняя.

   $x = (y, t) \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad t \in \mathbb{R}$

   $\Phi(y, t) = (\varphi(y, t), t) \quad \varphi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$

   $\Phi' = \begin{pmatrix} & & \varphi'_y & & \varphi'_t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $J_\Phi = J_{\varphi(\cdot,t)}$

   Достаточно проверить, что $\lambda_n \Phi(A) = \int\limits_A |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_n$

   $\lambda_n \Phi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\Phi(A)_t)\, d\lambda_1(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A_t, t))\, d\lambda_1(t) =$

   $\Phi(A)_t = \varphi(A_t, t)$

   $= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{A_t} |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_{n-1}\, d\lambda_1(t) \overset{\text{по т. Тонелли}}{=} \int\limits_A |\, J_\Phi \,|\, d\lambda_n$

□

Пример.

$\mathbb{R}^2$, полярная замена переменной.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$r > 0 \;\; \varphi \in (0, 2\pi)$

Заметим, что при такой замене теряется луч $(0,0) \to (r,0)$. (Ну и ладно)

$\begin{pmatrix} (r\cos\varphi)'_r & (r\sin\varphi)'_r \\ (r\cos\varphi)'_\varphi & (r\sin\varphi)'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\cos\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$J = \det(...) = r$

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int\limits_{[0,+\infty)} \int\limits_{[0,2\pi]} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\, dr$

Подставим $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int\limits_{[0,+\infty)} \int\limits_{[0,2\pi]} re^{-r^2}\, d\varphi\, dr = 2\pi \int\limits_{[0,+\infty)}^{\infty} re^{-r^2}\, dr = \pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = -\pi e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = \pi$

С другой стороны.

$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx)^2$

Получили вывод, что

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

4. 11. Интегралы, зависящие от параметра

4.1. §1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой.

(T, ρ) – метрическое пространство.

$\forall t \in T$ есть множество $E_t \in \mathcal{A}$

$F(t) = \int\limits_{E_t} f(x,t)\, d\mu(x)$

Хотим узнать, что получится. Например, если функция была непрерывна, то останется ли непрерывной? И т.д.

***Определение* 4.1.**

$f \ : \ X \times T \to \mathbb{R} \quad t_0$ – предельная точка T.

$f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f(x,t_0)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in T \ \ \rho(t,t_0) < \delta \ \ \forall x \in X \ \ |\, f(x,t) - f(x,t_0)\,| < \varepsilon$

Замечание.

$f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f(x,t_0) \iff \sup\limits_{x \in X} |\, f(x,t) - f(x,t_0)\,| \underset{t \to t_0}{\to} 0$

Теорема 4.1.

$X \times T$ – компакт, $f \in C(X \times T)$

t_0 – предельная точка T. Тогда

$f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f(x,t_0)$

Доказательство.

Функция непрерывна на компакте, значит она равномерно непрерывна по теореме Кантора.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующий ему δ из равномерной непрерывности.

(Метрика в $X \times T$ – берем расстояние по X, по T, корень из суммы квадратов)

$\forall (x,t)$ и (y,s) таких, что $\rho((x,t),(y,s)) < \delta \implies |\, f(x,t) - f(y,s)\,| < \varepsilon$

$\delta > \rho((x,t),(y,s)) = \sqrt{\rho(x,y)^2 + \rho(s,t)^2} \geqslant \rho(s,t)$

Подставим $y = x$ и $s = t_0$.

$\rho((x,t),(x,t_0)) = \rho(t,t_0)$, если $\rho(t,t_0) < \delta$, то $|\, f(x,t) - f(x,t_0)\,| < \varepsilon$

$\square$

Теорема 4.2.

$X \times T$ – компакт, $f \in C(X \times T)$

μ – конечная мера на X. Тогда

$F(t) = \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$ непрерывна по t.

Доказательство.

Проверим непрерывность в точке t_0.

$$| F(t) - F(t_0) | = \left| \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x) - \int\limits_X f(x,t_0)\, d\mu(x) \right| = \left| \int\limits_X (f(x,t) - f(x,t_0))\, d\mu(x) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X | f(x,t) - f(x,t_0) |\, d\mu(x) \leqslant \int\limits_X \sup_{x\in X} | f(x,t) - f(x,t_0) |\, d\mu(x) = \mu X \cdot \sup_{x\in X} | f(x,t) - f(x,t_0) | \to 0$$
при $t \to t_0$

$\square$

Замечание.

Факт. Декартово произведение компактов – компакт.

Упражнение. Доказать.

Следствие.

X – компакт, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. $\mu X < +\infty$

$f \in C(X \times \Omega)$. Тогда $F(t) = \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$ – непрерывно на Ω

Доказательство.

Проверим непрерывность F в точке t_0.

Возьмем $\overline{B}_r(t_0) \subset \Omega$ – компакт

Тогда $X \times \overline{B}_r(t_0)$ – компакт.

На таком произведении можем воспользоваться теоремой.

$\implies$ F – непрерывна на внутренности этого шарика, т.е. на $B_r(t_0)$, в частности в точке t_0.

$\square$

Теорема 4.3.

X – компакт. $\mu X < +\infty$

$f'_t, f \in C(X \times [c,d])$. Тогда $F(t) = \int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x)$

дифференцируема на $[c,d]$ и $F'(t) = \int\limits_X f'(x,t)\, d\mu(x)$

Доказательство.

$\Delta := \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - \int\limits_X f'_t(x,t)\, d\mu(x) \underset{t\to t_0}{\overset{?}{\to}} 0$

$\Delta := \frac{\int\limits_X f(x,t)\, d\mu(x) - \int\limits_X f(x,t_0)\, d\mu(x)}{t-t_0} - \int\limits_X f'_t(x,t)\, d\mu(x) = \int\limits_X \left(\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} - f'_t(x,t)\right) d\mu(x)$

$| \Delta | \leqslant \int\limits_X \left| \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} - f'_t(x,t) \right| d\mu(x) =$

$\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} = f'_t(x, t_0 + \Theta_{x,t}(t-t_0))$

$= \int\limits_X | f'_t(x, t_0 + \Theta_{x,t}(t-t_0)) - f'_t(x,t_0) |\, d\mu(x)$

$t_0 + \Theta_{x,t}(t-t_0)$, знаем, что $\Theta_{x,t} \in (0,1)$

$\implies t_0 + \Theta_{x,t}(t-t_0) \to t_0$

$\sup\limits_{x\in X} | f'_t(x,s) - f'_t(x,t_0) | \underset{s\to t_0}{\to} 0$

т.к. $f'_t(x,s) \underset{s\to t_0}{\rightrightarrows} f'_t(x,t_0)$

Получили, что $\int\limits_X | f'_t(x, t_0 + \Theta_{x,t}(t-t_0)) - f'_t(x,t_0) |\, d\mu(x) \to 0$, а значит формулу доказали. $\square$

30.11.2017

Теорема 4.4 (Формула Лейбница)**.**

$f \in C([a,b] \times [c,d])$

$f = f(x,t)$

$f'(t) \in C([a,b] \times [c,d])$

$\varphi, \psi \;:\; [c,d] \to [a,b]$ – непрерывно дифференцируемы.

$F(t) := \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,dx$

Тогда $F(t) \in C^1[c,d]$ и

$F'(t) = f(\psi(t),t)\psi'(t) - f(\varphi(t),t)\varphi'(t) + \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x,t)\,dx$

Доказательство.

$\Phi \;:\; [c,d] \times [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Phi(t,\alpha,\beta) := \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dx$

Поймем, что Φ дифференцируема.

$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ – непрерывна

$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(t,\alpha,\beta) = f(\beta,t)$ – непрерывна

$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(t,\alpha,\beta) = -f(\alpha,t)$ – непрерывна

$F(t) = \Phi(t,\varphi(t),\psi(t))$ – композиция дифференцируемых функций, а значит дифференцируема.

$F'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,\varphi(t),\psi(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(t,\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(t,\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$ – а дальше подставляем и получаем нужное. $\square$

4.2. §2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

$F(t) := \int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx \quad t \in T$

Нужно чтобы $\forall t \in T$ интеграл сходился.

***Определение* 4.2.**

$\int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на множестве T, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B \;\; \forall b > B \;\; \forall t \in T \quad \left| \int\limits_{b}^{\infty} f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$$

Замечание.

$F_b(t) := \int\limits_{a}^{b} f(x,t)\,dx$

Равномерная сходимость $\int \iff F_b \underset{b \to +\infty}{\rightrightarrows}$ на множестве T.

$\int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dt = F(t) - F_b(t)$

Пример.
$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$

1. $t \geqslant t_0 > 0$

   $\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx}\,dx = -\frac{e^{-tx}}{t}\Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-tb}}{t} \leqslant \frac{e^{-t_0 b}}{t_0} \to 0$

   Т.е. $< \varepsilon$ при достаточно больших b.

   Значит, проверили в этом случае равномерную сходимость.

2. $t > 0$

   $\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{e^{-tb}}{t} \overset{?}{<} \varepsilon$

   Если взять $t = \frac{1}{b}$, то получим, что $\frac{e^{-1}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{e}$ – слишком большое число, меньше ε не сделаешь.

   Получили, что нет равномерной сходимости.

Теорема 4.5 (Критерий Коши)**.**
$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на множестве $T \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B \;\; \forall b, c > B \;\; \forall t \in T \quad \left| \int\limits_b^c f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$

Доказательство.
"$\implies$"

Возьмем $\varepsilon > 0$. Для него выполняется, что

$\exists B \;\; \forall b > B \;\; \forall t \in T \quad \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$

И для этого же $B \;\; \forall c > B \;\; \forall t \in T \quad \left| \int\limits_c^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$

$\left| \int\limits_b^c f(x,t)\,dx \right| = \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx - \int\limits_c^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| < 2\varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

У нас есть условие критерия Коши для сходимости $\int$ при каждом конкретном t.

$\implies \forall t \in T \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ – сходится

Возьмем неравенство из Критерий Коши и $c \to +\infty$

$\varepsilon > \left| \int\limits_b^c f(x,t)\,dx \right| \underset{c\to+\infty}{\to} \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| \implies \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| \leqslant \varepsilon$ □

Следствие.
$f \;:\; [a,+\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится при $t \in (c,d)$ и расходится в одном из концов (при $t = c$ или при $t = d$).

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится неравномерно на (c,d)

Доказательство.

От противного. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится на (c,d). Докажем, что он сходится и при $t = c$.

Пишем критерий Коши для равномерной сходимости.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B\ \ \forall u, v > B \quad \left| \int\limits_u^v f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$

Внутренняя штука непрерывна на $[u,v] \times [c,d] \implies$ результат интеграла непрерывен по t.

Тогда при $t \to c \quad \left| \int\limits_u^v f(x,t)\,dx \right| \to \left| \int\limits_u^v f(x,c)\,dx \right|$

$\implies \left| \int\limits_u^v f(x,c)\,dx \right| \leqslant \varepsilon$ – критерий Коши для сходимости в $t = c$. □

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$ – нет равномерной сходимости при $t > 0$.

Т.к. если бы была, то была бы равномерная сходимость и на $(0,1)$.

Но при $t = 0$ интеграл расходится. Значит, на $(0,1)$ нет равномерной сходимости.

Теорема 4.6 (Признак Вейерштрасса)**.**

$f, g \ : \ [a,+\infty) \times T \to \mathbb{R}$

$|\, f(x,t)\,| \leqslant g(x,t)\ \ \forall x \in [a,+\infty)$ и $\forall t \in T$

Тогда, если $\int\limits_a^{+\infty} g(x,t)\,dx$ сходится равномерно по $t \in T$,

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ сходится равномерно по $t \in T$.

Доказательство.

Пишем критерий Коши для g:

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B\ \ \forall b, c > B \quad \int\limits_b^c g(x,t)\,dx < \varepsilon$

Заметим, что $\int\limits_b^c g(x,t)\,dx \geqslant \int\limits_b^c |\, f(x,t)\,|\ dx \geqslant \left| \int\limits_b^c f(x,t)\,dx \right|$

$\implies$ получили критерий Коши для f. □

Следствие.

$f \ : \ [a,+\infty) \times T \to \mathbb{R} \quad g \ : \ [a,+\infty) \to \mathbb{R}$

$|\, f(x,t)\,| \leqslant g(x)\ \ \forall x \in [a,+\infty)$ и $\forall t \in T$

Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится при $t \in T$.

Доказательство.

g не зависит от $t \implies$ сходимость = равномерная сходимость. □

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1}\,dx$ равномерно сходится при $t \in \mathbb{R}$.

$\left|\frac{\cos(xt)}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1} =: g(x)$

Теорема 4.7 (Признак Дирихле)**.**

$f, g\ :\ [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции.

Если

1. $\left|\int\limits_a^b f(x,t)\,dx\right| \leqslant M \quad \forall b > a\ \ \forall t \in T$
2. $g(x,t)$ монотонно по x при любом фиксированном t.
3. $g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ равномерно по $t \in T$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dx$ равномерно сходится.

Доказательство.

Будем доказывать только для непрерывно дифференцируемых функций. Для общего случая неприятно.

$F(u,t) := \int\limits_a^u f(x,t)\,dx$ – по пункту 1 ограниченная функция.

$\int\limits_a^c f(x,t)g(x,t)\,dx = F(x,t)g(x,t)\Big|_{x=a}^{x=c} - \int\limits_a^c F(x,t)g'_x(x,t)\,dx$

Подстановка в первом слагаемом при $x = a$ дает 0.

$|\,F(c,t)g(c,t)\,| \leqslant M\,|\,g(c,t)\,| \underset{c\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ равномерно по $t \in T$.

$\int\limits_a^c F(x,t)g'_x(x,t)\,dx \underset{c\to+\infty}{\rightrightarrows} \dots$

Надо понять, что $\int\limits_a^{+\infty} F(x,t)g'_x(x,t)\,dx$ равномерно сходится.

$|\,F(x,t)g'_x(x,t)\,| \leqslant M\,|\,g'_x(x,t)\,|$

Надо показать, что $\int\limits_a^{+\infty} |\,g'_x(x,t)\,|\,dx$ равномерно сходится.

$\int\limits_a^c |\,g'_x(x,t)\,|\,dx = \left|\int\limits_a^c g'_x(x,t)\,dx\right| = \left|g(x,t)\Big|_{x=a}^{x=c}\right| = |\,g(c,t) - g(a,t)\,| \rightrightarrows |\,g(a,t)\,|$

Первое равенство – из монотонности g. □

Теорема 4.8 (Признак Абеля)**.**

$f, g\ :\ [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R}$ непрерывные функции.

Если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится при $t \in T$.
2. $g(x,t)$ монотонно по x при любом фиксированном t.

3. $|\,g(x,t)\,| \leqslant M \quad \forall x \in [a,+\infty)$ и $\forall t \in T$,

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,dx$ равномерно сходится при $t \in T$.

Доказательство.

Для непрерывно дифференцируемой g.

$F_b(u,t) := \int\limits_b^u f(x,t)\,dx$

$\int\limits_b^c f(x,t)g(x,t)\,dx = F_b(x,t)g(x,t)\Big|_{x=b}^{x=c} - \int\limits_b^c F_b(x,t)g'_x(x,t)\,dt$

Хочется проверить критерий Коши, т.е. что при $b,c > B \quad \left|\int\limits_b^c fg\right| < \varepsilon$

$\left|F_b(x,t)g(x,t)\Big|_{x=b}^{x=c}\right| = |\,F_b(c,t)g(c,t)\,| \leqslant M\,|\,F_b(c,t)\,| = M\left|\int\limits_b^c f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon M$, если B из критерия Коши для f.

$\left|\int\limits_b^c F_b(x,t)g'_x(x,t)\,dx\right| \leqslant \int\limits_b^c |\,F_b(x,t)\,|\,|\,g'_x(x,t)\,|\,dx <$

$F_b(x,t) = \int\limits_b^x f(y,t)\,dy$

По критерию Коши для $f \quad \forall b,x > B \quad \left|\int\limits_b^x f(y,t)\,dy\right| = |\,F_b(x,t)\,| < \varepsilon$

$< \int\limits_b^c \varepsilon\,|\,g'_x(x,t)\,|\,dx = \varepsilon\left|\int\limits_b^c g'_x(x,t)\,dx\right| = \varepsilon\left|g(x,t)\Big|_{x=b}^{x=c}\right| \leqslant 2M\varepsilon$

$\square$

14.12.2017

Пример.

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

1. $t \geqslant t_0 > 0$ есть равномерная сходимость.

   $f(x,t) = \sin x$

   $g(x,t) = \frac{1}{x^t}$

   Есть равномерная сходимость.

   $\left|\int\limits_a^b f(x,t)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \sin x\,dx\right| = |\cos b - \cos a\,| \leqslant 2$

   $\frac{1}{x^t} \leqslant \frac{1}{x^{t_0}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

   $\implies \frac{1}{x^t} \rightrightarrows 0$

   $\frac{1}{x^t}$ монотонно по x.

2. $t > 0$. Нет равномерной сходимости.

   Пусть есть. Тогда она есть и на $t \in (0, 1)$

   $\implies$ есть сходимость при $t = 0$.

   $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \, dx$ не сходится. Противоречие.

Теорема 4.9.

$f \ : \ [a, +\infty) \times T \to \mathbb{R}$ t_0 – предельная точка T.

1. На любом отрезке $[a, b]$ $f(x, t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} \varphi(x)$
2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x, t) \, dx$ равномерно сходится.

Тогда $\lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x, t) \, dx = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x) \, dx$

Доказательство.

По критерию Коши для равномерной сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x, t) \, dx$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \ \ \forall b, c > B \ \ \forall t \in T \quad \left| \int\limits_b^c f(x, t) \, dx \right| < \varepsilon$

Знаем, что $\int\limits_b^c f(x, t) \, dx \underset{t \to t_0}{\to} \int\limits_b^c \varphi(x) \, dx$

$\implies \left| \int\limits_b^c \varphi(x) \, dx \right| \leqslant \varepsilon.$

Получили критерий Коши для φ.

$$\left| \int\limits_a^{+\infty} f(x, t) \, dx - \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x) \, dx \right| \leqslant \left| \int\limits_a^b (f(x, t) - \varphi(x)) \, dx \right| + \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, t) \, dx \right| + \left| \int\limits_b^{+\infty} \varphi(x) \, dx \right|$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x) \, dx$ сходится $\implies \exists B_0 \ \ \forall b > B_0 \quad \left| \int\limits_b^{+\infty} \varphi(x) \, dx \right| < \varepsilon$

$\int\limits_a^{+\infty} f(x, t) \, dx$ сходится равномерно $\implies \exists B_1 \ \ \forall b > B_1 \quad \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, t) \, dx \right| < \varepsilon$

Возьмем $b > \max\{B_0, B_1\}$

Но при фиксированном b $\quad \left| \int\limits_a^b (f(x, t) - \varphi(x)) \, dx \right| \underset{t \to t_0}{\to} 0$

$\implies$ найдется окрестность t_0, т.ч. $\left| \int\limits_a^b (f(x, t) - \varphi(x)) \, dx \right| < \varepsilon$ □

Пример.

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{при } x \in [0, t] \\ 0 & \text{при } x > t \end{cases}$$

$f(x, t) \rightrightarrows 0$ при $t \to +\infty$ равномерно на $[0, +\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty} f(x, t) \, dx = 1 \not\to \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x) \, dx = 0$

Теорема 4.10.

$f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится по $t \in [c,d]$.

Тогда $F(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ непрерывна на $[c,d]$

Доказательство.

$F_n(t) := \int\limits_a^{n} f(x,t)\,dx \rightrightarrows F(t)$

Но $F_n(t)$ – непрерывные функции, а равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

$\square$

Теорема 4.11.

$f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$ и $f'_t \in C([a,+\infty) \times [c,d])$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,t_0)\,dx$ сходится при некотором t_0.
2. $\Phi(t) := \int\limits_a^{+\infty} f'_t(x,t)\,dx$ сходится равномерно по $t \in [c,d]$.

Тогда $F(t) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится по $t \in [c,d]$.

$F \in C^1[c,d]$ и $F'(t) = \Phi(t)$

Доказательство.

$F_b(t) := \int\limits_a^{b} f(x,t)\,dx$ – дифференцируемая функция.

$F'_b(t) = \int\limits_a^{b} f'_t(x,t)\,dx \underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} \Phi(t)$ равномерно по $t \in [c,d]$.

$F_b(t_0) \underset{b\to+\infty}{\to} F(t_0)$

$F_b(t) = \int\limits_{t_0}^{t} F'_b(s)\,ds + F_b(t_0)$

Знаем, что при $b \to \infty \quad F_b(t_0) \rightrightarrows F(t_0)$

$\int\limits_{t_0}^{t} F'_b(s)\,ds \rightrightarrows \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)\,ds$

$F_b(t) \rightrightarrows \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)\,ds + F(t_0) \implies \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$ равномерно сходится

и $F(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)\,ds + F(t_0)$

Φ непрерывна по предыдущей теореме $\implies F' = \Phi$. $\square$

4.3. §3. Эйлеровы интегралы

***Определение* 4.3.**

$\Gamma(p) := \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ при $p > 0$.

$$B(p,q) := \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \text{ при } p,q>0.$$

Свойства Γ.

1. Γ непрерывна по p.
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
3. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

1. Проверим непрерывность в точке p_0. Возьмем отрезок $[c,d]$, т.ч. $c>0$ и $p_0 \in (c,d)$.

   Достаточно доказать непрерывность на $[c,d]$.

   Нужно доказать равномерную сходимость на $[c,d]$.

   На $[0,1]$ $\quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{c-1}$, $\quad \int\limits_0^1 x^{c-1}\,dx$ – сходится. Тогда исходный интеграл равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.

   На $[1,+\infty)$ $\quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{d-1}e^{-x} \leqslant e^{\frac{x}{2}}e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}$

   Последнее неравенство – начиная с некоторого места.

   А $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ сходится.

2. $\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = x^p(-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} px^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} px^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p)$

3. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$\square$

Свойства Γ.

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
5. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}$
6. Γ – бесконечно дифференцируемая и $\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} \ln^n x \cdot x^{p-1}e^{-x}\,dx$
7. Γ строго выпуклая.

Доказательство.

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-y^2}2y\,dy = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$

   (Сделали замену переменной $x=y^2$ $\ dx = 2y\,dy$)

5. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = ... = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi}$.

6. Проверим дифференцируемость в точке p_0. Возьмем отрезок $[c, d]$, т.ч. $c > 0$ и $p_0 \in (c, d)$.

   Достаточно доказать дифференцируемость на $[c, d]$.

   Нужно доказать равномерную сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \ln x \cdot x^{p-1} e^{-x}\, dx$ на $[c, d]$.

   На $[0, 1]$ $\quad \ln x \cdot x^{p-1} e^{-x} \leqslant \ln x \cdot x^{c-1} \leqslant C x^{c-\varepsilon-1}$

   $x^{\varepsilon} \ln x \underset{x\to 0}{\to} 0 \implies x^{\varepsilon} \ln x \leqslant C$

   Если взять $\varepsilon = \frac{c}{2}$, то $\leqslant C x^{\frac{c}{2}-1}$

   На $[1, +\infty)$ $\quad \ln x \cdot x^{p-1} e^{-x} \leqslant x^p e^{-x} \leqslant x^d e^{-x} \leqslant e^{-\frac{x}{2}}$

   Последнее неравенство – начиная с некоторого места.

7. $\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{p-1} e^{-x}\, dx > 0$

$\square$

***Свойства** B.*

1. $B(p, q)$ – непрерывна.

2. $B(p, q) = B(q, p)$

3. $B(p, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$

Доказательство.

1. Проверим непрерывность в точке (p_0, q_0). Накроем ее отрезком $(c, d)^2 \ni (p_0, q_0)$ и $c > 0$.

   Нужна равномерная сходимость на $[c, d]$.

   $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{c-1}(1-x)^{c-1}$ такой $\int$ сходится.

2. $B(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \int\limits_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} \cdot (-1)\, dy = \int\limits_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\, dy = B(q, p)$

   Была замена $y = 1 - x \quad dy = -dx$

3. $B(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{t}{t+1})^{p-1} (\frac{1}{1+t})^{q-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$

   Замена переменной.

   $x = \frac{t}{1+t}$

   $1 - x = \frac{1}{1+t}$

   $dx = \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$

$\square$

Теорема 4.12.
$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Доказательство.

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} s^{p-1}y^{p-1}e^{-sy}s\,dy$

Замена переменной.

$x = sy$, где $s > 0$.

$dx = s\,dy$

$\implies \frac{\Gamma(p)}{s^p} = \int\limits_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-sy}\,dy$

$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy$

Умножим на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$.

$\Gamma(p+q)\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}e^{-ty}\,dy\,dt$

Заметим, что $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}e^{-ty}\,dy\,dt = \int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}y^pe^{-ty}\,dt\,dy = \int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx\,dy =$$
$$= \Gamma(p)\int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$$

Замена $ty = x \quad y\,dt = dx$ □

Теорема 4.13 (формула дополнения)**.**

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ при $p \in (0,1)$.

Доказательство.

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \Gamma(1)B(p,1-p) = B(p,1-p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi p}$

Докажем, что такой интеграл равен именно этому в следующем семестре. □

Теорема 4.14 (формула Эйлера-Гаусса)**.**

$\Gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$

Доказательство.

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_1^{0}(-\ln t)^{p-1}t(-1)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^{1}(\ln\frac{1}{t})^{p-1}\,dt$

Замена переменной. $e^{-x} = t \quad x = -\ln t \quad dx = -\frac{dt}{t}$

$\ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - t^{\frac{1}{n}})$

$$\implies \Gamma(p) = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty}(n(1-t^{\frac{1}{n}}))^{p-1}\,dt \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (n(1-t^{\frac{1}{n}}))^{p-1}\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^{p-1}(1-u)^{p-1}nu^{n-1}\,du =$$
$$= \lim\limits_{n\to\infty} n^p\int\limits_0^1 u^{n-1}(1-u)^{p-1}\,du = \lim\limits_{n\to\infty} n^p\frac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^p\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$$

Замена переменной $u = t^{\frac{1}{n}} \quad u^n = t \quad nu^{n-1}\,du = dt$

Последнее равенство – т.к.:

$\Gamma(n+p) = (n+p-1)\Gamma(n+m-1) = (n+p-1)(n+p-2)\Gamma(n+p-2) = (n+p-1)(n+p-2)\dots p\Gamma(p)$

Осталось только понять, почему верно равенство с вопросиком – т.е. почему можно менять предел и интеграл.

$(n(1-t^{\frac{1}{n}}))'_n = (1-t^{\frac{1}{n}}) + n(-1)\ln t \cdot t^{\frac{1}{n}} \cdot (-\frac{1}{n^2}) = 1 - t^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\ln t \cdot t^{\frac{1}{n}} = t^{\frac{1}{n}}(t^{-\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{t}) =$
$= t^{\frac{1}{n}}(1 + r - 1 - \ln(1+r)) = t^{\frac{1}{n}}(r - \ln(1+r)) > 0$

$\frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} = 1 + r$

Т.е. $(n(1-t^{\frac{1}{n}}))^{p-1}$ возрастает по n при $p \geqslant 1$ (можно пользоваться теоремой Леви), и убывает по n при $p \leqslant 1$ (пользуемся теоремой Лебега, мажоранта $n = 1$, $(1-t)^{p-1}$ – суммируема.). □

Пример.

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^p}\,dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} e^{-y}\,dy = \frac{1}{p}\Gamma(\frac{1}{p}) = \Gamma(\frac{1}{p}+1)$

   Замена переменной:

   $y = x^p \quad x = y^{\frac{1}{p}}$

   $dx = \frac{1}{y^{\frac{1}{p}-1}}\,dy$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{p}{2}-1}(1-t)^{\frac{q}{2}-1}\,dt = \frac{1}{2}B(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$

   Замена переменной:

   $t = \sin^2 x$

   $dt = 2\sin x \cos x\,dx$

   В частности, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} x\,dx = \frac{1}{2}B(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{p}{2})\sqrt{n}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}$

3. Объем n-мерного шара.

   $V_n(r)$ – объем n-мерного шара радиуса r.

   $V_n(r) = C_n r^n$

   $V_1(r) = 2r$

   $V_2(r) = \pi r^2$

   $V_n(1) = \int\limits_{-1}^{1} V_{n-1}(\sqrt{1-x^2})\,dx = 2C_{n-1}\int\limits_0^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1}\,dx =$

   $x = \sin\varphi, \quad dx = \cos\varphi\,d\varphi$

   $= 2C_{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\,d\varphi = 2C_{n-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

   $\implies C_n = C_{n-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = C_{n-2}\pi\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})} = ... = c_1\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

5. 12. Криволинейные интегралы.

5.1. §1. Криволинейные интегралы

***Определение* 5.1.**

Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги).

$\gamma \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ гладкая кривая.

f определена на $\gamma([a,b])$

$\int\limits_\gamma f\,ds := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$

Свойства.

1. Не зависит от параметризации.

   Доказательство.
   $\tilde{\gamma} \ : \ [c,d] \to \mathbb{R}^n \quad \gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau$

   $\tau \ : \ [a,b] \to [c,d]$

   $\int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int\limits_a^b f(\tilde{\gamma}(\tau(u)))\|\tilde{\gamma}'(\tau(u)) \cdot \tau'(u)\|\,du =$

   $= \int\limits_a^b f(\tilde{\gamma}(\tau(u)))\|\tilde{\gamma}'(\tau(u))\|\tau'(u)\,du = \int\limits_c^d f(\tilde{\gamma}(v))\|\tilde{\gamma}'(v)\|\,dv$ □

2. Не зависит от направления.

3. Линейность по функции f.

   $\int\limits_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int\limits_\gamma f\,ds + \beta \int\limits_\gamma g\,ds$

4. Аддитивность.

   $\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,ds = \int\limits_{\gamma_1} f\,ds + \int\limits_{\gamma_2} f\,ds$

   (γ_2 начинается там, где заканчивается γ_1).

5. $\int\limits_\gamma 1\,ds = l(\gamma)$ – длина кривой.

   $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

6. $\tilde{\gamma} \ : \ [0,S] \to \mathbb{R}^n$ – натуральная параметризация γ.

   $\int\limits_\gamma f\,ds = \int\limits_0^S f(\tilde{\gamma}(t))\,dt$

   Надо лишь понять, что $\|\tilde{\gamma}'\| = 1$

   $\int\limits_0^s \|\tilde{\gamma}'(t)\|\,dt = l(\tilde{\gamma}\Big|_{[0,s]}) = s$

   Дифференцируем по s: $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$

7. $f \leqslant g \implies \int\limits_{\gamma} f\,ds \leqslant \int\limits_{\gamma} g\,ds$

8. $\left|\int\limits_{\gamma} f\,ds\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |\,f\,|\,ds \leqslant \max|\,f\,|\cdot l(\gamma)$

   Доказательство.
   $-|\,f\,| \leqslant f \leqslant |\,f\,|$ – пользуемся этим.

   □

Упражнение.
$\int\limits_{\gamma} f\,ds = \lim \sum\limits_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))l(\gamma\Big|_{[t_{k-1},t_k]})$

Замечание.
Можно все это определить и для кусочно-гладкой кривой. (На каждом кусочке есть формула, потом все просуммировали)

***Определение* 5.2.**
Дифференциальная форма первого порядка.

$\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \dots + f_n\,dx_n$

***Определение* 5.3.**
Криволинейный интеграл второго рода (интеграл от дифференциальной формы)

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma} f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n := \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \ldots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,dt$$

Свойства.

1. Не зависит от параметризации.

   $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \tau \quad \tau \ : \ [a, b] \to [c, d]$ строго монотонна.

   $$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\,dt = \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\tilde{\gamma}(\tau(t)))\tilde{\gamma}_k'(\tau(t))\tau'(t)\,dt = \int\limits_c^d \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\tilde{\gamma}(u))\tilde{\gamma}_k'(u)\,du$$

2. Смена направления меняет знак интеграла.

3. $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$

   $\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma} \left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle$, где $\vec{\sigma}$ – единичный касательный вектор.

   Доказательство.

   $\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_a^b \sum f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\,dt$

   $\vec{\sigma}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

   $\int\limits_{\gamma} \left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle = \int\limits_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \|\gamma'(t)\|\,dt = \int\limits_a^b \sum f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\,dt$ □

20.12.2017

Свойства.

4. $\int\limits_{\gamma} \omega$ аддитивен по γ

5. $\int\limits_{\gamma} \omega$ линеен по ω

6. $\left|\int\limits_{\gamma} \omega\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} \|\vec{f}\|\, ds \leqslant \max\|\vec{f}\| \cdot l(\gamma)$

   Доказательство.
   $\left|\int\limits_{\gamma} \omega\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} \left|\left\langle \vec{f}, \vec{\sigma} \right\rangle\right| ds \leqslant \int\limits_{\omega} \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{\sigma}\|\, ds$, но $\|\vec{\sigma}\| = 1$ □

Упражнение.
$\int\limits_{\gamma} \omega = \lim \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$

***Определение* 5.4.**
ω – форма. F – первообразная ω, если $dF = \omega$.
$(dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}\, dx_n$, т.е. $f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k})$
$\omega = f_1\, dx_1 + ... + f_n\, dx_n$

Теорема 5.1.
Если F – первообразная ω и γ – кривая, соединяющая точки a и b, то $\int\limits_{\gamma} \omega = F(b) - F(a)$

Доказательство.
$\gamma \;:\; [c, d] \to \mathbb{R}^n \quad \gamma(c) = a \quad \gamma(d) = b$

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma} dF = \int\limits_{c}^{d} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t))\gamma_k'(t)\, dt = \int\limits_{c}^{d} (F(\gamma(t)))'\, dt = F(\gamma(d)) - F(\gamma(c)) = F(b) - F(a)$$ □

Следствие.
Если у ω есть первообразная, то $\int\limits_{\gamma} \omega$ зависит только от начала и конца γ

***Определение* 5.5.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, если Ω – открыто и линейно связно.

Теорема 5.2.
Ω – область, ω – форма в Ω.
ω имеет первообразную $\iff \int\limits_{\gamma} \omega = 0 \;\; \forall$ замкнутой кривой γ.

Доказательство.
"$\Longrightarrow$"

По предыдущей теореме, т.к. начало и конец совпадают:
$\int\limits_{\gamma} \omega = F(a) - F(a) = 0$
"$\Longleftarrow$"

Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$.

$F(x) := \int\limits_{\gamma} \omega$ по γ, соединяющую точку x_0 и x. (Корректно – т.к. раз по замкнутой кривой интеграл 0, то если пойти в каждую из сторон пройдем одинаково)

Проверим, что F подходит.

Т.е. докажем, что $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$.

$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x_1+h,x_2,\dots,x_n) - F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{h}$

$F(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{\gamma} \omega$

$F(x_1 + h, x_2, ..., x_n) = \int\limits_{\gamma \cup \text{отрезок } I} \omega$

TODOКАРТИНКА

$\frac{F(x_1+h,x_2,\dots,x_n) - F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{I} \omega = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_1+t, x_2, .., x_n)\gamma_k'(t)\, dt = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h} f_1(x_1+t, x_2, .., x_n)\, dt =$

$= f_1(x_1 + c_h h, x_2, ..., x_n) \underset{h\to 0}{\to} f(x_1, ..., x_n)$, где

$0 \leqslant c_h \leqslant 1$ □

Следствие.

Ω – выпуклая область. ω – форма.

ω имеет первообразную $\iff$ $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$, где γ – любая замкнутая ломаная со звеньями, параллельными осям координат.

Доказательство.

"$\implies$" – ясно.

"$\impliedby$"

Нужно лишь понять, что фиксированную точку x_0 можно соединить с точкой x, с помощью ломаной, удовлетворяющей заданным свойствам.

Можно соединить x_0 и x отрезком. (Область выпуклая). Далее покрыть этот отрезок шариками. Выбрать из пересечений шариков по точке. Теперь между двумя соседними точками нужно научиться проходить по отрезкам, параллельным осям координат. Для этого построим на маленьких отрезочках как на диагонали параллелепипед (точно живет в шарике), и пройдем по его сторонам. □

***Определение* 5.6.**

Ω – элементарная область по оси x, если

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a < x < b, \quad \varphi(x) < y < \psi(x)\}$, где φ, ψ – непрерывные функции.

Ω – элементарная область по оси y, если

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad c < y < d, \quad \alpha(y) < x < \beta(y)\}$, где α, β – непрерывные функции.

Теорема 5.3 (Формула Грина).

Ω – ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых.

$\omega = P\,dx + Q\,dy$

P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\operatorname{Cl}\Omega$. Тогда:

$\int\limits_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \int\limits_{\gamma} P\, dx + Q\, dy$

γ – граница Ω, каждый кусочек ориентирован так, что Ω слева.

Доказательство.

$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\gamma} P\, dx$ и $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\gamma} Q\, dy$

Проверим первую формулу.

1. Ω – элементарна по оси x.

   $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx = \int\limits_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)))\, dx$

   $\int\limits_{\gamma} P\, dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\, dx + \int\limits_{\varphi(b)}^{\psi(b)} P(b,y)\cdot 0\, dy + \int\limits_b^a P(x,\psi(x))\, dx + \int\limits_{\psi(a)}^{\varphi(a)} P(a,y)\cdot 0\, dy =$

   $= \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x)))\, dx$

2. Пусть формула дана для Ω_1 и Ω_2 и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$

   Тогда формула верна для $\Omega = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,\Omega_1 \cup \mathrm{Cl}\,\Omega_2)$

   $\int\limits_{\Omega_j} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\gamma_j} P\, dx$

   $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\gamma_1} P\, dx - \int\limits_{\gamma_2} P\, dx = -\int\limits_{\gamma} P\, dx$

   Последнее равенство – т.к. если у границ и были общие куски, то они сократились за счет ориентации.

3. Для конечного объединения Ω_j.

4. Любую область из условия теоремы можно разрезать на конечное число элементарных. (доказывать не будем)

$\square$

Следствие.

$\lambda\Omega = \int\limits_{\gamma} x\, dy = -\int\limits_{\gamma} y\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} x\, dy - y\, dx$

γ – граница Ω с правильной ориентации из теоремы.

5.2. §2. Замкнутые и точные формы

***Определение* 5.7.**

Ω – область, ω – форма в Ω.

ω – точная, если у ω есть первообразная.

***Определение* 5.8.**

ω – локально точная, если у каждой точки существует окрестность, в которой у ω есть первообразная.

***Определение* 5.9.**

ω – замкнутая, если $\omega = f_1\, dx_1 + ... + f_n\, dx_n$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ \ \forall i, j$

Теорема 5.4.

Если $f_k \in C^1(\Omega)$, то локальная точность $\implies$ замкнутость.

Доказательство.

Проверим равенство $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ в точке x.

Возьмем окрестность точки x и первообразную F в этой окрестности.

$f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial F}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ – не зависит от порядка дифференцируемости в силу непрерывности. □

Дальше $n = 2$. (Все плоское)

Теорема 5.5.

Если ω замкнутая, то ω локально точная.

Доказательство.

Возьмем точку $x \in \Omega$ и круг с центром в x.

Докажем, что в нем есть первообразная. Достаточно проверить, что $\int$ по любому прямоугольнику $= 0$.

$\int P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\square} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy = 0$ по определению замкнутости. □

Лемма (Пуанкаре)**.**

Ω – выпуклая, коэффициенты ω из C^1, то ω – замкнутая $\iff$ ω – точная.

Доказательство.

"$\Longleftarrow$" точность $\implies$ локальная точность $\implies$ замкнутость.

" $\implies$ " Надо проверить, что $\int$ по замкнутой ломаной со сторонами параллельными осям $= 0$.

Нарежем точками самопересечения на не пересекающиеся куски. На них по формуле Грина $\int = 0$. □

Следствие.

Замкнутая форма в открытом круге имеет первообразную.

21.12.2017

Пример.

Выпуклость существенна.

$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = P\,dx + Q\,dy$

ω – замкнута, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{-(x^2+y^2)-2y\cdot(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Но ω не является точной. Проинтегрируем ее по единичной окружности, против часовой стрелки.

$$\int\limits_{\text{ед. окр.}} \omega = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t(\cos t)' + \cos t \cdot (\sin t)')\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Лемма (Лебега)**.**

K – компакт в метрическом пространстве.

$\{U_\alpha\}$ – покрытие K открытыми множествами.

Тогда $\exists r > 0$, т.ч. $\forall x \in K$ шар $B_r(x)$ целиком попадает в какое-то U_α

Доказательство.

Для каждого $x \in K \quad \exists U_\alpha$, покрывающее x.

$\implies \exists r_x > 0$, т.ч. $B_{r_x}(x) \subset U_\alpha$.

Рассмотрим новое покрытие K:

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{r_x/2}(x)$

Выберем конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{r_{x_j}/2}(x_j)$

$r := \min\limits_{j=1..n} \frac{r_{x_j}}{2}$

Покажем, что r подходит. Возьмем $x \in K$. Она покрыта шаром $B_{r_{x_m}/2}(x_m)$

Знаем, что $B_{r_{x_m}}(x_m) \subset U_\alpha$.

Но тогда и $B_r(x) \subset U_\alpha$, т.к. $r \leqslant \frac{r_{x_m}}{2} \implies B_r(x) \subset B_{r_m}(x_m) \subset U_\alpha$

$\rho(y, x_m) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, x_m) \leqslant r + \frac{r_m}{2} \leqslant r_m$ □

***Определение* 5.10.**

ω – локально точная форма в Ω.

γ – кривая в Ω, $\gamma \ : \ [a, b] \to \Omega$

$f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразная ω вдоль пути γ, если

$\forall \tau \in [a, b]$ существует такая окрестность U точки $\gamma(\tau)$ и первообразная F в этой окрестности, т.ч. $f(t) = F(\gamma(t))$

Теорема 5.6.

Первообразная вдоль пути существует и единственна с точностью до константы.

Доказательство.

Единственность. Пусть f_1 и f_2 – первообразные вдоль γ.

$g := f_1 - f_2$ – локально постоянная $\implies g \equiv const$

Берем точку $\tau \in [a, b] \quad \exists U_1, U_2$ – окрестности $\gamma(\tau)$, т.ч.

$f_1(t) = F_1(\gamma(t))$ и $f_2(t) = F_2(\gamma(t))$

F_i – первообразные в U_i.

$V = U_1 \cap U_2$, там заданы F_1 и F_2 и они отличаются на константу. (Можем считать, что все – шарики).

Существование.

$\forall \tau \in [a, b]$ у точки $\gamma(\tau)$ есть окрестность U_τ, в которой у ω существует первообразная. (Считаем, что все окрестности – кружочки)

Выберем конечное подпокрытие из этих кружочков. – $U_{\tau_1}, U_{\tau_2}, ..., U_{\tau_n}$

и $r > 0$ из леммы Лебега.

Нарежем γ на кусочки длины $< r$. Каждый кусочек целиком содержится в своем U_{τ_k}

Пусть нарезка была точками $a = t_0, t_1, ..., t_m = b$

f на $[t_0, t_1]$ берем $F_1(\gamma(t)) \ \ t \in [t_0, t_1]$.

Поменяем нумерацию. Если точка t_1 в U_{τ_k}, то отныне это множество U_1 и т.д.

Посмотрим на $U_1 \cap U_2 \ni \gamma(\tau_1) \implies$ не пусто выпуклое множество.

F_1 и F_2 – первообразные в пересечении $\implies$ они отличаются на константу.

Исправим F_2 так, что константа станет равна 0.

f на $[t_1, t_2]$ равна $F_2(\gamma(t))$ $t \in [t_1, t_2]$.

Смотрим на $U_2 \cap U_3 \ni (\gamma(t_2))$

Подправляем F_3 и т.д.

Построили первообразную вдоль пути. □

Следствие.

f – первообразная вдоль кусочно-гладкого пути $\gamma \implies \int\limits_\gamma \omega = f(b) - f(a)$

Доказательство.

$$\int\limits_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}} dF_k = \sum_{k=1}^{n} (F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1})) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$$ □

***Определение* 5.11.**

$\gamma_0 \ : \ [a, b] \to \Omega$

$\gamma_1 \ : \ [a, b] \to \Omega$

– гомотопные пути с неподвижными концами.

Если $\exists \gamma \ : \ [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ γ непрерывная на $[a, b] \times [0, 1]$

$\gamma(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$

$\gamma(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$

$\gamma(a, u) \equiv \gamma_0(a)$

$\gamma(b, u) \equiv \gamma_0(b)$

Замечание.

$\gamma_u(\cdot) = \gamma(\cdot, u) \ : \ [a, b] \to \Omega$ – некоторая кривая с теми же концами.

Жизненная интерпретация – резиночка на двух гвоздиках, из одной кривой плавно переделываем резиночку в другую.

Если есть например дырка между двумя кривыми, то ничего не получится...

***Определение* 5.12.**

$\gamma_0, \gamma_1 \ : \ [a, b] \to \Omega$ – замкнутые пути.

– гомотопные замкнутые пути, если

$\exists \gamma \ : \ [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ непрерывна

$\gamma(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$

$\gamma(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$

$\gamma(a, u) = \gamma(b, u)$ (все промежуточные пути замкнуты)

***Определение* 5.13.**

$\gamma_0 \ : \ [a, b] \to \Omega$ – замкнутый путь.

γ_0 – стягиваемый путь, если γ_0 гомотопна пути $\gamma_1 \equiv const$

Замечание.

“Не суй голову в петлю, гомотопную нулю.”

***Определение* 5.14.**
Ω – односвязная область, если любой замкнутый путь стягиваемый.

Пример.

1. Выпуклая область односвязна.

2. Звездная область односвязна.

   ***Определение* 5.15.**
   Область Ω звездная, если $\exists a \in \Omega$, т.ч. $\forall x \in \Omega$ отрезок $[a, x] \subset \Omega$.

   Доказательство.
   Стянем любую замкнутую кривую в точку a.
   $\gamma(t, u) = \gamma_1(t) \cdot u$ при $u = 1$ будет равно γ_1, при $u = 0$ будет равно 0. □

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ не является односвязной.
   (Интуитивно понятно, проверка замята, факт потом появится из чего-то более общего)

Упражнение.
Ω – односвязна, $f \ : \ \mathbb{T} \to \Omega$ непрерывна ($\mathbb{T}$ – единичная окружность).
Доказать, что $\exists g \ : \ \overline{\mathbb{D}} \to \Omega$ непрерывна и т.ч. $g\Big|_{\mathbb{T}} \equiv f$.
Где $\overline{\mathbb{D}}$ – замкнутый единичный круг.

***Определение* 5.16.**
ω – локально точная форма в Ω.
$\gamma \ : \ [a, b] \times [c, d] \to \Omega$ непрерывна.
$f \ : \ [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ первообразная относительно отображения γ,
если $\forall (\tau, \nu) \in [a, b] \times [c, d]$ существует окрестность U точки $\gamma(\tau, \nu)$
и первообразная F в этой окрестности, т.ч. $f(t, u) = F(\gamma(t, u))$ для тех (t, u), что $\gamma(t, u) \in U$.

Теорема 5.7.
Такая первообразная существует и единственна с точностью до константы.

Доказательство.
Единственность: $f_1 - f_2$ локально постоянна.

Существование. $\gamma([a, b] \times [c, d]) \subset \Omega$ каждую точку покрываем окрестностью, где есть первообразная, выбираем конечное подпокрытие и $r > 0$ из леммы Лебега.

Нарежем $[a, b] \times [c, d]$ вертикальными и горизонтальными прямыми на кусочки, образы которых имеют диаметр $< r \implies$ содержатся целиком в элементе покрытия.

Нарезаем $a = t_0, t_1, ..., t_n = b \quad c = u_0, u_1, ..., u_m = d$.

U_{ij} – элемент покрытия, содержащий $\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j])$

F_{ij} – первообразная ω в U_{ij}.

f_1 на $[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]$ это $F_{11}(\gamma(t, u))$

$U_{21} \cap U11 \ni \gamma(t_1, [u_0, u_1])$ – тут F_{21} и F_{11} отличаются на константу.

Подправим F_{21} так, чтобы совпали на пересечении.

f_1 на $[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]$ это $F_{21}(\gamma(t, u))$.

и т.д. по i от 2 до n.

В итоге построим f_1 на $[a,b] \times [u_0, u_1]$.

Аналогично построим остальные f_j.

$f_1(\cdot, u_1)$ и $f_2(\cdot, u_1)$ – первообразные вдоль пути $\gamma(\cdot, u_1)$.

Значит, они отличаются на константу, вычтем эту константу из $f_2(\cdot, u_1)$ так, что они совпали.

Вот так все и склеится. □

Теорема 5.8.

γ_0 и γ_1 гомотопные пути с неподвижными концами. ω – локально точная форма.

Тогда $\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство.

Пусть γ – гомотопия, f первообразная относительно γ,

$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b,0) - f(a,0) \quad \int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b,1) - f(a,1)$.

Поймем, что $f(a,u)$ локально постоянна (аналогично $f(b,u)$).

Существует окрестность точки $\gamma(a,u)$, т.ч. при $\gamma(t,u)$ из этой окрестности

$f(t,u) = F(\gamma(t,u))$, подставим $t = a$

$f(a,u) = F(\gamma(a,u))$ – постоянна, т.к. $\gamma(a,u) = \gamma_0(a)$. □

Теорема 5.9.

ω – локально точная форма, γ_0 – стягиваемый путь

$\implies \int\limits_{\gamma_0} \omega = 0$

Доказательство.

γ – гомотопия, f – первообразная относительно γ.

$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b,0) - f(a,0) \quad \int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b,1) - f(a,1)$.

$\gamma(t,1) \equiv const \quad f(t,1) = F(\gamma(t,1)) = const$

$\implies \int\limits_{\gamma_1} \omega = 0$

Поймем, что $f(b,u) - f(a,u)$ – локально постоянна.

Рассмотрим точку (a,ν) $\gamma(a,\nu) = \gamma(b,\nu)$ покрыта окрестностью U и там есть первообразная F.

$f(t,u) = F(\gamma(t,u))$ при (t,u) из окрестности (a,ν)

$f(t,u) = \tilde{F}(\gamma(t,u))$ при (t,u) из окрестности (b,ν)

Т.к. образы одинаковы, то F и $\tilde{F}$ отличаются на константу.

$f(a,u) = F(\gamma(a,u)) = \tilde{F}(\gamma(a,u)) + C = \tilde{F}(\gamma(b,u)) + C = f(b,u) + C$

□

Теорема 5.10.

Ω – односвязна, ω – локально точная $\implies$ ω точная.

Доказательство.

Просто следствие из предыдущих n теорем. □