Дискретная математика

Коллективный разум

29 января 2018 г.

Содержание

1. Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях **1**

1.1 Подсчёт остовных деревьев в графе 1

2. Специальные циклы в графах **5**

2.1 Эйлеровы циклы 5

2.2 Гамильтоновы циклы 8

3. Линейные пространсва в графах **11**

3.1 Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы 11

4. Циркуляции и напряжения. Электрические сети. **15**

4.1 Циркуляции и напряжения. 15

4.2 Электрические сети. 17

5. Связность в графах **20**

5.1 Вершинная и рёберная связность графа. 20

5.2 Двусвязные графы 21

5.3 k-связные графы. Теорема Менгера. Теорема Уитни. 24

5.4 Теорема Форда-Фалкерсона 26

6. Паросочетания **28**

6.1 Определение паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа 28

6.2 Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе 32

6.3 Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта. 34

6.4 Максимальные паросочетания в произвольном графе.
Структурная теорема Галлаи-Эдмондса. Алгоритм Эдмондса 39

7. Покраска графов **44**

7.1 k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса (Brooks, 1941) 44

7.2 Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы . 47
7.3 Рёберная раскраска графов 52

8. А я сказала, ещё короче! 55

8.1 Подсчёт остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях 55
8.2 Эйлеровы циклы 55
8.3 Гамильтоновы циклы 55
8.4 Линейное пространство рёбер. Циклы и разрезы 56
8.5 Циркуляции и напряжения. Электрические сети 56
8.6 Вершинная и рёберная связность графа. 57
8.7 Двусвязные графы 57
8.8 k-связные графы. Теоремы Менегера и Уитни 57
8.9 Теорема Форда-Фалкерсона 58
8.10 Понятие паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа 58
8.11 Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе. 58
8.12 Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта. 59
8.13 Максимальные паросочетания в произвольном графе. Структурная теорема Галлаи-Эдмондса. Алгоритм Эдмондса 59
8.14 k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса 60
8.15 Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы. . 60
8.16 Рёберная раскраска графов. 61

1. Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях

1.1. Подсчёт остовных деревьев в графе

Теорему Кэли можно интерпретировать в том числе как количество всех остовных деревьев в полном графе.

Утверждение 1.1.1.

$t(G)$ — количество всех остовных подграфов G.

Пусть e — ребро G, не петля. Тогда $t(G) = t(G-e)+t(G/e)$, где в одном случае ребро удаляют, а во втором стягивают.

Доказательство.

Разобъем множество остовов на два: те, которые содержат ребро e и те, которые нет. Они очевидно не пересекаются.

Во втором случае просто удалим ребро и посчитаем. В первом, рассмотрим любое дерево T, содержащее это ребро.

Пусть мы стянули его. Тогда мы уменьшим число вершин в графе на 1. Граф при этом останется связным. Значит, T/e всё ещё дерево, остовное дерево графа G. Более того, никакие 2 различных дерева, содержащие e не сольются в одно.

Обратно, любое остовное дерево в графе G/e превращается в остовное, содержащее e, расщеплением вершины в ребро. □

При выполнении алгоритма нужно удалять петли, т.к. они мешают нам. Мультиребра, при этом, работают правильно.

***Определение* 1.1.1.**

Рассмотрим связный неорграф из n вершин без петель. Матрица смежности M_a такого графа симметрична, на диагонали нули.

Возьмем теперь матрицу M_d размером $n \times n$, в которой диагональные элементы равны степеням соответствующих вершин в графе, а остальные элементы равны 0.

Матрица $L := M_d - M_a$ называется матрицей Кирхгофа

Лемма.

Пусть есть орграф D, полученный из G произвольной ориентацией ребер, а M_i — матрица инцидентности орграфа D. Тогда $L = M_i \cdot M_i^T$

Доказательство.

Заметим, что элемент $m_{i,j}$ матрицы M_i равен 1, если ребро e_j выходит из вершины i и -1, если входит.

Поскольку $l_{i,j}$ — скалярное произведение i и j строк матрицы, то если $i \neq j$ — это произведение даст нам столько -1, сколько ребер имеется между этими вершинами. Иначе имеем количество ребер, смежных с i-ой вершиной.

Построили в точности матрицу L. □

Следствие.

Матрица L^*, полученная из матрицы Кирхгофа L удалением k-й строки и k-го столбца равна $L^* = M_i^*(M_i^*)^T$, где M_i^* — это матрица M_i с удаленной k-й строкой.

Теорема 1.1.2 (Matrix tree theorem)**.**

Пусть G — произвольный граф, а L — соответствующая ему матрица Кирхгофа.

Пусть L^* — матрица, полученная из матрицы Кирхгофа удалением k-й строки и k-го столбца для произвольного k. Тогда количество остовных деревьев графа G равно $t(G) = \det(L^*)$.

Доказательство.

Рассмотрим граф D, полученный из G произвольной ориентацией рёбер.

Пусть B — подматрица $(n-1) \times (n-1)$ матрицы M_i^* — матрицы инцидентности графа D с вычеркнутой k-ой строкой.

Столбцы подматрицы B отвечают какому-то набору из $n-1$ ориентированных ребер в орграфе D. Соответствующие этому набору неориентированные ребра вместе с инцидентными им вершинами образуют в G подграф H. Покажем, что определитель $|\det| B = 1$, если H — остовное дерево, и $|\det B| = 0$ в противном случае.

Действительно, если H — остовное дерево, то у него имеется по крайней мере две вершины степени 1. А значит, в матрице B найдётся строка, содержащее всего одно ненулевое значение.

Разложим матрицу по этой строке, получив аналогичную задачу (дерево H с удалённым листом). Поскольку определитель изменился на ± 1, то продолжая так дальше получим, что определитель всей матрицы также равен ± 1.

Пусть в H имеется цикл. Зафиксируем столбцы, соответствующие рёбрам этого цикла, и покажем, что они линейно зависимы. Для этого рассмотрим ориентацию этого цикла, и для рёбер, ориентированных по направлению цикла, возьмём их столбцы с положительным знаком, а для ориентированных против направления цикла — с отрицательным. Сумма таких столбцов действительно даст 0, что и требовалось.

Для доказательства теоремы осталось воспользоваться формулой Бине-Коши:

$$\det(M_i * \cdot (M_i *)^T) = \sum (\det B) \cdot (\det B^T) = \sum (\det B)^2,$$

где сумма берётся по всевозможным $n-1 \times n-1$-подматрицам B матрицы M_i^*. □

Замечание.

Собственным числом матрицы A называется такое λ, что $\det(\lambda E - A) = 0$.

Поскольку определитель является многчленом, то над $\mathbb{C}$ его можно представить как:

$\chi(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$

Замечание.

Поскольку сумма всех строк матрицы Кирхгофа L даёт 0, то $\lambda = 0$ является собственным числом матрицы L.

Утверждение 1.1.3.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $L(G)$, причём $\lambda_1 = 0$.

Тогда количество остовных деревьев вычисляется как $t(G) = \frac{1}{n}\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Доказательство.

Знаем, что 0 является собственным числом $L(G)$. А значит, характеристический многочлен этой матрицы имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

Посчитаем коэффициент при λ^1.

С одной стороны, это в точности $(-1)^{n-1}\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

С другой стороны, его можно вычислить как $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\chi(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$.

Вспомним, как вычислять производную от произвольной матрицы A, зависящей от некоторого параметра t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\det(A(t)) = \sum(\operatorname{sign}(\sigma)a_{\sigma(1),1}(t)\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}(t))' =$$
$$= \sum \operatorname{sign}(\sigma)a'_{\sigma(1),1}(t)\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}(t) + \ldots + \sum \operatorname{sign}(\sigma)a_{\sigma(1),1}(t)\cdot\ldots\cdot a'_{\sigma(n),n}(t)$$

Введём обозначение $A'_j(t) := \det(a_1, \ldots, a'_j(t), \ldots, a_n)$. Тогда определитель будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\det(A(t)) = \sum_{i=1}^{n} A'_i(t)$$

Если мы теперь разложим $A'_j(t)$ по j-ому столбцу, то получим:

$$A'_j(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{i,j}(t)M_{i,j}(t),$$

где $M_{i,j}$ — минор матрицы $A'_j(t)$ (совпадающий с аналогичным минором матрицы A).

Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\det(A(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{i,j}(t)M_{i,j}(t) = \operatorname{tr}(C^T\cdot A'(t)),$$

где C — матрица, составленная из элементов вида $(-1)^{i+j}M_{i,j}$, а $A'(t)$ — матрица, составленная из элементов вида $a'_{i,j}(t)$.

Поскольку в нашем случае $A(t) = t\cdot E - L$, то $a'_{i,j} = 1$, если $i = j$, и $a'_{i,j} = 0$ иначе. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\det(\lambda E - L)\Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n}\det(-L^*) = (-1)^{n-1}\cdot n\cdot L^*(G)$$

Собрав всё вместе, получаем, что $L^*(G) = \frac{1}{n}\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$. □

***Определение* 1.1.2.**

Пусть D — произвольный ориентированный граф.

Обозначим за M_d^- — матрицу исходящих степеней, а за M_d^+ — матрицу входящих степеней. Положим $L^- = M_d^- - M_a$ и $L^+ = M_d^+ - M_a$, где M_a — матрица смежности графа D.

***Определение* 1.1.3.**

Корневое остовное дерево — остовное дерево, все рёбра которого ориентированы к корню (или от корня, хотя в этой главе будем рассматривать только деревья первого типа).

Теорема 1.1.4 (Татт, 1948)**.**

Количество $t^-(D, i)$ корневых деревьев, все рёбра которых ориентированы к корню i, вычисляется как $t^-(D, i) = \det(L^-_{i,i})$, где L^-i, i — матрица Кирхгофа, из которой выкинуты i-ая строка и i-ый столбец.

Доказательство.

Не умаляя общности, будем считать, что рассматриваем деревья с корнем в вершине 1.

Пусть $\text{outdeg}(v) = 0$ для $v > 1$.

Тогда количество корневых деревьев, очевидно, равно 0, что и даёт нам условие теоремы.

Пусть $\text{outdeg}(v) > 1$ для $v > 1$.

Зафиксируем ребро e, исходящее из вершины v. Тогда все корневые деревья разбиваются на те, которые содержат e, и те, которые ребро e не содержат. В частности, можно рассмотреть графы D_1 и D_2, идентичные D за исключением рёбер, исходящих из v.

Так, D_1 — граф, содержащий только ребро e, а D_2 — аналогичный граф, не содержащий e, но содержащий все остальные исходящие из v рёбра.

Тогда очевидно, что $t^-(D) = t^-(D_1) + t^-(D_2)$. И, в частности, в силу полилинейности будет верно и равенство $\det(L^-_{i,i}(D)) = \det(L^-_{i,i}(D_1)) + \det(L^-_{i,i}(D_2))$. А потому достаточно доказать утверждение только для графов, в которых все исходящие степени равны 1.

Рассмотрим для начала ситуацию, когда в таком графе есть цикл, не проходящий через корень. Очевидно, что в таком случае в корень дерева не ведёт ни одно ребро из цикла, а потому количество остовных деревьев равно 0. Покажем, что определитель матрицы $L^-_{i,i}$ тогда равен нулю.

Для этого рассмотрим строки, соответствующие вершинам цикла. И заметим, что в сумме они дают ноль. А значит, $\det(L^-_{i,i}) = 0$.

Иначе, если в графе и есть цикл, то он обязательно проходит через корень, что нас устраивает (т.к. из любой вершины всё равно попадём в корень, да и на вид самой матрицы $L^-_{i,i}$ это не влияет). В частности, тогда будет существовать всего одно дерево. Осталось показать, что в этом случае $\det(L^-_{i,i}) = 1$.

Для этого рассмотрим в нашем дереве произвольный лист и соответствующий ему столбец. В этом столбце будет находится всего один ненулевой элемент — единица на главной диагонали. А потому, раскладывая определитель по этому столбцу, перейдём к аналогичной задаче и дереву без листа. Сам определитель при этом будет домножен на 1, а потому не изменится.

Получим, что определитель всего дерева равен 1, что и требовалось. □

Замечание.

Пусть G — произвольный неориентированный граф, а D — граф, полученный из G ориентацией рёбер в обе стороны (путём их удвоения).

Тогда $t(G) = t^-(D, x) = t^+(D, x) \quad \forall x \in V(D)$.

2. Специальные циклы в графах

2.1. Эйлеровы циклы

***Определение* 2.1.1.** Эйлеровым путем в произвольном графе (не обязательно простом) называется путь, который проходит через *каждое* ребро графа ровно один раз. Эйлеров путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине, называется эйлеровым циклом.

***Определение* 2.1.2.** Любой граф, в котором существует эйлеров цикл, называется эйлеровым графом. Граф, в котором существует эйлеров путь, называется полуэйлеровым.

***Определение* 2.1.3.** Граф называется четным, если любая его вершина имеет четную степень.

Теорема 2.1.1 (критерий эйлеровости графа)**.** Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он четный и содержит не более одной нетривиальной компоненты.

Доказательство.
"$\Longrightarrow$"

Предположим, в графе есть эйлеров цикл.

Будем двигаться вдоль него, тогда мы посетим каждое ребро ровно один раз. Следовательно, войдя в произвольную вершину по одному ребру, мы выйдем из нее по другому, а значит, количество входов в вершину совпадает с количеством выходов из нее, т.е. ее степень четная.

Также, если бы было бы хотя бы две нетривиальные компоненты связности, то существовали бы два ребра, лежащие в разных компонентах, но тогда не бы не существовало цикла, содержащего оба этих ребра, т.е. не существовало бы и эйлерова цикла, противоречие.

"$\Longleftarrow$"

Рассмотрим нетривиальную компоненту связности.

Выберем в ней произвольную вершину x и начнем обходить граф, выходя из текущей вершины (изначально, мы находимся в x) по произвольному еще не посещенному ребру. Т.к. степень каждой вершины четная, то мы сможем продолжать эту процедуру до тех пор, пока снова не попадем в x. Тогда мы получили некоторый цикл C_1.

Если в него попали все ребра, то мы уже победили.

Иначе (в силу связности) существует ребро $e = \{x, y\}$, т.ч. вершина x лежит на цикле, а само ребро при этом в цикл не входит. Тогда можем выкинуть цикл C_1 из графа и повторить процесс из вершины x, получив цикл C_2. Понятно, что $C_1 \sqcup C_2$ — также цикл.

Повторяя так, пока существуют не посещённые рёбра, построим эйлеров цикл. Процесс конечный, так как количество ребер в построенном цикле строго возрастает. □

Следствие. Связный граф имеет эйлеров путь, начинающийся в вершине x и заканчивающийся в вершине y, тогда и только тогда, когда степени вершин x и y нечетные, а степени остальных вершин являются четными.

Доказательство. Добавим к графу ребро, соединяющее x и y. В нем есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда в исходном графе есть эйлеров путь, начинающийся в x и заканчивающийся в y. Из чего получаем требуемое. □

Обобщим полученные результаты на случай ориентированных графов.

Теорема 2.1.2. Орграф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{indeg}(x) = \operatorname{outdeg}(x) \quad \forall x \in V(G),$$

а соответствующий G underlying graph D, т.е. граф полученный удалением в G ориентации ребер, имеет не более, чем одну нетривиальную компоненту связности.

Доказательство. Доказательство практически аналогично доказательству теоремы Эйлера для неориентированных графов.

Существование: опять берется замкнутый путь C_1, полученный из обхода, начавшегося в вершине x, рассматривается ребро $e \notin C_1$, которое лежит в той же компоненте связности D, что и C_1, рассматривается кратчайший путь между ними (в D), находится ребро либо ведущее извне C_1 в C_1, либо наоборот. Далее выбираем его конец, лежащий в C_1, строим C_2 и рассматриваем $C_1 \sqcup C_2$. Повторяем, пока не получим эйлеров цикл.

Необходимость условия совсем аналогична. □

Теорема 2.1.3 (BEST theorem)**.** Количество $e(D)$ эйлеровых циклов в орграфе D рассчитывается по формуле

$$e(D) = t^{-}(D, x) \cdot \prod_{y \in D} (\operatorname{outdeg}(y) - 1)!,$$

где x – произвольная вершина орграфа D, $t^{-}(D, x)$ – количество корневых остовных деревьев, все ребра которых направлены к корню в вершине x.

Доказательство. Зафиксируем произвольную вершину x в орграфе D и ребро $e = (x, \_)$, являющееся стартовым ребром для произвольного эйлерова цикла.

Для начала, покажем как по эйлерову циклу получить корневое остовное дерево с корнем в вершине x. Эйлеров цикл задает некий порядок на ребрах (иными словами, пронумеруем ребра от $e_1 = e$ до $e_{|E|}$ в порядке его обхода с началом в вершине x). Для каждой вершины $y \neq x$, выберем исходящее из нее ребро с наибольшем номером. Покажем, что порожденный этими ребрами орграф образует корневое остовное дерево с корнем в вершине x. Покажем, что в нем нет циклов. От противного. Рассмотрим полученный цикл, в нем мы вышли из некой вершины z и вернулись в нее по ребру с большим номером (причем, $z \neq x$, из нее мы выйти не можем). Но тогда в порядке обхода эйлерова цикла за ребром e_i, по которому мы в нее вернулись, следует ребро e_{i+1}, также исходящее из z. Но тогда мы должны были выбрать его. Противоречие. Так как у нас получился граф, в котором лежат все n вершин (последнее ребро точно было выбрано, и оно ведет в x) и есть $n - 1$ ребро. Понятно, что это ровно такое остовное дерево, как и было описано.

Рассмотрим теперь произвольное вышеописанное остовное дерево T. Хотим понять, сколько различных эйлеров циклов мы можем из него получить (т.е. таких циклов, которые будут образовать это дерево после применения вышеописанной операции). Пронумеруем (с повторениями) все ребра орграфа следующим образом. e мы сопоставим номер 1, оставшимся $\operatorname{outdeg}(x)-1$ ребрам произвольным образом назначим $(\operatorname{outdeg}(x)-1)!$ способами произвольные номера из множества $\{2, \ldots, \operatorname{outdeg}(x)\}$. Для остальных вершин $z \neq x$ мы сопоставим номер $\operatorname{outdeg}(z)$ ребру, исходящему из z, лежащему в остовном дереве, а остальным назначим $(\operatorname{outdeg}(z) - 1)!$ способами произвольные номера из множества $\{1, \ldots, \operatorname{outdeg}(z) - 1\}$. Получим $d := \prod\limits_{z \in D} (outdeg(z) - 1)!$ способов пронумеровать ребра орграфа D. Для того, чтобы получить по данной нумерации эйлеров цикл, нужно обойти граф, начиная с x, исходя каждый раз по еще не посещенному ребру с наименьшим индексом. Мы всегда сможем выйти из вершины, если только это не вершина x, в которую мы пришли по ребру с наибольшим индексом. Чтобы показать, что были посещены все ребра заметим, что по построению были пройдены все исходящие из x ребра, то же самое верно для вершин, достижимых по этим ребрам, т.е. вершинам, находящимся на расстоянии один и т.д. по индукции.

Таким образом каждому эйлерову циклу соответствует такое остовное дерево, причем каждому остовному дереву сопоставили ровно d циклов. Тем самым, теорема доказана. $\square$

Следствие. Количество $t^{-}(D, x)$ корневых остовных деревьев в эйлеровом орграфе D не зависит от выбора корня, то есть вершины x.

Доказательство. Очевидно исходя из равенства вышеописанного выражения при разных вершинах x. $\square$

***Определение* 2.1.4.** Задача о последовательностях де Брейна: найти наименьшую циклическую последовательность (циклическое слово) над алфавитом из n букв, содержащую все возможные подстроки длины k (их иногда называют k-мерами).

Алгоритм. Берем в качестве вершин всевозможные строки длины $(k-1)$, их будет n^{k-1}. Свяжем их, если существует строка длины k, суффиксом которой является вторая вершина, а префиксом – первая. На каждом ребре напишем соответствующею строку длины k, она, очевидно, уникальная. Заметим, что в каждую вершину входят ровно n ребер (можно приписать один из n символов слева) и выходят тоже ровно n рёбер (можно приписать один из n символов справа). Граф, сильносвязен, т.к. можно последовательно переделать одну строку в другую. Значит в нем есть эйлеров цикл. Не сложно видеть, что если выписать последовательность, содержащуюся на некотором ребре, а затем приписывать последний символ последовательностей, написанных на ребрах в порядке обхода эйлерова цикла, то получится искомая последовательность. Она называется последовательностью де Брейна и обозначается $B(n, k)$.

Замечание. Де Брейн показал, что число таких последовательностей равно $\frac{(n!)^{n^{k-1}}}{n^k}$.

2.2. Гамильтоновы циклы

***Определение* 2.2.1. Гамильтоновы циклы** – простые циклы, проходящие через каждую вершину графа.

***Определение* 2.2.2. Задача о коммивояжере** – обойти все города, заходя в каждый только один раз, и вернуться в исходный город.

Следствие. Наличие петель и мультиребер на существование гамильтонова цикла не влияет.

Утверждение 2.2.1. Необходимым условиями существования гамильтонова цикла в графе G является связность этого графа, а также отсутствие в нем вершин степени 1.

Утверждение 2.2.2. Пусть в графе G имеется гамильтонов цикл. Тогда количество $k := c(G-S)$ компонент связности $U_1, \dots, U_k$, получающихся в результате удаления вершин некоторого непустого подмножества $S \subset V(G)$ графа G, не превосходит количества удаленных вершин: $c(G-S) \leq |S|$.

Доказательство. Начнем обходить вершины по циклу начиная из U_1, Чтобы попасть из одной компоненты в другую, нам надо выйти из нее, пройдя при этом вершину из S. Но таким образом мы из каждой компоненты должы выйти хотя бы по разу, каждый раз посещая новую вершину S, из чего следует неравенство. □

Утверждение 2.2.3. Пусть в простом графе G имеется гамильтонов путь $P = x_1, \dots, x_n, n > 2$, соединяющий пару несмежных вершин x_1 и x_n. Достаточным условием существования гамильтонова цикла в таком графе является выполнение следующего неравенства: $deg(x_1) + deg(x_n) \geq n$.

Доказательство. Пусть $deg(x_1) = l$. Тогда для любых l вершин, отличных от x_n, среди них найдется смежная с x_n. Действительно, в противном случае $deg(x_1) \leq n-1-l$, что противоречит условию на сумму степеней. Теперь рассмотрим l вершин смежных с $x_1 : \{x_{k_1} \dots x_{k_l}\}$ и посмотрим на $\{x_{k_1-1} \dots x_{k_l-1}\}$. Среди них есть смежная с x_n: x_i, и x_1 смежно с x_{i+1}. Тогда рассмотрим путь $\{x_1, x_2, \dots x_i, x_n, x_{n-1} \dots x_{i+1}, x_1\}$, что и требовалось. □

Следствие. Пусть $P = x_1, \dots, x_k, k > 2$, есть наибольший по включению простой путь в графе G. Тогда этот путь можно превратить в простой цикл C либо в случае, когда концы пути P – вершины x_1 и x_k — являются смежными, либо в случае, когда сумма степеней этих вершин больше или равна k: $deg(x_1) + deg(x_k) \geq k$.

Доказательство. Если смежны, добавим ребро. Если нет, то все ребра концевых вершин идут в вершины пути, иначе можно удлинить его. Остается рассмотреть граф индуцируемый вершинами пути, где он станет гамильтоновым, и применить предыдущее утверждение. □

Теорема 2.2.4 (Оре)**.** Пусть G — простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любых двух несмежных вершин x,y графа G выполняется условие $deg(x) + deg(y) \geq n-1$, то граф G имеет гамильтонов путь.

Доказательство. Сразу заметим, что граф связен и для любых несмежных вершин у них есть общий сосед($n-1$ ребро на $n-2$ вершины). Теперь предположим, что гамильтонова пути нет, тогда рассмотрим максимальный путь из $k < n$ вершин. По предыдущей лемме дополним его до цикла(длина пути хотя бы 2, значит вершин хотя бы 3 и $n-1 \geq k$). Существует вершина вне цикла(иначе путь был гамильтонов), смежная с ним(иначе граф не связен). Тогда путь можно сделать больше(?!). □

Утверждение 2.2.5. Пусть G – граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любой пары несмежных вершин выполняется условие $deg(x) + deg(y) \geq n$, то в графе G имеется гамильтонов цикл.

Доказательство. Есть путь по теореме Оре, а по следствию про гамильтонов путь и сумму вершин есть и цикл. □

Теорема 2.2.6 (Дирак)**.** Пусть G – простой граф на $n > 2$ вершинах. Если степень каждой из его вершин больше или равна $\frac{n-1}{2}$, то в графе существует гамильтонов путь, а если больше или равна $\frac{n}{2}$ – то в нем существует и гамильтонов цикл.

Доказательство. Очевидно следует из Оре. □

Утверждение 2.2.7. Пусть G есть простой граф, в котором существует пара несмежных между собой вершин x, y, суммарная степень которых больше или равна n. Тогда в G существует гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда он существует в графе $G + \{x, y\}$.

Доказательство. $'' \Rightarrow''$ Есть в G, значит в $G + \{x, y\}$ тем более есть. Обратно. Возьмем цикл и выкинем ребро $\{x, y\}$. Получим путь. Но его можно превратить в цикл по доказанному перед теоремой Оре утверждению. □

***Определение* 2.2.3.** **Замыканием** $C(G)$ графа G называется граф, полученный из G последовательным соединением в нем ребрами пар несмежных между собой вершин, суммарные степени которых больше или равны n, до тех пор, пока ни одной такой пары в графе не останется.

Замечание. Граф $C(G)$, полученный в результате процедуры замыкания графа G, не зависит от порядка выбора ребер, соединяющих несмежные вершины в графе G.

Доказательство. Действительно, пусть замыкания G_1 и G_2 получены соответственно добавлением наборов $e_1 \dots e_m$ и $f_1 \dots f_s$ и не равны. Тогда путь $e_k = \{x, y\}$ это первое ребро, не вошедшее в G_2. Рассмотрим $H = G + \{e_1 \dots e_{k-1}\}$. Тогда это и подграф G_2 и для обоих графов $deg(x) + deg(y) \geq n$ (так как хотели добавить это ребро к H). Но тогда, раз это условие верно для G_2, этого ребра не может там не быть. Противоречие. □

Теорема 2.2.8 (Bondy-Chvatal, 1976)**.** Простой граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание $C(G)$ является гамильтоновым графом.

Доказательство. Очевидная индукция по утверждению с добавлением ребра. ($G \Leftrightarrow G+\{x, y\} \dots \Leftrightarrow C(G)$). □

Утверждение 2.2.9. Если $C(G) = K_n$, то граф G является гамильтоновым.

Доказательство. Очевидно из предыдущего. □

Теорема 2.2.10 (Chvatal, 1972)**.** Пусть G есть простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах, последовательность $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ степеней вершин которого удовлетворяет следующему условию: $\forall i < \frac{n}{2}$ либо $d_i > i$, либо $d_{n-i} \geq n - i$. Тогда в G существует гамильтонов цикл.

Доказательство. Покажем, что замыкание есть полный граф. Пусть нет, тогда рассмотрим пару несмежных вершин x, y с максимальной суммарной степенью s. $s < n$, иначе бы добавили в замыкание. Пусть $deg(x) = i \leq deg(y)$, тогда $deg(y) < n - i$ и $i < \frac{n}{2}$.
Теперь, для любой вершины v, несмежной с x, $deg(v) \leq deg(y) < n - i$. Так как $deg(x) = i$, то существует $n - 1 - i$ таких вершин, а еще она сама имеет степень, меньшую $n - i$. Значит в замыкании мы нашли $n - i$ вершину со степенью меньше $n - i$. Аналогично для всех не-соседей

y: $deg(u) \leq deg(x) = i$. Таковых хотя бы i, т.к. $deg(y) \leq n - 1 - i$ и их степени не более i. Наконец, G это остовный подграф своего замыкания, и для него тем более верно все вышесказанное, так как степени стали только меньше. Но тогда первые i элементов степенной последовательности точно не более i, так как мы столько предъявили, и первые $n - i$ имеею степень меньше $n - i$, мы их тоже предъявили. А значит, мы нашли плохое i. Противоречие. □

Теорема 2.2.11 (Дирак для орграфов)**.** Пусть D есть сильно связный орграф, исходящая и входящая степени любой вершины x в котором больше или равна $\frac{n}{2}$. Тогда в D существует гамильтонов цикл.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 2.2.12 (Redei, 1934)**.** В любом турнире T существует ориентированный гамильтонов путь.

Доказательство. Индукция по числу вершин. Для одной вершины очевидно. Пусть вершин n. Рассмотрим произвольную вершину x. На оставишихся построим гамильтонов путь. Дальше 3 ситуации:
1) Из всех вершин ребра идут в x. Тогда просто продлим путь из последней вершины имеющегося пути в нее.
2) Из x есть ребро в начало пути, тогда прицепим ее.
3) Ребро идет из начала пути в x, а из него идет ребро в какую-то x_i. Рассмотри первую такую x_i(тогда из предыдущей идет ребро в x), тогда перестроим путь: В ребро $(x_{i-1}; x_i)$ воткнем x. □

3. Линейные пространсва в графах

3.1. Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы

***Определение* 3.1.1** (Кодерево $\overline{T}$)**.** Граф, образованный ребрами графа G, не вошедшими в некоторое его остовное дерево T.

***Определение* 3.1.2** (Хорда остовного дерева T)**.** Ребро кодерева $\overline{T}$.

***Определение* 3.1.3** (Фундаментальный цикл C_e)**.** Цикл, появившийся при добавлении ребра e кодерева к остовному дереву T.

***Определение* 3.1.4** (Цикловый ранг $\gamma(G)$)**.** Количество фундаментальных циклов.

Замечание. $\gamma(G)$ не зависит от выбора остовного дерева и равно $m - n + 1$.

Замечание. По построению порождающее C_{e_i} ребро e_i не входит в другие фундаментальные циклы. Поэтому набор фундаментальных циклов C_{e_i} образует базис некоторого линейного пространства.

***Определение* 3.1.5** (Скалярное произведение)**.** Скалярным произведением S и Q называется элемент поля F_2, рассчитывающийся по формуле: $(S, Q) := s_1q_1 + \ldots + s_mq_m$, где $s_i, q_i \in \{0, 1\}$ есть коэффициенты в разложении подмножеств S и Q по стандартному базису.

Замечание. Два элемента S и Q ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда они пересекаются по четному числу ребер.

***Определение* 3.1.6** (Декомпозиция графа)**.** Декомпозицией графа G называется семейство H попарно реберно непересекающихся подграфов $H_1, \ldots, H_k$ графа G, объединение которых дает весь граф G.

Замечание. В любом графе G всегда существует т. н. тривиальная декомпозиция, у которой любое подмножество H_i состоит из одиночного ребра $e_i \in E(G)$.

***Определение* 3.1.7** (H-декомпозиция графа)**.** Если каждый из подграфов H_i изоморфен одному и тому же подграфу H, то такая декомпозиция называется H-декомпозицией графа G.

***Определение* 3.1.8** (Гамильтонова декомпозиция)**.** Если каждый из подграфов H_i представляет собой гамильтонов цикл в графе G, то такая декомпозиция графа G называется гамильтоновой.

Теорема 3.1.1 (Веблена (Veblen, 1912))**.** Граф G допускает декомпозицию на циклы тогда и только тогда, когда G четный.

Доказательство. Нам надо доказать, что четный граф можно разложить на циклы. Докажем индукцией по числу ребер.

Если граф пустой, то он раскладывается на пустое множество циклов.

Если G – непустой четный граф, то рассмотрим его подграф H, индуцированный вершинами графа G с положительными четными степенями. Так как степень любой вершины этого подграфа $\geqslant 2$, то он содержит цикл C.

Рассмотрим в графе G остовный подграф G_0, полученный удалением ребер цикла C. В нем меньше рёбер, и он четный, поэтому его можно разложить на циклы. Значит G раскладывается на те же циклы плюс цикл C. □

Замечание. В случае связного графа G теорему Веблена можно переформулировать так: граф G представляет собой объединение реберно непересекающихся простых циклов тогда и только тогда, когда он эйлеров.

Утверждение 3.1.2. Симметрическая разность двух четных подграфов H_1 и H_2 есть снова четный подграф.

Доказательство. Если H_1 и H_2 несвязны, то их симметрическая разность – это объедиение двух несвязных подграфов, то есть чётный граф.

Иначе для любой общей вершины этих подграфов x посчитаем число инцидентных ей рёбер. Пусть из H_1 ей инцидентно множество рёбер S_1, а из H_2 – множество S_2, тогда в графе $H_1 \triangle H_2$ ей инцидентно множество $S_1 \triangle S_2$. $|S_1 \triangle S_2| = |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2|$, то есть степень вершины чётная, так как $|S_1|$ и $|S_2|$ чётные. □

Следствие. Множество четных подграфов замкнуто относительно операции $\triangle$, то есть образует в E линейное подпространство $\mathcal{C}$.

Замечание. $\mathcal{C}$ порождается всеми циклами графа G и называется пространством циклов графа G.

Утверждение 3.1.3. Фундаментальные циклы образуют базис пространства C.

Доказательство. Достаточно показать, что любой элемент $C \in \mathcal{C}$ представим в виде линейной комбинации фундаментальных циклов.

TODO □

***Определение* 3.1.9** (Реберно разделяющее множество F)**.** Подмножество $F \subset E(G)$ называется реберно разделяющим множеством связного графа G, если после удаления всех ребер из F граф $G - F$ перестает быть связным.

***Определение* 3.1.10** (Реберный разрез)**.** Пусть S есть некоторое подмножество множества вершин $V(G)$ графа, а $\overline{S} = V(G) \setminus S$. Набор ребер $[S, \overline{S}]$ называется реберным разрезом графа G, связанным с подмножеством S. Иногда он также называется кограницей S и обозначается через $\partial(S)$.

***Определение* 3.1.11** (Минимальный реберный разрез)**.** Реберный разрез называется минимальным (bond), если он представляет собой непустой реберный разрез, любое собственное подмножество которого не является реберным разрезом.

Теорема 3.1.4. В любом связном графе G любой непустой реберный разрез $\partial(S)$ является минимальным тогда и только тогда, когда граф $G - \partial(S)$ имеет в точности две связные компоненты.

Доказательство. Если $G - \partial(S)$ содержит две компоненты G_1 и G_2, то рёберный разрез $F := G - \partial(S)$, по определению содержит в точности рёбра, соединяющие эти две компоненты. Для любого собственного подмножества $F' \subset F$ граф $G - F'$ содержит в качестве подграфов эти две компоненты, а также ещё хотя бы одно ребро между ними, значит $G - F'$ – связный, то есть $\partial(S)$ – минимальный.

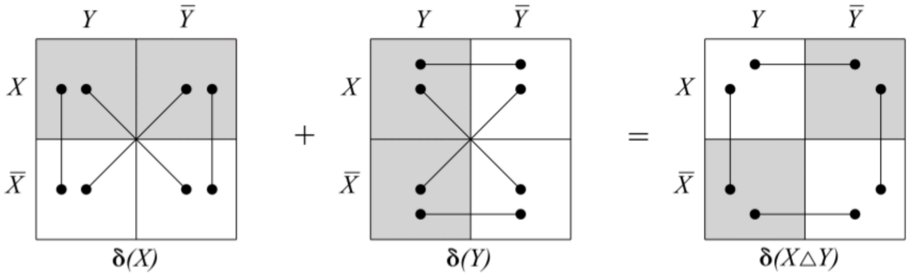
Если граф $G - \partial(S)$ содержит более двух связных компонент, то либо подграф H, индуцированный S, либо подграф $\overline{H}$, индуцированный $\overline{S}$ содержит хотя бы две связные компоненты. Для определенности скажем, что это H. Тогда $S = A \cup B$, причем между A и B нет рёбер, тогда $[A, \overline{A}]$ – собственное подмножество $\partial(S)$, значит $\partial(S)$ – не минимальный. □

Утверждение 3.1.5. Любой реберный разрез $[S, \overline{S}]$ в связном графе G есть объединение нескольких попарно реберно непересекающихся минимальных реберных разрезов.

Доказательство. Рассмотрим связные компоненты S, и в качестве минимальных разрезов возьмём рёбра между этими компонентами и их дополнениями. □

Утверждение 3.1.6. Симметрическая разность двух различных реберных разрезов есть снова реберный разрез, причем $\partial(X)\triangle\partial(Y) = \partial(X\triangle Y)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, достаточно доказать равенство $\partial(X)\triangle\partial(Y) = \partial(X\triangle Y)$. На картинке отображены все интересующие нас множества рёбер, а из них уже хорошо видно их симметрическую разность.



□

Следствие. Множество всех реберных разрезов вместе с операцией $\triangle$ образует в линейном пространстве E всех подмножеств множества $E(G)$ ребер графа G линейное подпространство $\mathcal{B}$, называемое линейным пространством реберных разрезов графа G.

***Определение* 3.1.12** (Фундаментальный разрез)**.** Пусть T – произвольное остовное дерево связного графа G. Удаление любого ребра e этого дерева разбивает все множество вершин дерева T на два блока X и Y. Фундаментальный разрез – минимальный реберный разрез $\partial_e := \partial(X)$, связывающий в исходном графе G вершины из блоков X и Y.

Замечание. Набор фундаментальных разрезов графа G образует базис пространства $\mathcal{B}$.

Утверждение 3.1.7. Остовный подграф C графа G принадлежит пространству $\mathcal{C}$ циклов тогда и только тогда, когда у него имеется четное число общих ребер с любым элементом B пространства $\mathcal{B}$ разрезов. Обратно, остовный подграф B принадлежит $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда он пересекается с любым элементом $C \in \mathcal{C}$ по четному количеству ребер.

Доказательство.

1. Необходимость

Любой цикл C графа G пересекается с любым минимальным рёберным разрезом $\partial(X)$ по чётному числу рёбер.

Зафиксируем вершину x цикла C и для определенности предположим, что $x \in X$. Пойдём по циклу, начиная от вершины x, пока снова в неё не вернёмся. Каждый раз, когда мы выходим из множества X и заходим в него мы проходим по рёбрам разреза $\partial(X)$, но так как, в итоге, мы вернулись в множество X, то мы перешли по чётному числу рёбер из разреза, значит $|E(C)\cap\partial(X)|$ – чётное число. Но любой элемент $\mathcal{C}$ есть объединение попарно реберно непересекающихся циклов (теорема Веблена), а любой элемент $\mathcal{B}$ — объединение попарно непересекающихся минимальных реберных разрезов (Утверждение 3.1.5), значит необходимость доказана

2. Достаточность

Будем считать, что граф связный, потому что если это не так, то можно рассмотреть отдельно для каждой компоненты.

Пусть некоторый остовный подграф C, который пересекается по четному числу рёбер с любым элементом из $\mathcal{B}$, не содержится в $\mathcal{C}$. Зафиксируем остовное дерево $T(G)$ графа G и обозначим за $e_1, e_2, \ldots, e_k$ рёбра C, не принадлежащие $T(G)$. Тогда рассмотрим остовный подграф $\tilde{C} = C_{e_1} \triangle C_{e_2} \triangle \ldots \triangle C_{e_k}$ (C_{e_i} – фундаментальный цикл, отвечающий ребру e_i). Мы знаем, что $C \triangle \tilde{C}$ не содержит рёбер кодерева $\overline{T}$.

Пусть e – ребро T, принадлежащее $C \triangle \tilde{C}$. Рассмотрим фундаментальный разрез ∂_e, порожденный этим ребром, тогда все остальные рёбра этого разреза лежат в $\overline{T}$, то есть $C \triangle \tilde{C}$ пересекается с этим разрезом по единственному ребру, но $\tilde{C}$ пересекается с ним по чётному числу рёбер, так как лежит в $\mathcal{C}$, а C тоже по чётному числу по условию, значит $C \triangle \tilde{C}$ тоже должно пересекаться по четному числу с ∂_e, а оно только по одному, получили противоречие.

Значит рёбра $C \triangle \tilde{C}$ не содержатся в T, значит $C \triangle \tilde{C}$ пустое, то есть $C = \tilde{C}$, что противоречит предположению о том, что $C \notin \mathcal{C}$.

Аналогично доказывается, что и любой подграф, пересекающийся с любым элементом из $\mathcal{C}$ по четному числу ребер, принадлежит подпространству $\mathcal{B}$.

$\square$

Следствие. Пространство циклов $\mathcal{C}$ и пространство реберных разрезов $\mathcal{B}$ ортогональны друг другу.

Замечание. $|\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = (n - k) + (m - n + k) = m = |E|$

***Определение* 3.1.13** (Числа Бетти)**.** β_0 – количество компонент связности графа G, $\beta_1 = |\mathcal{C}|$. $n - m = \beta_0 - \beta_1$

4. Циркуляции и напряжения. Электрические сети.

4.1. Циркуляции и напряжения.

***Определение* 4.1.1.** Взвешенным орграфом (D, f) называется орграф D вместе с функцией $f : E(D) \to \mathbb{F}$, заданной на множестве ребер орграфа D и принимающей значения из некоторого поля $\mathbb{F}$. Значение $f(e)$ этой функции на ребре e называется весом ребра e, а сумма значений этой функции для ребер из некоторого подграфа H орграфа D называется весом соответствующего подграфа H.

***Определение* 4.1.2.** Функция f, заданная на ребрах орграфа D, называется циркуляцией в орграфе D, если в каждой вершине x соответствующего взвешенного орграфа (D, f) выполняются следующие законы сохранения:

$$f^+(x) = f^-(x) \qquad \text{для любой вершины } x \in V(D).$$

Здесь $f^+(x)$ есть сумма весов ребер орграфа, входящих в вершину x, а $f^-(x)$ — сумма весов исходящих из x ребер.

Замечание. Это условие можно переписать в виде $\mathbf{M_i} \cdot \mathbf{f} = 0$, где $\mathbf{M_i}$ – матрица инцидентности.

Доказательство. Произведение любой строки матрицы $\mathbf{M_i}$ на столбец $\mathbf{f}$ даст нам сумму $f(e_i)$ по всем ребрам, инцидентным соответствующей данной строке вершине x орграфа D. При этом значения f на ребрах, входящих в x, войдут в эту сумму со знаком минус, а значения f на ребрах, исходящих из x – со знаком плюс. □

Рассмотрим наряду с ориентированным графом D соответствующий ему неориентированный (underlying) граф G. Оказывается, с любым циклом C в графе G мы можем связать некоторую циркуляцию. Именно, зададим какое-то направление обхода цикла C и определим функцию f_C на множестве ребер орграфа D следующим образом:

$$f_C(e) = \begin{cases} 1, \text{если направление вектора } e \text{ совпадает с направлением обхода цикла } C, \\ -1, \text{если } e \text{ направлен в сторону, противоположную направлению обхода } C, \\ 0, \text{если } e \text{ не принадлежит циклу } C. \end{cases}$$

***Определение* 4.1.3.** Носителем функции f называется подмножество S элементов области определения f, на котором эта функция отлична от нуля:

$$S = \{x | f(x) \neq 0\}$$

Лемма. Остовный подграф H, индуцированный носителем S отличной от нуля циркуляции $\mathbf{f}$ в орграфе D, содержит хотя бы один цикл.

Доказательство. Так как $\mathbf{f}$ – это отличная от нуля циркуляция, то в любую вершину x подграфа H входит хотя бы одно ребро орграфа D, и хотя бы одно ребро из нее выходит. Следовательно, степень любой вершины x в подграфе H обязана быть больше или равной двум. Как следствие, подмножество S ребер содержит хотя бы один цикл C. □

Утверждение 4.1.1. Любая циркуляция в орграфе D представляет собой линейную комбинацию циркуляций, связанных с циклами.

Доказательство. Рассмотрим произвольную циркуляцию f с носителем S. Будем доказывать данное утверждение индукцией по |S|. Случай $S = \varnothing$ тривиален. Пусть теперь $|S| > 0$. Согласно предыдущей лемме, подмножество S ребер содержит хотя бы один цикл C. Рассмотрим произвольное ребро $e \in C$, выберем направление обхода C, совпадающее с ориентацией ребра e, и построим на C циркуляцию $\mathbf{f_C}$. Тогда у циркуляции $\mathbf{f'} := \mathbf{f} - f(e) \cdot \mathbf{f_C}$ мощность подмножества S' ребер, на которых f' отлична от нуля, будет хотя бы на единицу меньше мощности подмножества S. По индуционному предположению, f' можно представить в виде линейной комбинации циркуляций, связанных с циклами в графе G. Следовательно, то же утверждение верно и для циркуляции $\mathbf{f} = \mathbf{f'} + f(e) \cdot \mathbf{f_C}$ □

Мы уже знаем, что любой цикл графа G порождает в орграфе D некоторую циркуляцию $\mathbf{f_C}$. Аналогично, любой минимальный реберный разрез $\partial(X) =: B$ графа G, связанный с подмножеством вершин X, порождает в орграфе D вектор $\mathbf{g_B}$ с координатами

$$g_B(e) = \begin{cases} 1, \text{если } e \in \partial^+(X), \text{то есть если ребро е исходит из X,} \\ -1, \text{если } e \in \partial^-(X), \text{то есть если ребро е входит в X,} \\ 0, \text{если } e \text{ не принадлежит разрезу } \partial(X). \end{cases}$$

Лемма. Носитель S любого отличного от нуля напряжения $\mathbf{g}$ в орграфе содержит хотя бы один минимальный реберный разрез $B = \partial(X)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M_i}$ есть напряжение, для которого $S \neq \varnothing$. Выделим произвольное ребро $(x, y) \in S$, возьмем в качестве X подмножество вершин, потенциалы которых совпадают с $p(x)$, и рассмотрим реберный разрез $\partial(X)$. По построению множества X, напряжение $g(e)$ на любом ребре e, принадлежащем разрезу $\partial(X)$, отлично от нуля. Так как S есть все множество ребер, на которых функция g отлична от нуля, то $\partial(X) \subseteq S$. Кроме того, $\partial(X) \neq \varnothing$ – это множество обязательно содержит ребро (x, y). Поэтому $\partial(X)$ есть нетривиальный реберный разрез. Но такой разрез либо сам является минимальным, либо содержит хотя бы один минимальный реберный разрез B. Отсюда следует, что и S содержит B. □

Утверждение 4.1.2. Любое напряжение $\mathbf{g}$ в орграфе представляет собой линейную комбинацию напряжений $\mathbf{g_B}$, связанных с минимальными реберными разрезами.

Доказательство. Аналогично доказательству соответствующего утверждения про циркуляции. □

Утверждение 4.1.3. Пространства $\mathcal{C}$ циркуляций и $\mathcal{B}$ напряжений взаимно ортогональны. При этом их пересечение состоит из единственного вектора 0 — тривиального цикла и тривиального разреза.

Доказательство. Покажем, что любая пара векторов $\mathbf{g} \in \mathcal{B}$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$ взаимно ортогональна. Действительно, согласно определению напряжения $\mathbf{g}$, любой такой вектор можно представить в виде $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M_i}$. Но произведение $\mathbf{M_i} \cdot \mathbf{f} = 0$ для любого вектора $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$. Следовательно, скалярное произведение $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M_i} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot 0 = 0$. □

Следствие. Размерности пространства $\mathcal{B}$ напряжений и $\mathcal{C}$ циркуляций орграфа D равны

$$dim(\mathcal{B}) = n - 1, \quad dim(\mathcal{C}) = m - n + 1,$$

а соответствующие фундаментальным разрезам и фундаментальным циклам графа G напряжения и циркуляции орграфа D образуют базисы пространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Доказательство. Действительно, мы в пространстве $\mathcal{B}$ предъявили $(n-1)$ линейно независимых векторов – напряжений, связанных с $(n-1)$-м фундаментальным разрезом орграфа D. Аналогично, в пространстве $\mathcal{C}$ мы предъявили $(m-(n-1))$ линейно независимых векторов – циркуляций, связанных с $(m-n+1)$-м фундаментальным циклом в этом орграфе. Следовательно, размерность пространства $\mathcal{B}$ больше или равна $(n-1)$, а размерность пространства $\mathcal{C}$ больше или равна $(m-(n-1))$. Но так как пространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ взаимно ортогональны, то сумма размерностей этих подпространств не может превосходить размерности m всего пространства строк длины m. Поэтому размерности подпространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ равны, соответственно, $(n-1)$ и $(m-(n-1))$, а описанные выше векторы образуют базисы в этих пространствах. При этом само пространство векторов длины m представляет собой прямую сумму подпространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. $\square$

4.2. Электрические сети.

Утверждение 4.2.1. Закон Ома в матричном виде:

$$\mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — диагональная матрица сопротивлений, $\mathbf{h}$ — вектор ЭДС, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ — векторы силы тока и напряжения в рассматриваемой электрической цепи.

Теорема 4.2.2 (*Первый закон Кирхгофа*)**.** Алгебраическая сумма токов в каждом узле электрической цепи равна нулю. На языке графов это означает, что $\mathbf{i}$ – циркуляция в орграфе D, моделирующем электрическую сеть.
В матричном виде:

$$\mathbf{M_i} \cdot \mathbf{i} = 0 \text{ либо } \mathbf{K} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

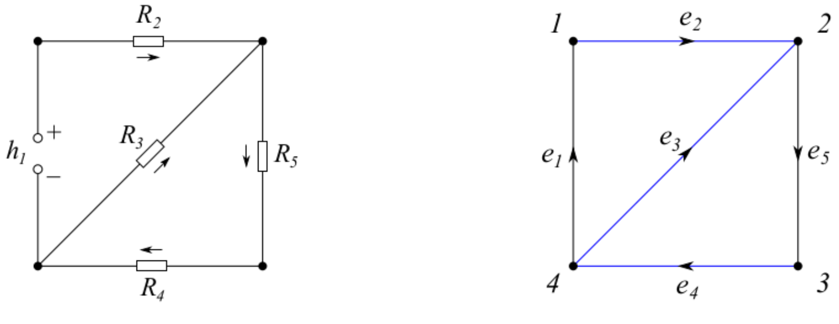
где $\mathbf{K}$ – матрица Кирхгофа – матрица полученная из $\mathbf{M_i}$ удалением одной любой строки.

Теорема 4.2.3 (*Второй закон Кирхгофа*)**.** Алгебраическая сумма падения напряжения на любом замкнутом контуре электрической цепи равна нулю.
В матричном виде:

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ где } \mathbf{C} = \left(\mathbf{f}_{e_1}\ \mathbf{f}_{e_2} \ldots \mathbf{f}_{e_{m-(n-1)}}\right)$$

Алгоритм нахождения токов и напряжений.

1) Строим матрицу $\mathbf{C}$. Пример:



(a) (b)

$$\mathbf{C}^T = \left[\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Первая строка матрицы $\mathbf{C}^T$ отвечает фундаментальному циклу, порожденному ребром e_1, а вторая — циклу, порожденному ребром e_5. Порядок обхода циклов совпадает с направлением порождающих их рёбер e_1 и e_5.

2) Ищем $\mathbf{i}_c$ – столбик токов на рёбрах, порождающих фундаментальные циклы, то есть на всех, кроме рёбер дерева.
$$(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i_c} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h}$$

3) Через $\mathbf{i_c}$ выражаются все токи.
$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i_c}$$

4) Выразим $\mathbf{u}$ из закона Ома.
$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} - \mathbf{h}$$

(в случае чего см. страницы 47-48 конспекта Омельченко)

Для обоснования алгоритма, нужно доказать равенство из пункта (2).

Доказательство. Для удобства представим марицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{K}$ в виде

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_t \\ E_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_t & K_c \end{bmatrix}$$

Так как любой цикл ортогонален любой строке матрицы $\mathbf{K}$, то

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{K_t} \cdot \mathbf{C_t} + \mathbf{K_c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C_t} = -\mathbf{K_t^{-1}} \cdot \mathbf{K_c}.$$

Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ тоже представим в виде

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_t \\ u_c \end{bmatrix}$$

Тогда из первого закона Кирхгофа $\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$ мы получаем следующие равенства:

$$\mathbf{K_t} \cdot \mathbf{i_t} + \mathbf{K_c} \cdot \mathbf{i_c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{i_t} = -\mathbf{K_t^{-1}} \cdot \mathbf{K_c} \cdot \mathbf{i_c} = \mathbf{C_t} \cdot \mathbf{i_c}.$$

Учитывая, что $\mathbf{i_c} = \mathbf{E_c} \cdot \mathbf{i_c}$, а также тот факт, что матрица $\mathbf{C}$ состоит из подматриц $\mathbf{C_t}$ и $\mathbf{E_c}$, мы последнее равенство можем записать так:

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i_c}.$$

Подставим теперь полученное выражение для $\mathbf{i}$ в закон Ома:

$$\mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i_c}.$$

Домножая это уравнение слева на $\mathbf{C}^T$ и учитывая второй закон Кирхгофа $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{u} = 0$, мы получаем то что и хотели:
$$(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i_c} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h}.$$

□

В заключение данного параграфа рассмотрим задачу квадрирования прямоугольников, т.е. нахождения разбиения заданного прямоугольника на конечное число попарно неравных между собой квадратов. Оказывается, задача построения такого разбиения напрямую связана с задачей построения токов и напряжений в электрической сети. Рассмотрим горизонтальные стороны квадратов. Сопоставим любой такой стороне вершину в строящемся орграфе D. Соединим две вершины x_i и x_j ребром $e = (x_i, x_j)$ в случае, если соответствующие этим вершинам горизонтальные стороны относятся к одному и тому же квадрату. Вершины x и y, отвечающие крайней верхней и крайней нижней сторонам, называются полюсами орграфа D. Веса на ребрах отвечают ширине соответствующего квадрата. Если теперь считать, что сопротивления каждого из участков цепи равны единице, то напряжения, равные токам, будут удовлетворять закону сохранения заряда в любой вершине, отличной от x и y. Добавляя к этому орграфу ребро (y, x) с весом, равным суммарной ширине прямоугольника, мы получаем электрическуюсеть, удовлетворяющую обоим законам Кирхгофа. При этом мы можем считать, что вес ребра (y, x) есть электродвижущая сила, приложенная к вершинам x и y орграфа D.

5. Связность в графах

5.1. Вершинная и рёберная связность графа.

***Определение* 5.1.1.** Граф G, построенный на n вершинах, называется рёберно k-связным, если он остается связным при удалении любого количества рёбер, строго меньшего k.

***Определение* 5.1.2.** Реберной связностью $\lambda(G)$ графа G называется минимальное количество рёбер, которое нужно удалить в графе G для того, чтобы он стал несвязным.

В случае несвязного графа или графа K_1 рёберная связность считается равной нулю.

***Определение* 5.1.3.** Вершинной связностью $\kappa(G)$ называется минимальное количество вершин $|S|$, $S \subset V(G)$, которое нужно удалить для того, чтобы граф $G - S$ стал несвязным или же содержал единственную вершину.

***Определение* 5.1.4.** Подмножество $S \subset V(G)$ называется вершинно разделяющим множеством или вершинным разрезом графа, если при удалении вершин из множества S граф $G - S$ становится несвязным.

Замечание. $\kappa(K_n) = n - 1$

***Определение* 5.1.5.** Граф G называется (вершинно) k-связным, если он построен на $n \geqslant (k+1)$ вершине, и при удалении любых вершин графа G в количестве, меньшем, чем k, граф остается связным.

Теорема 5.1.1. Обозначим через $\delta(G)$ минимальную из степеней вершин графа G. Для любого простого графа G справедливы неравенства $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

Доказательство. Правое неравенство тривиально. При удалении всех рёбер(если они были) вокруг вершины наименьшей степени граф станет несвязным.

Теперь левое. Если G несвязен или состоит из одной вершины, то по определению $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$. Если связен и имеет мост, то $\lambda(G) = 1$. Тогда либо $G = K_2$ и тогда $\kappa(G) = 1$, либо одина из инцидентных мосту вершин является точкой сочленения и $\kappa(G) = 1$.

Пусть теперь $\lambda(G) \geqslant 2$. Возьмём некоторый разрез, состоящий из $\lambda(G)$ рёбер. Удалим какое-то $\lambda(G)-1$ ребро. Останется граф с мостом $e = \{x, y\}$. Для каждого ребра из множества $\lambda(G)-1$ удаленных рёбер выберем по одной инцидентной ребру вершине, отличной от x и y. Удалим это выбранное множество вершин. Если исходный граф от удаления этих вершин стал несвязным, то $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) - 1$. Если нет, то у нас остался граф с мостом, в котором удаление одной из вершин приведёт либо к потере связности, либо к тривиальному графу K_1. В обоих случаях $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$. □

5.2. Двусвязные графы

***Определение* 5.2.1.** Два ребра называются похожими, если они либо совпадают, либо входят в один и тот же простой цикл.

Лемма. Отношение похожести в связном графе G является отношением эквивалентности.

Доказательство. (Лемма 7.2, стр. 54)

Проверяем свойства отношения эквивалентности:

1. Рефлексивность очевидна из определения.
2. Симметричность очевидна из определения.
3. Транзитивность надо проверить.

   Пусть $e_1 \sim e_2$, $e_2 \sim e_3$ (считаем, что все ребра различны). Тогда существует циклы C_1 и C_2 через пары e_1, e_2 и e_2, e_3.

   Рассмотрим ребро e_1 и пойдем от него по циклу C_1 в обе стороны, пока не встретим вершины x и y из цикла C_2. Заметим, что $x \neq y$, т.к. есть хотя-бы две вершины в пересечении $C_1 \cap C_2$. Вершины x и y разбивают цикл C_2 на два равных пути. Возьмем тот, на котором лежит ребро e_3. Получили искомый цикл.

□

***Определение* 5.2.2.** Множества, на которые отношение похожести разбивает все ребра, называются блоками.

Теорема 5.2.1. Пусть G — связный граф, построенный на $n \geqslant 3$ вершинах. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(1) граф G является двусвязным;

(2) любые два ребра этого графа принадлежат некоторому циклу C;

(3) для любых двух вершин графа G существует цикл C, проходящий через эти вершины.

Доказательство. (Теорема 7.3, стр. 55)

(1) $\Longrightarrow$ (2) Граф G — двусвязный.

Докажем, что любые два ребра, инцидентных одной вершине похожи. Рассмотрим ребра uv и vw. В графе $G - v$ существует путь из u в w, а значит этот путь, объединенный с ребрами uv и vw образует цикл через наши ребра, что и требовалось.

Осталось заметить, что раз граф связен, а отношение похожести является отношением эквивалентности, то любые два ребра похожи, что и требовалось.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Рассмотрим две вершины x и y и покажем, что существует проходящий через них цикл.

Т.к. $n \geqslant 3$, то существуют два **различных** ребра e_1 и e_2 инцидентных x и y соответственно. Тогда цикл, проходящий через e_1 и e_2 (такой существует из предположения) нам подойдет.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Нам нужно показать, что в графе G нет точек сочленения. Пусть не так, т.е. $x \in G$ — точка сочленения.

Тогда в графе $G - x$ есть хотя-бы две компоненты связности. Возьмем по вершине из двух из них. Получили y и z. Заметим, что так как в графе $G - x$ нет пути между y и z, то в исходном графе нет цикла. Противоречие.

□

Следствие. Каждый блок представляет собой либо мост (случай из теоремы, когда $n < 3$), либо максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

Блоки пересекаются по точкам сочленения.

***Определение* 5.2.3.** Дерево, полученное из исходного графа, посредством сопоставления каждой точке сочленения и каждому блоку новой вершины, а после проведением ребер между блоками и принадлежащими им точками сочленения называется деревом блоков и точек сочленения.

Замечание. Существует линейный от количества ребер алгоритм поиска точек сочленения (dfs).

Алгоритм. (7.2.1, стр 56)

Построим нормальное остовное дерево T графа G (dfs). Пусть его корень x_0. Тогда x_0 является точкой сочленения тогда и только тогда, когда у x_0 более одного потомка в дереве T (следует из нормальности дерева).

Внутренняя же вершина x является точкой сочленения тогда и только тогда, когда у x есть потомок y в дереве T, такой, что все обратные ребра из вершин поддерева T_y внутренними в дереве T_x.

Важно заметить, что это лишь основная идея алгоритма.

Для полноты алгоритма следует запоминать время вхождения в каждую вершину $k(v)$ и функцию $l(v)$, такую что $l(x_0) = k(x_0)$, а

$$l(x) = min \begin{cases} k(x), \\ l(y_i), \text{ где } y_i \text{ — непосредственные потомки вершины } x \text{ в дереве } T(G), \\ k(z_j), \text{ где } z_j \text{ — предки вершины } x \text{ в } T(G)\text{, соединенные с } x \text{ обратным ребром в } G \end{cases}$$

Тогда вершина $x \neq x_0$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда хотя бы для одного из ее потомков y_i значение $l(y_i)$ оказывается большим или равным номеру $k(x)$ вершины x. (для более строго доказательства см. преподавательский конспект, либо вспомнить доказательство с алгоритмов)

***Определение* 5.2.4.** Пусть H есть некоторый подграф графа G. Ручкой подграфа H в графе G называется простой путь P, концы которого принадлежат H, а все внутренние вершины нет.

***Определение* 5.2.5.** Разложением графа G на ручки называется последовательность $P_0, \ldots P_k$ подграфов графа G, такая, что P_0 представляет собой цикл, P_i для любого $i = 1, \ldots, k$ представляет собой ручку для подграфа $G_{i-1} = P_0 \cup \ldots \cup P_{i-1}$ графа G, а G_k совпадает с исходным графом G.

Утверждение 5.2.2. Граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда он допускает разложение G на ручки, начинающееся с произвольного цикла в этом графе.

Доказательство. (Утверждение 7.6, стр. 59)

Докажем, что если существует разложение то граф двусвязный. Индукция по количеству операций добавления ручки.

База для простого цикла верна (заодно заметим, что $|V(G)| \geqslant 3$). Сделаем переход.

Добавим к графу ручку, докажем, что двусвязность сохранилась. Пусть ручка соединяет вершины x и y. Разобъем процесс добавления ручки на две части. Проведение ребра xy, а затем, разбиение xy на несколько последовательных ребер.

Первая часть сохраняет двусвязость, т.к. от добавления ребра двусвязность не теряется, вторая же часть не влияет на двусвязность, т.к. инвариант наличия цикла через каждую пару ребер сохраняется (разбитое ребро в цикле заменяется на много ребер).

В другую сторону. Докажем, что для двусвязного графа существует разложение. Выделим произвольный цикл C и начнем построение с него. Пусть мы уже построили граф G_i, полученный добавлением i ручек. Если $G_i \neq G$, то существует $e \in G, e \notin G_i$. Пусть $e' \in G_i$. Из двусвязности графа G существует цикл через e и e'. Рассмотрим его.

Начнем двигаться по нему от ребра e в обе стороны, пока не найдем вершины из графа G_i. Эти вершины будут различны, т.к. на цикле лежит ребро e'. Проведем ручку между этими двумя вершинами, лежащую на найденном цикле. Рассмотрим новый граф G_{i+1} и продолжим алгоритм. □

Замечание. Любой вершинно двусвязный граф является реберно двусвязным графом.

***Определение* 5.2.6.** Цикл, имеющий с оставшейся частью графа только лишь одну общую точку называется замкнутой ручкой.

Замечание. Разложение реберно двусвязного графа на ручки и замкнутые ручки было оставлено в качестве упражнения.

***Определение* 5.2.7.** Разделением связного мультиграфа G называют такую декомпозицию G на два непустых связных подграфа G_1 и G_2, при которой у них имеется лишь одна общая вершина x. Сама эта общая вершина называется разделяющей вершиной графа G.

***Определение* 5.2.8.** Связный граф G называется неразделяемым, если в нем отсутствуют разделяющие вершины. В противном случае G называется разделяемым графом.

Утверждение 5.2.3 (Robbins, 1939)**.** Граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он является реберно двусвязным графом.

Замечание. Тоже упражнение с практики.

5.3. k-связные графы. Теорема Менгера. Теорема Уитни.

***Определение* 5.3.1.**

Пусть $X, Y \subset V(G)$. Путем между X и Y называется любой простой путь P, начальная вершина которого принадлежит множеству X, конечная — множеству Y, а все внутренние вершины не принадлежат ни множеству X, ни множеству Y.

Замечание.

Допустимо, что $X \cap Y \neq \varnothing \implies$ могут быть тривиальные пути.

***Определение* 5.3.2.**

Пусть X, Y и R есть некоторые подмножества множества $V(G)$ вершин. Говорят, что R отделяет множество X от множества Y, если любой путь из X в Y проходит через вершины множества R.

Замечание.

$R = X$ и $R = Y$ — отделяющие множества.

В частности, размер минимального отделяющего множества не превосходит $\min\{|X|, |Y|\}$

Теорема 5.3.1.

Пусть X, Y — пара подмножеств множества $V(G)$. Тогда количество k вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве R совпадает с максимальным количеством l попарно непересекающихся друг с другом путей из X в Y.

Доказательство.

Очевидно, что $l \leqslant k$, т.к. иначе по принципу Дирихле через какую-то вершину R проходило бы хотя бы два пути.

Покажем, что $l = k$.

Случаи $k = 0$ и $k = 1$ тривиальны (граф несвязен либо нам подходит любой путь из X в Y).

Пусть $k > 1$. Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин/рёбер.

База:

$X = Y = \overline{K}_2$, есть два тривиальных пути, а разделяющее множество совпадает с X и Y.

Переход:

Если $X \cap Y \neq \varnothing$, то рассмотрим вершину $z \in X \cap Y$. Заметим, что z обязана лежать в разделяющем множестве $\implies$ размер разделяющего множества $X \setminus \{z\}$ и $Y \setminus \{z\}$ равен $k - 1$.

По предположению индукции, в таком графе найдётся $l - 1$ путь. А значит, если мы возьмём в G тривиальный путь z, то получим как раз l путей.

Если же $X \cap Y = \varnothing$, то рассмотрим нетривиальный путь P между X и Y.

Пусть $e = \{x, y\}$ — ребро из этого пути. В частности, $x \notin Y$ и $y \notin X$.

Если в графе $G - e$ существует разделяющее множество R' размера k, то по индукционному предположению в графе $G - e$ найдётся $l = k$ путей. А добавление ребра уменьшить количество этих путей не может.

Иначе в графе $G - e$ существует разделяющее подмножество R' размера $k - 1$, а множества $R_x = R' \cup \{x\}$ и $R_y = R' \cup \{y\}$ являются разделяющими в графе G (любой путь или проходит через e, или не проходит).

Заметим, что хотя бы одно из них не совпадает ни с X, ни с Y, т.к. иначе $R' = X \cap Y$, но $|R'| \geqslant 1$, а $X \cap Y = \varnothing$. А значит, в G существует подмножество R размера k, отличное от X и Y.

Тогда рассмотрим множества $\tilde{X} = X \setminus R$ и $\tilde{Y} = Y \setminus R$.

Заметим, что в графе $G - \tilde{Y}$ размер разделяющего X и R множества $\geqslant k$, поскольку иначе это множество можно было бы взять в качестве разделяющего в графе G, тем самым уменьшив ответ. Следовательно, по предположению индукции существует k непересекающихся путей из X в R. И аналогично можно показать, что существует k непересекающихся путей из R в Y в графе $G - \tilde{X}$.

Следовательно, т.к. $|R| = k$, существует и k путей из X в Y, что и требовалось. □

***Определение* 5.3.3.**

Пусть x, y есть пара различных вершин графа G. Подмножество R множества $V(G) \setminus \{x, y\}$ называется вершинно разделяющим x и y множеством, если в графе $G{-}R$ пути между x и y отсутствуют.

Теорема 5.3.2 (Менгер, 1927)**.**

Пусть x, $y \in V(G)$ — две несмежные вершины графа G. Тогда количество $\kappa(x, y)$ вершин в наименьшем вершинном разделяющем x и y множестве совпадает с наибольшим количеством простых путей из x в y, не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство.

Пусть x, y — две несмежные вершины графа G, удовлетворяющие условиям теоремы Менгера.

Рассмотрим множество X вершин, смежных с x, и множество Y вершин, смежных с y. Любое отделяющее X от Y множество разделяет вершины x и y и наоборот. Следовательно, размер минимального отделяющего X от Y множества совпадает с $\kappa(x, y)$.

Но тогда, согласно предыдущей теореме, существует $\kappa(x, y)$ попарно непересекающихся путей из X в Y.

Продолжая эти пути до точек x и y, мы тем самым доказываем справедливость теоремы Менгера. □

Теорема 5.3.3 (Уитни, 1932)**.**

Простой граф G является k-связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами x и y существует k путей, не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство.

В одну сторону очевидно. А именно, если существует k непересекающихся во внутренних точках путей, то размер любого разделяющего множества $\geqslant k$ и граф k-связен.

Покажем в другу сторону.

Если вершины x и y несмежны, то в силу теоремы Менгера существует k путей.

Иначе рассмотрим ребро $e = \{x, y\}$ и покажем, что $\kappa(G - e) \geqslant \kappa(G) - 1 = k - 1$.

Пусть S — минимальное разделяющее x и y множество графа $G - e$. Если $|S| = k$, то по теореме Менегера между x и y в $G - e$ имеется k различных путей. Иначе $|S| < k$.

Поскольку $G - S$ — связный граф, в котором e является мостом, то $S \cup \{x\}$ и $S \cup \{y\}$ — разделяющие множества. А значит, $|S| \geqslant k - 1$, что и требовалось. □

5.4. Теорема Форда-Фалкерсона

Motivation: теперь нам хочется доказать рёберные теоремы Менгера и Уитни. Оказывается, они есть и являются следствием общего результата, обсуждаемого в данной главе.

Теоремы же такие. По ним и правда очевидно, что они следуют из Форда-Фалкерсона.

Теорема 5.4.1 (Рёберная теорема Менгера)**.** Максимальное количество $\lambda'(x, y)$ реберно непересекающихся простых путей, соединяющих две различные вершины x и y связного графа G, совпадает с размером $k'(x, y)$ минимального реберно разделяющего вершины x и y множества $R \subset E(G)$.

Теорема 5.4.2 (Реберная теорема Уитни)**.** Граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любые две вершины x, y этого графа связаны между собой по меньшей мере k попарно реберно не пересекающимися между собой путями.

Для Форда-Фалкерсона требуется как минимум определить понятия сети и потока в сети, а также разреза.

***Определение* 5.4.1.** Пусть D – простой слабо связный орграф, в котором выделены вершины s (источник) и t (сток), причём $indeg(s) = outdeg(t) = 0$, а на рёбрах задана вещественная неотрицательная функция $c(x, y)$ (пропускная способность). Тогда пятёрка (V, E, s, t, c) задаёт сеть.

***Определение* 5.4.2.** Вещественная неотрицательная функция f на рёбрах сети, такая, что выполняется $\forall x, y \quad f(x, y) \leqslant c(x, y)$, а также $\forall x \quad f^+(x) = \sum_y f(x, y) = \sum_z f(z, x) = f^-(x)$, называется потоком. Величина $\sum_x f(s, x) = \sum_y f(y, t) =: val(f)$ называется величиной потока.

***Определение* 5.4.3.** Пусть $V = S \sqcup T$, причём $s \in S$ и $t \in T$. Тогда все рёбра, начинающиеся в S и заканчивающиеся в T, называются (S, T)-разрезом. Обозначение $R(S, T)$. Величиной разреза разывается суммарная пропускная способность его рёбер. Обозначение $cap(S, T)$.

Теперь достаточно очевидна следующая лемма (о слабой двойственности):

Лемма. Для произвольного потока f и разреза $R(S, T)$ выполняется $val(f) \leqslant cap(S, T)$.

Доказательство. Определим

$$f^+(U) := \sum_{u \in U, t \notin U} f(u, t)$$

$$f^-(U) := \sum_{u \in U, t \notin U} f(t, u)$$

Тогда понятно, что $f^+(U) - f^-(U) = \sum\limits_{u \in U} (f^+(u) - f^-(u))$.

На основании закона сохранения, выполняется

$f^+(S) - f^-(S) = f^+(s) = val(f)$ (У всех вершин в S, кроме источника, $f^+(u) = f^-(u)$)

А значит, $val(f) \leqslant f^+(S) \leqslant \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y) = cap(S, T)$, что и требовалось. □

Из этой леммы вытекает, что если мы для потока нашли разрез той же величины, то этот поток максимален. На этом и основано доказательство теоремы Форда-Фалкерсона.

Теорема 5.4.3 (Форда-Фалкерсона)**.** Величина максимального потока равна величине минимального разреза.

Доказательство. *На самом деле, в конспекте, а значит, и тут, то же доказательство, что и на алгоритмах, но тут не введено понятие обратного ребра...*

Построим по потоку разрез. Ко множеству S отнесём такие вершины, что до них можно добраться от S, проходя по рёбрам остаточной сети, то есть либо по прямым ненасыщенным, либо в обратную сторону с ненулевым потоком.

Покажем, что $T := V \setminus S$ непусто, а именно $t \in T$. Пусть это не так. Тогда у нас есть путь $s \rightsquigarrow t$ по рёбрам остаточной сети. Увеличим поток вдоль неё на какой-нибудь ε. Здесь под увеличением потока подразумевается увеличение вдоль ненасыщенных прямых рёбер и уменьшение вдоль ненулевых обратных. Получим поток больший максимального, а таких не бывает. Противоречие.

Наконец, величина $cap(S, T)$ равняется величине максимального потока: любое ребро из S в T по построению является насыщенным, а из T в S нулевым; мы мы насытили все рёбра разреза, поэтому величина потока $\geqslant$ величины разреза, а обратное неравенство доказано в предыдущей лемме. $\square$

Вообще, про существование потока мы ничего не утверждали, но на основании теоремы можно его искать таким образом: пока есть путь, по которому мы можем увеличить поток, увеличиываем поток. Тогда когда пути не станет, у нас окажется в руках разрез, равный потоку, то есть поток максимален.

Для целых и рациональных пропускных способностей этот алгоритм завершается за конечное время. На практике мы изучали вещественный граф, на котором Форд-Фалкерсон работает бесконечно долго.

Для остального же есть алгоритм Эдмонса-Карпа, ищущий путь BFS'ом. Он уже завершается за полиномиальное время.

6. Паросочетания

6.1. Определение паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа

***Определение* 6.1.1.**

Паросочетанием M в произвольном графе G называется любой набор ребер, не имеющих общих концевых вершин.

Замечание.

Из определения видно, что есть смысл рассматривать только простые графы.

***Определение* 6.1.2.**

Говорят, что вершина $x \in V(G)$ покрыта паросочетанием M, если она является концом одного из рёбер e, входящего в паросочетание M.

***Определение* 6.1.3.**

Паросочетание M в графе G называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа G.

***Определение* 6.1.4.**

Паросочетание M в графе G называется *максимальным*, если его размер является наибольшим среди всех паросочетаний в этом графе.

Количество рёбер $|M|$ в максимальном паросочетании обозначется обычно как $\alpha'(G)$.

***Определение* 6.1.5.**

Наибольшим по включению паросочетанием называется такое паросочетание, что к нему невозможно добавить ни одно ребро из множества $E(G)$.

Замечание.

Максимальное по включению паросочетание просто найти жадным алгоритмом. Однако, очевидно, не любое наибольшее по включению паросочетание является максимальным. Отсюда идея получить критерий максимальности паросочетания.

***Определение* 6.1.6.**

Пусть M есть некоторое паросочетание в графе G. Произвольный путь P в графе G, в котором чередуются рёбра, входящие в M, и рёбра, не входящие в M, называется M-чередующимся путём.

***Определение* 6.1.7.**

M-чередующийся путь, концевые вершины которого не покрыты паросочетанием M, называется M-дополняющим.

Теорема 6.1.1 (Berge, 1957)**.**

Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда в графе G отсутствуют M-дополняющие пути.

Доказательство.

Очевидно, что если бы в графе был M-дополняющий путь, то паросочетание можно было бы увеличить вдоль этого пути, инвертировав рёбра.

Покажем, что если паросочетание M не максимально, то в графе обязательно найдётся M-дополняющий путь.

Обозначим за M' максимальное паросочетание, $|M'| > |M|$. И рассмотрим симметрическую разность $F := M \triangle M'$ этих паросочетаний.

Поскольку каждое ребро исходного графа покрыто не более чем одним ребром из M и не более чем одним ребром из M', то степень каждой вершины в графе H, индуцированном подмножеством рёбер F, не превосходит 2. А значит, граф H представляет из себя набор путей и циклов.

Но любой такой цикл в таком графе обязан содержать равное количество рёбер из M и M'. А значит, т.к. $|M'| > |M|$, в графе найдётся путь, концевые вершины которого покрыты M'. Т.е. этот путь будет являться M-дополняющим. □

***Определение* 6.1.8.**

Вершинным покрытием графа G называется набор вершин, покрывающий все рёбра данного графа.

***Определение* 6.1.9.**

Покрытие K в графе G называется *минимальным*, если его размер является наибольшим среди всех покрытий в этом графе.

Количество вершин в минимальном вершинном покрытии обозначается через $\beta(G)$.

Лемма. (Слабая двойственность)

В любом графе G размер $|M|$ произвольного паросочетания не превосходит количества $|K|$ вершин в произвольном вершинном покрытии.

В частности, для любого графа G справедливо неравенство $\alpha'(G) \leqslant \beta(G)$.

Доказательство.

Никакая вершина G не может быть инцидентна двум или более рёбрам M. Т.е. чтобы даже покрыть все рёбра M потребуется хотя бы $|M|$ вершин. □

***Определение* 6.1.10.**

Независимым множеством в графе G называется любой набор S попарно несмежных вершин.

***Определение* 6.1.11.**

Независимое множество S называется *максимальным*, если его размер является наибольшим среди всех независимых множеств графа G.

Количество вершин $|S|$ в максимальном независимом множестве обозначается за $\alpha(G)$ и называется *числом независимости* (independence number).

***Определение* 6.1.12.**

Рёберным покрытием графа G называется набор L рёбер, покрывающий *все* вершины этого графа.

Замечание.

Рёберное покрытие существует только при условии $\delta(G) > 0$, т.е. если в графе отсутствуют изолированные вершины.

***Определение* 6.1.13.**

Рёберное покрытие L графа G называется минимальным, если его размер является наименьшим среди всех рёбеных покрытий графа G.

Количество рёбер $|L|$ в минимальном рёберном покрытии обозначается за $\beta'(G)$.

Лемма. (Слабая двойственность)

В любом графе G с $\delta(G) > 0$ размер $|S|$ произвольного независимого множества не превосходит количества $|L|$ рёбер в произвольном рёберном покрытии.

В частности, $\alpha(G) \leqslant \beta'(G)$.

Доказательство.

Любое ребро из рёберного покрытия L покрывает не более одной вершины из независимого множества S. А значит, $|L| \geqslant |S|$. □

***Определение* 6.1.14.**

Кликовым числом $\omega(G)$ графа G называется размер максимальной клики в этом графе.

Замечание.

Любому независимому множеству в графе G можно сопоставить клику в графе $\overline{G}$.

Как следствие, задача поиска максимального независимого множества эквивалентна задаче поиска максимальной клики. В частности, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Замечание.

Мы уже определили понятие максимального по включению паросочетания. Это же понятие можно распространить и на случай независимого множества.

Замечание.

В случае независимого множества не существует критерия его максимальности, а потому и жадные алгоритмы здесь не могут помочь. В общем случае, задача поиска максимального независимого множества является NP-трудной.

Замечание.

Уже показали, как связаны между собой паросочетания и вершинные покрытия, а также рёберные покрытия и независимые множества. Установим теперь другие связи.

Теорема 6.1.2.

Подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G является независимым тогда и только тогда, когда подмножество $K = V(G) \setminus S$ образует вершинное покрытие графа G.

Доказательство.

Если один из концов ребра покрыт вершиной из S, то второй конец обязан быть покрыт вершиной из K. Все остальные рёбра соединяют только вершины из K. Т.е. K — вершинное покрытие.

Обратно, если K — вершинное покрытие, то никакое ребро не проходит между вершинами $V(G) \setminus K$. Т.е., по определению, $V(G) \setminus K$ является вершинным покрытием. □

Следствие.

$\alpha(G) + \beta(G) = n$, где $n = |V(G)|$ — количество вершин в графе G.

Доказательство.

Пусть S — максимальное независимое множество, $K = V(G) \setminus S$.

Тогда $n = |S| + |K| = \alpha(G) + |K| \geqslant \alpha(G) + \beta(G)$.

Пусть K — минимальное вершинное покрытие, $S = V(G) \setminus K$.

Тогда $n = |S| + |K| = |S| + \beta(G) \leqslant \alpha(G) + \beta(G)$. □

Лемма.

Остовный подграф H, порождённым набором рёбер, входящих в минимальное рёберное покрытие L графа G, представляет собой объединение связных компонент, каждая из которых является звездой (дерево, в котором лишь одна вершина может иметь степень, большую единицы).

Доказательство.

Пусть в H есть ребро, обе концевые вершины которого имеют степень $\geqslant 2$. Но заметим, что мы тогда можем удалить это ребро, и оставшийся набор рёбер по-прежнему будет являться рёберным покрытием. $\square$

Теорема 6.1.3 (Gallai, 1959).

$\delta(G) > 0 \implies \alpha'(G) + \beta'(G) = n$, где $n = V(G)$ — количество вершин в графе G.

Доказательство.

Пусть M — какое-то максимальное паросочетание в графе G, $|M| = \alpha'(G)$.

Обозначим за U подмножество вершин $V(G)$, не покрытых рёбрами M, $|U| = n - 2\alpha'(G)$. Заметим также, что никакие две вершины U не смежны между собой, т.к. иначе мы могли бы это ребро добавить к M. А значит, любое ребро из U ведёт в $V(G) \setminus U$.

Поскольку $\delta(G) > 0$, то из любой вершины U можем выбрать по одному ребру, ведущему в $V(G) \setminus U$. Обозначим множество таких рёбер за F. Очевидно, что $|F| = |U| = n - 2\alpha'(G)$.

Заметим, что $M \cup F$ — рёберное покрытие, и $|M \cup F| = n - \alpha'(G) \implies \beta'(G) + \alpha'(G) \leqslant n$.

Покажем неравенство в другую сторону. Для этого рассмотрим минимальное рёберное покрытие L, $|L| = \beta'(G)$.

Уже знаем, что любая компонента связности остовного графа H, построенного на рёбрах подмножества L, является звездой. В частности, количество вершин, отличных от центров звёзд, совпадает с количеством рёбер $|L| = \beta'(G)$.

Выберем теперь в каждой звезде по ребру, получим некоторое паросочетание M.

Тогда остаётся заметить, что $|L| + |M| = n \implies \beta'(G) + \alpha'(G) \geqslant n$.

Таким образом, показали, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$. $\square$

6.2. Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе

Алгоритм.

Рассмотрим двудольный граф $G[X, Y]$ и опишем алгоритм нахождения в нём максимального паросочетания.

На очередном шаге будем выбирать произвольную вершину $x \in X$, не покрытую никаким из рёбер паросочетания M, и будем запускать из x поиск в глубину, строя из этой вершины M-чередующиеся пути.

Если в какой-то момент хотя бы один из таких путей становится M-дополняющим, то мы останавливаем поиск и инвертируем все рёбра в найденном пути. Затем переходим к другой вершине.

Так продолжаем до тех пор, пока находится хотя бы один M-дополняющий путь, либо пока все вершины X не окажутся покрыты рёбрами паросочетаниями.

Остаётся обосновать корректность описанного алгоритма. Для этого нам достаточно предъявить некоторое вершинное покрытие K, размер которого совпадает с размером найденного паросочетания.

Теорема 6.2.1 (Кёниг-Эгервари, 1931)**.**

В любом двудольном графе G количество $\alpha'(G)$ рёбер в максимальном паросочетании совпадает с размером $\beta(G)$ минимального вершинного покрытия.

Доказательство.

Построим граф G', добавив к нашему графу $G[X, Y]$ две вершины x и y, при этом соединив x со всеми вершинами первой доли, а y — со всеми вершинами второй доли.

Заметим, что существует биекция между множествами кратчайших путей из x в y, не пересекающихся во внутренних вершинах, и паросочетаниями в графе $G[X, Y]$.

Кроме того, существует и биекция между вершинными покрытиями в $G[X, Y]$ и разделяющими x и y множествами в G' (любое такое множество должно покрывать все рёбра между X и Y).

А значит, можем воспользоваться вершинной теоремой Менгера и получить требуемое. □

Теорема 6.2.2.

Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания M в графе $G[X, Y]$ корректен.

Доказательство.

Рассмотрим множество вершин U первой доли, непокрытых рёбрами найденного паросочетания M.

Обозначим за X^+ и Y^+ — множества вершин первой и второй доли, достижимых из U по M-чередующимся путям. Соответственно, положим $X^- = X \setminus X^+$, $Y^- = Y \setminus Y^+$.

Покажем, что $K = X^- \cup Y^+$ — в точности вершинное покрытие графа $G[X, Y]$.

Заметим, что K — вершинное покрытие, поскольку не существует рёбер между вершинами X^+ и Y^-, а значит любое ребро имеет хотя бы один конец в K.

Покажем теперь, что $|M| = |K|$.

Для начала заметим, что не существует рёбер паросочетания между X^- и Y^+ (иначе мы могли бы по чередующемуся пути попасть в вершину из X^-). То есть остаётся показать, что любая вершина K покрыта ребром паросочетанием.

Действительно. Любая вершина из Y^+ покрыта каким-то ребром из M (иначе бы существовал M-дополняющий путь). Любая вершина X^- также покрыта каким-то ребром из M просто потому, что все непокрытые вершины первой доли лежат в X^+.

Получили, что $|K| \leqslant |M| \implies |K| = |M|$, что и требовалось.

Следовательно, описанный алгоритм корректен. $\square$

***Определение* 6.2.1.**
Паросочетание M в графе $G[X, Y]$ называется X-насыщенным, если оно покрывает все вершины доли X.

***Определение* 6.2.2.**
Пусть $S \subset V(G)$ — подмножество вершин графа G. Обозначим за $N(S)$ множество вершин, смежных с вершинами из S.

Теорема 6.2.3 (Холл, 1935)**.**
В графе $G[X, Y]$ X-насыщенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда $\forall S \subset X : |S| \leqslant |N(S)|$.

Доказательство.
TODO

Временно мертва.

См. конспект Омельченко, стр. 88-89. $\square$

Следствие.
Если в двудольном графе $G[X, Y]$, т.ч. $|X| = |Y|$, выполняется условие леммы Холла, то в нём существует совершенное паросочетание.

6.3. Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта.

***Определение* 6.3.1.** Начетная(чётная) компонента – компонента, содержащая нечётное(чётное) число вершин.

Теорема 6.3.1 (Татта(Tutt), 1947)**.** В графе G существует совершенное паросочетание $\iff$ $\forall S \subset V(G)$ количество $c_{odd}(G-S)$ нечётных компонент в графе $G-S$ не превосходит $|S|$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть нашлось множество S, для которого $c_{odd}(G-S) > |S|$. Предположим, что в этом графе было некоторое совершенное паросочетание, зафиксируем его. Тогда в каждой нечётной компоненте есть хотя бы по одной вершине, пара в паросочетании которой не лежит в её компоненте (иначе она была бы чётная). Значит, её пара лежит в множестве S. Но т.к. пары в паросочетании между собой не пересекаются, то $|S|$ должно быть хотя бы $c_{odd}(G-S)$. Противоречие.

Теперь достаточность. Пусть условия теоремы Татта выполнились, но совершенного паросочетания не существует. Значит, он состоит из чётного числа вершин n. Пусть он отличен от K_n (в котором при чётном n паросочетание очевидно есть). Значит, существует пара несмежных вершин. Соединим эту пару ребром. Условие теоремы Татта всё ещё выполняется. Если для произвольного S ребро и соединило какие-то компоненты, то если хотя бы одна из них была чётной, $c_{odd}(G-S)$ не изменилось, а если обе нечётные, то и вовсе уменьшилось на 1. Значит, если для этого S $c_{odd}(G-S) \leqslant |S|$ выполнялось ранее, то и теперь тоже выполнится.

Будем добавлять в наш граф отсутствующие рёбра, пока не получим граф, добавление любого ребра в который приводит к появлению в нём совершенного паросочетания. Такое рано или поздно случится, т.к. в K_n оно гарантированно есть. Назовём такой граф насыщенным. Пусть U – множество вершин получившегося насыщенного графа G^*, соединённых со всеми прочими. вершинами графа. По условию теоремы, $|U| \geqslant c_{odd}(G^* - U)$.

Лемма. $G^* - U$ – простой насыщенный граф, из которого удалили все вершины степени $n-1$ (они же множество U), представляет собой граф, каждая компонента которого полная.

Доказательство. Пусть это не так и в $G^* - U$ есть компонента, не являющаяся полным графом. Тогда в ней есть хотя бы 3 вершины, а среди них есть хотя бы две несмежных вершины a и c, имеющих общего соседа b (TODO ссылка на упражнение к первой главе). Т.к. $b \notin U \Rightarrow deg(b) < n-1$. Значит, в этом графе также есть вершина d, несмежная с b. Запомним это.

Т.к. G^* насыщенный, то добавление в него любого ребра приведёт к появлению совершенного паросочетания, причём, новое ребро будет обязано в него входить.

Пусть $G_1 := G^* + \{a,c\}$, $G_2 := G^* + \{b,d\}$, а M_1 и M_2 – совершенные паросочетания в них. Тогда $\{a,c\} \in M_1$, $\{b,d\} \in M_2$. Пусть $F := M_1 \triangle M_2$, а H – остовный подграф G^*, для которого $E(H) = F$. Т.к. сочетание совершенно то любая вершина инцидентна ребру из M_1 и ребру из M_2. Тогда любая компонента H является чётным циклом или изолированной вершиной (степень любой вершины либо 0, если рёбра из M_1 и M_2 в это вершине совпали, либо 2, если нет). Рёбра M_1 на рисунке красные, M_2 – синие.

Теперь есть два случая. Если рёбра $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$ лежат на разных циклах C_1 и C_2 соответственно (a), то заменим в C_1 красные рёбра на синие, а в C_2 синие на красные. Получим рёбра, покрывающие то же множество вершин, но не содержащие рёбер $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$. Значит, совершенное паросочетание существовало и раньше.

Теперь пусть $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$ лежали на одном цикле C. Будем двигаться по этому циклу от вершины b в направлении, задаваемом ребром $\{b,d\}$ пока не встретим одну из вершин a,c. Пусть встретили a. Пройденная цепочка рёбер P_1 начинается и заканчивается ребром из M_2, а цепочка $P_2 := C \backslash P_1$ – ребрами M_1. Помимо этого, вершины a и b соединены ребром. Возьмём рёбра $(P_1 \cap M_1) \cup \{a,b\} \cup (P_2 \cap M_2)$. Снова получим совершенное паросочетание на этом цикле, не содержащее рёбра $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$. Снова противоречие. □

Вернёмся к доказательству теоремы. Итак, граф G^*-U – это объединение полных компонент. Тогда в каждой чётной компоненте можно построить совершенное паросочетание, а в каждой нечётной – паросочетание, покрывающее все вершины кроме одной, в которую ведёт ребро из U и взять все такие рёбра. Итого, остаётся покрыть вершины U, не покрытые связью с нечётными компонентами. Назовём их U'. Т.к. в графе четное число вершин и мы покрыли четное число, то и в U' четное число вершин. Т.к. в U были вершины степени $n-1$, то сужение графа на U' даст нам полный чётный граф, в котором очевидно есть совершенное паросочетание. Построили совершенное паросочетание в графе G^*, про который утверждалось, что в нём его нет. Противоречие. □

Замечание. Необходимость условия о чётности количества вершин во всём графе автоматически следует из теоремы при $S = \varnothing$.

Лемма. Для любого подмножества S множества $V(G)$ вершин графа G $c_{odd}(G-S) - |S| \equiv n (\bmod 2)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество S.

$$V(G) = \bigcup_{i \leqslant c_{odd}(G-S)} V_i \cup \bigcup_{i \leqslant c_{even}(G-S)} U_i \cup S$$

, где V_i – нечётные компоненты графа $G-S$, а U_i – чётные. Заметим, что во всех чётных компонентах суммарно чётное число вершин, а во всех нечётных – $\sum_{i \leqslant c_{odd}(G-S)}(|U_i|-1) + c_{odd}(G-S)$, где левое слагаемое – сумма чётных чисел. Отсюда, $n \equiv c_{odd}(G-S) + |S| (\bmod 2) \equiv c_{odd}(G-S) + |S| - 2|S| (\bmod 2) \equiv c_{odd}(G-S) - |S| (\bmod 2)$ □

Воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы:

Теорема 6.3.2 (Петерсона)**.** Каждый кубический граф G, имеющий не более двух мостов, обладает совершенным паросочетанием.

Доказательство. Во-первых, число вершин в кубическом графе чётно: $\sum_{x \in V(G)} deg(x) = 3|V(G)| = 2|E(G)| \Rightarrow 2 \mid |V(G)|$.

Пусть граф G не имеет паросочетания. Тогда по теореме Татта найдётся S такое, что

$$c_{odd}(G-S) > |S| \iff c_{odd}(G-S) \geqslant |S|+1$$

. По только что доказанной лемме(TODO сделать ссылку) $c_{odd}(G-S) - |S|$ одной чётности с n. Следовательно, $c_{odd}(G-S) - |S|$ чётно. Значит, $c_{odd}(G-S) = |S|+1$ никогда не выполнится, значит, $c_{odd}(G-S) \geqslant |S|+2$.

Пусть G_i – нечётная компонента графа $G-S$, а m_i – количество рёбер, соединяющих G_i с S. Докажем, что m_i нечётно. Посчитаем число рёбер внутри компоненты G_i:

$$2E(G_i) = \sum_{x \in V(G_i)} deg(x) = 3|V(G_i)| - m_i$$

Сумма слева чётна т.к. равна удвоенному числу рёбер. $|V(G_i)|$ нечётно т.к. нечётная компонента, значит m_i тоже нечётно. Т.к. мостов не более чем два, то не более чем два m_i могут равняться 1. Значит, все остальные $m_i \geqslant 3$. Значит, в худшем случае

$$\sum_i m_i \geqslant 3(c_{odd}(G-S)-2)+2 = 3c_{odd}(G-S) - 4 \geqslant 3(|S|+2) - 4 = 3|S|+2$$

. Но максимальное число рёбер, исходящих из S не превышает $3|S|$. Противоречие.

□

Теорема 6.3.3 (Плесника)**.** Пусть G – k-регулярный и $(k-1)$-связный граф с чётным числом вершин. Тогда в графе G', полученном из G удалением не более, чем $(k-1)$ рёбер, существует совершенное паросочетание.

Рассмотрим кососимметрическую матрицу T вида:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ -x_{2,1} & 0 & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & -x_{2,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение 6.3.4. При нечётном n определитель такой матрицы тождественно равен нулю.

Доказательство.

$$det(T) = det(T^\top) = det(-T) = (-1)^n det(T) \Rightarrow det(T) = (-1)^{2k+1} det(T) = -det(T) \Rightarrow det(T) = 0$$

□

***Определение* 6.3.2** (Пфаффиан)**.** Рассмотрим множество Π всех $(2n-1)!!$ разбиений множества $[2n]$ на блоки размера 2. Каждое такое множество можно записать в виде

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)\}, i_k < j_k, i_1 < i_2 < \ldots < i_n$$

. Для каждого α введём перестановку

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \ldots & i_n & j_n \end{pmatrix}$$

Тогда пфаффианом матрицы T назовём

$$pf(T) = \sum_{\alpha \in \Pi} sign(\sigma_\alpha) x_{i1,j1} x i_2, j_2 \ldots x_{i_n, j_n}$$

Теорема 6.3.5. Определитель кососимметрической матрицы T размера $2n \times 2n$ равен квадрату пфаффиана этой матрицы.

$$det(T) = [pf(T)]^2$$

Вернёмся к паросочетаниям на графах. Татт заметил, что есть биекция между множеством всех совершенных паросочетаний графа $K_2 n$ и слагаемыми пфаффиана кососимметрической матрицы $T[2n, 2n]$. При этом сами элементы $x_{i,j}, 1 \leqslant i < j \leqslant 2n$ отвечают рёбрам графа K_{2n}, соединяющим вершины i и j этого графа.

Например, слагаемое пфаффиана для графа K_4 $-x_{1,3} x_{2,4}$ соответствует совершенному паросочетанию $\{(1,3), (2,4)\}$.

***Определение* 6.3.3** (матрица Татта)**.** Пусть имеется произвольный граф G на $2n$ вершинах. Сопоставим этому графу кососимметрическую матрицу $T[2n, 2n]$, элемент $x_{i,j}$ которой отличен от нуля, если в G есть ребро (i, j) и нулю если нет. Такая матрица $T(G)$ называется матрицей Татта.

Определитель такой матрицы всё ещё выражается через пфаффиан, каждое ненулевое слагаемое которого отвечает совершенному паросочетанию в графе G. И наоборот, на каждое совершенное паросочетание найдётся ненулевое слагаемое пфаффиана.

Алгоритм. Если в ненулевые ячейки матрицы $T(G)$ подставить случайные значения, то если G содержит в себе совершенное паросочетание, то с хорошей вероятностью определитель будет ненулевым.

Теперь пусть мы хотим посчитать число совершенных паросочетаний. Тогда там хотелось бы расставить значения $x_{i,j}$ так, чтобы каждое ненулевое слагаемое пфаффиана было равно 1. В частности, можно пытаться расставлять в матрицу ± 1 и добавиться одинакового знака всех слагаемых. В частности, можно попробовать ориентировать граф некоторым образом $D(G)$, так, что элементы $a_{i,j}$ матрицы $A(D)$:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } (i,j) \in E(D) \\ -1 & \text{если } (j,i) \in E(D) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

***Определение* 6.3.4.** Ориентация графа, при которой каждое слагаемое в пфаффиане имеет одинаковый знак, называется пфаффовой.

Замечание. Пфаффова ориентация имеется далеко не у всех графов.

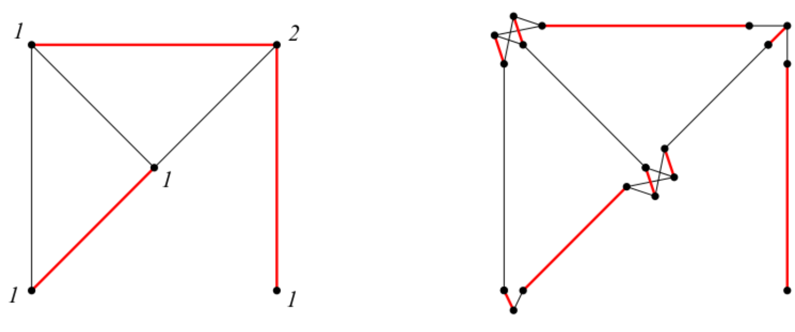
Теорема 6.3.6. Любой планарный граф допускает пфаффову ориентацию, которая может быть построена за полиномиальное время.

Следствие. В любом планарном графе G можно за полиномиальное время посчитать количество совершенных паросочетаний по формуле $m(G) = \sqrt{\det A}$

***Определение* 6.3.5** (k-фактор графа)**.** k-фактор графа – k-регулярный подграф графа G. В частности, 1-фактор графа – это его совершенное паросочетание.

***Определение* 6.3.6** (f-фактор графа)**.** Если f – неотрицательная целочисленная функция, то f-фактор графа G – это такой его остовный подграф H, что $deg_H(v) = f(v)$ для любой вершины $v \in V(G)$.

Необходимым условием построения f-фактора является неравенство $f(x) \leqslant deg(x), x \in V(G)$. Пусть оно выполняется. Тогда обозначим $d'(x) = deg(x) - f(x)$. Построим такой граф H, что в нём каждая вершина заменена на полный двудольнай граф $K_{deg(x),d'(x)}$ с долями $|X(x)| = deg(x)$ и $|Y(x)| = d'(x)$. Затем соединим каждую из вершин из $X(x)$ с соответствующей вершиной из $X(y_i)$ соседа y_i исходной вершины x. Получим, что в новом графе каждая вершина из $X(x)$ соответствует ровно одному ребру, соединяющему её с соседом вершины x в графе G.



(a) (b)

Теорема 6.3.7. Граф G имеет f-фактор $\iff$ в построенном способом выше графе H имеется совершенное паросочетание.

Доказательство. Пусть в графе G есть f-фактор. В графе $H(G)$ соответствующие рёбра будут покрывать $f(x)$ вершин в каждом полном двудольном графе $K_{deg(x),d'(x)}$. Тогда в каждой доле $X(x)$ осталось по $d'(x)$ непокрытых вершин, ровно как и в $Y(x)$. Построим между ними совершенные паросочетания и получим паросочетание во всём $H(G)$.

Пусть в графе $H(G)$ есть совершенное паросочетание M. Стянем тогда все вершины, принадлежащие доле $|X(x)| = deg(x)$ и удалим все вершины доли $|Y(x)| = d'(x)$. В результате, т.к. $deg(x) - d'(x) = f(x)$, получим граф G, в котором все оставшиеся рёбра из M образуют f-фактор. □

6.4. Максимальные паросочетания в произвольном графе. Структурная теорема Галлаи-Эдмондса. Алгоритм Эдмондса

Если в графе нет совершенного паросочетания, то $\exists S \subset V(G)\ \ c_{odd}(G-S)-|S|>0$

***Определение* 6.4.1.** Подмножество $B \subseteq V(G)$, на котором достигается максимум функции $c_{odd}(G-S)-|S|$, называется барьером.

***Определение* 6.4.2.** Дефицитом $def(G)$ графа G называется количество его вершин, не покрытых максимальным паросочетанием M:

$$def(G) := |V(G)| - 2\,|M| = n - 2\alpha'(G).$$

Теорема 6.4.1 (Берж, 1958)**.** Для любого графа G верно, что

$$def(G) = \max_{S \subset V(G)} [c_{odd}(G-S) - |S|]. \tag{2}$$

Замечание. Можно, используя равенство $def(G) = n-2\alpha'(G)$, переформулировать утверждение (2) так:

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subset V(G)} \{n - (c_{odd}(G-S) - |S|)\} \tag{3}$$

Лемма. Для любого паросочетания M в графе G и произвольного множества $S \subset V(G)$ справедливо неравенство:

$$|M| \leqslant \frac{1}{2}(n - (c_{odd}(G-S) - |S|)). \tag{4}$$

Доказательство. (Леммы). Разобьем все ребра множества M на два блока. Первый блок – ребра, целиком лежащие в множестве $G-S$, их количество – k_c. Второй блок – ребра, с хотя бы одним концом из множества S, их количество – k_s. Заметим, что $k_s \leqslant |S|$, максимум достигается, когда каждая вершина из S соединена ребром $e \in M$ с некоторой (нечетной) компонентой $G-S$. Максимум k_c достигается, когда внутри четных компонент $G-S$ ребра паросочетания покрывают все вершины, а внутри нечетных – кроме одной. Т.е. $k_c \leqslant \frac{|V(G)|-|S|-c_{odd}(G-S)}{2}$. Используя, что $|M| = k_s + k_c$, получаем нужное неравенство (4). □

Доказательство. (Теоремы) С учетом предыдущей леммы, достаточно доказать обратное неравенство:

$$\alpha'(G) \geqslant \frac{1}{2} \min_{S \subset V(G)} \{n - (c_{odd}(G-S) - |S|)\} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \max_{S \subset V(G)} \{c_{odd}(G-S) - |S|\}$$

По лемме из предыдущей главы, знаем, что четность $m := \max\limits_{S \subset V(G)} \{c_{odd}(G-S) - |S|\} = c_{odd}(G-B) - |B|$ совпадает с четностью n. Более того, $m \geqslant 0$, т.к. при подстановке $S = \varnothing$, получаем $c_{odd}(G-S) - |S| \geqslant c_{odd}(G) \geqslant 0$.

Добавим к графу G m новых вершин – подмножество W. Соединим каждую вершину W со всеми остальными вершинами – как новыми, так и старыми. Получим новый граф $\tilde{G}$. Покажем, что в нем есть совершенное паросочетание. Для этого проверим, что $\forall T \subset V(\tilde{G})\ \ c_{odd}(\tilde{G}-T) \leqslant |S|$.

Для $T = \varnothing$ условие выполняется. Действительно, $c_{odd}(\tilde{G}-T) = c_{odd}(\tilde{G}) = (n+m) \bmod 2 = 0$. (Т.к. знаем, что четность n и m совпадает.)

Теперь докажем для $T \neq \varnothing$. Если при удалении T осталась хотя бы одна вершина из W, то граф оставшийся связный и $c_{odd}(\tilde{G}-T) \leqslant 1 \leqslant |T|$, т.е. условие Татта выполнено.

Пусть теперь $T = W \cup S, \quad S \subset V(G)$. По построению графа $\tilde{G}$ тогда $\tilde{G} - T = G - S$. Тогда $c_{odd}(\tilde{G} - T) = c_{odd}(G - S)$.

Но $c_{odd}(G - S) - |S| \leqslant c_{odd}(G - B) - |B| = m$, а значит $c_{odd}(\tilde{G} - T) = c_{odd}(G - S) \leqslant m + |S| = |W \cup S| = |T|$.

Получили, что для всех T выполняется условие Татта, а значит, в $\tilde{G}$ есть совершенное паросочетание $\tilde{M}$.

Пусть l – количество ребер паросочетания $\tilde{M}$, исходящих из W в G. Так как в W содержится m вершин, то $l \leqslant m$.

Пусть k – количество ребер $\tilde{M}$, полностью находящихся внутри G. Тогда $2k = n - l$. (Каждая вершина из G покрывается либо внутренним ребром паросочетания, либо исходящим наружу.) А так как эти k ребер образуют паросочетание в исходном графе, то $k \leqslant \alpha'(G)$.

Получили, что $2\alpha'(G) \geqslant 2k = n - l$. Что то же самое, что неравенство, которое нужно было доказать. Есть два неравенства – верно и равенство. □

***Определение* 6.4.3.** Барьеры, в которых максимальное число вершин, будем называть максимальными барьерами.

Лемма. Пусть T – некоторый максимальный барьер в графе G. Тогда все компоненты в графе $G - T$ нечетны.

Доказательство. От противного. Пусть есть четная компонента G_i в графе $G - T$. Рассмотрим ее остовное дерево. Возьмем лист этого остовного дерева x. $G_i - x$ – связная нечетная компонента графа $G - (T \cup \{x\})$. Получили, что с прибавлением вершины x к T дефицит не изменился, но размер барьера увеличился. Противоречие с максимальностью исходного барьера. □

***Определение* 6.4.4.** Граф G – фактор-критический, если для любой вершины $x \in V(G)$, в графе $G - x$ есть совершенное паросочетание.

Замечание. В фактор-критическом графе совершенного паросочетания нет из соображений четности.

Лемма. Пусть T – максимальный барьер в графе G. Тогда любая компонента связности C графа $G - T$ является фактор-критическим графом.

Доказательство. Из предыдущего знаем, что C нечетна. Покажем $\forall x$, что в $C - x$ есть совершенное паросочетание, т.е. что выполняется условие Татта.

Возьмем $S \subset V(C - x)$. Заметим, что $c_{odd}(G - T - S - x) = c_{odd}(G - T) - 1 + c_{odd}(C - x - S)$. Действительно, вместо бывшей нечетной компоненты C получили нечетные компоненты $C - x - S$.

Тогда $c_{odd}(G - T - S - x) - (|T| + 1 + |S|) = c_{odd}(G - T) - |T| + c_{odd}(C - x - S) - |S| - 2$

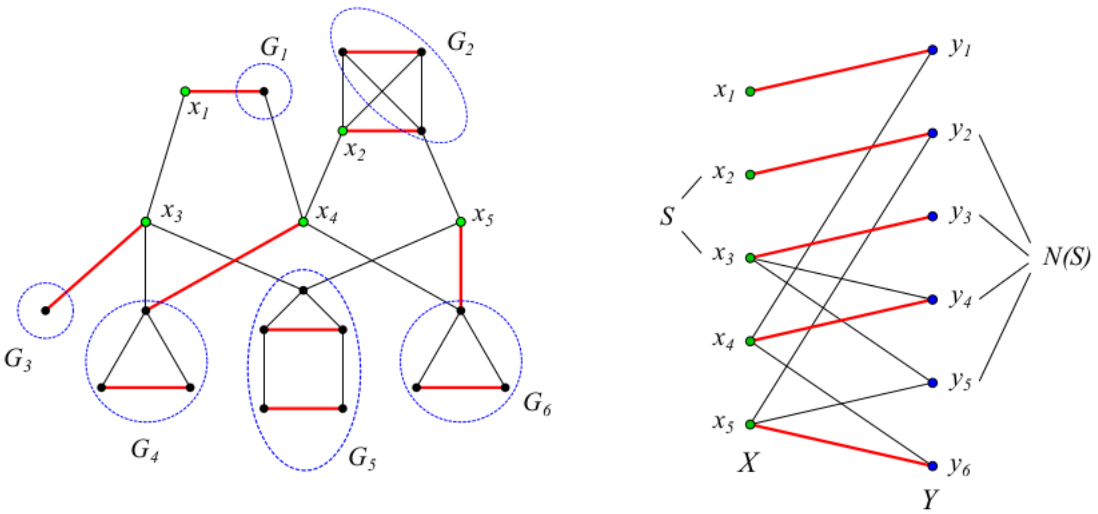
Но T – максимальный барьер, значит множество $T \cup x \cup S$ барьером не является, а значит $c_{odd}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|) < c_{odd}(G - T) - |T|$. Но по лемме из предыдущей главы, эти числа имеют одну и ту же четность. Тогда:

$$c_{odd}(G-T-x-S)-(|T|+1+|S|) = c_{odd}(G-T)-|T|+c_{odd}(C-x-S)-|S|-2 \leqslant c_{odd}(G-T)-|T|-2$$

Отсюда получаем $c_{odd}(C - x - S) - |S| \leqslant 0$. Т.е. условие Татта выполняется, а значит в $C - x$ есть совершенное паросочетание. □

***Определение* 6.4.5.** Сопоставим барьеру T в графе G двудольный граф $H(T)$ следующим образом.

Вершины доли X – вершины барьера T. Вершины доли Y – нечетные компоненты G_i в графе $G - T$. Ребро $\{x, y\}$ проводим, если в исходном графе G есть ребро из x в соответствующую y компоненту G_i.



(a) (b)

Лемма. Пусть T – максимальный барьер в графе G. Тогда в графе $H(T)$ найдется X-насыщенное паросочетание.

Доказательство. Воспользуемся леммой Холла. Для этого нужно показать, что $\forall S \subset X \quad |S| \leqslant |N(S)|$.

Рассмотрим множество $S \subset X$. Заметим, что $|Y \setminus N(S)| \leqslant c_{odd}(G - (T \setminus S))$. Действительно, нечетные компоненты, соответствующие элементам $Y \setminus N(S)$ точно входят в множество нечетных компонент $G - (T \setminus S)$ (т.к. они не связаны с вершинами, остающимся от барьера S). Но возможно, в нечетные компоненты входит что-то еще.

Тогда $|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| \leqslant c_{odd}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S|$. Но т.к. T – барьер, а $T \setminus S$ – просто какое-то удаляемое множество, то

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| \leqslant c_{odd}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S| \leqslant c_{odd}(G - T) - |T|\,.$$

По построению, $c_{odd}(G - T) = |Y|$. Тогда $|Y| - |N(S)| - |T| + |S| \leqslant |Y| - |T|$.

Отсюда получили $|S| \leqslant |N(S)|$, что и хотели. □

Утверждение 6.4.2 (О структуре графа)**.** Пусть в графе G есть максимальный барьер T и максимальное паросочетание M. Уже знаем, что в графе $G{-}T$ имеется $c_{odd}(G - T)$ связных компонент G_i, каждая из которых является фактор-критическим графом. И что в графе G имеется $c_{odd}(G - T) - |T|$ вершин, не покрытых паросочетанием M.

Как следствие, в каждой из $c_{odd}(G - T)$ компонент графа $G - T$ ребра паросочетания M образуют *почти совершенные паросочетания* – паросочетания, покрывающие все вершины графа G_i кроме одной. Далее, множество всех компонент G_i оказывается разбитым на два блока. Компоненты первого блока содержат по вершине, не покрытой паросочетанием M. Любая компонента второго блока соединена с какой-то своей вершиной $x \in T$ ребром, покрытым паросочетанием M. (Несколько ребер паросочетания из T в одну компоненту G_i быть не может. Пусть их хотя бы три, но тогда два из них можно заменить на ребро паросочетания внутри критического графа G_i. Еще два освободившихся ребра тратим на покрытие вершин в других нечетных компонентах. Получили больше ребер паросочетания)

***Определение* 6.4.6.** Пусть B – подмножество вершин графа G, покрываемых любым максимальным паросочетанием M в графе G. Тогда декомпозицией Галлаи – Эдмондса графа G называется разбиение множества его вершин на три блока A, C и D, такие, что $D = V(G) \setminus B$, A – подмножество множества B, состоящее из вершин, имеющих хотя бы одного соседа в D, а $C = B \setminus A$.

Теорема 6.4.3 (Структурная теорема Галлаи – Эдмондса)**.** Пусть A, C, D – подмножества в декомпозиции Галлаи – Эдмондса графа G, а $G_1, \ldots, G_k$ – связные компоненты подграфа $G[D]$, индуцированного подмножеством вершин D. Для произвольного максимального паросочетания M имеют место следующие утверждения.

1. Паросочетание M покрывает все вершины подграфа $G[C]$, индуцированного подмножеством C. Отсюда, в частности, следует, что любая связная компонента подграфа $G[C]$ представляет собой четный подграф.

2. Каждая вершина $x \in A$ покрыта ребром паросочетания M, соединяющим x со своей собственной компонентой G_i подграфа $G[D]$.

3. Каждая связная компонента G_i подграфа $G[D]$ представляет собой фактор-критический граф.

4. Для любого подмножества $S \neq \varnothing$ множества A подмножество $N_G(S)$ его соседей в G имеет по вершине хотя бы в $|S| + 1$ из k компонент G_i.

5. Подмножество A представляет собой барьер в графе G, то есть $def(G) = c_{odd}(G - A) - |A|$, причем $c_{odd}(G - A)$ совпадает с числом k связных компонент подграфа $G[D]$.

Доказательство. Возьмем в графе G максимальный барьер T. Рассмотрим, соответствующий барьеру двудольный граф $H(T)$. Знаем, что там есть T-насыщенное паросочетание, а значит выполняется лемма Холла. Т.е. $\forall S \subset T \quad |S| \leqslant |N(S)|$. Для $S = \varnothing$ получаем равенство, а значит можно определить $R := \max\limits_{S \subseteq T}\{S \ : \ |S| = |N(S)|\}$. (Максимум берем не по пустому множеству).

Пусть R' – вершины компонент, соответствующие $N(R)$ в двудольном графе. Тогда пусть $A := T \setminus R$, $D := V(G) \setminus (T \cup R')$. Уже знаем, что любая вершина $x \in A$ соединяется ребром, покрытым M, с какой-то своей компонентой подграфа $G[D]$. (Из утверждения выше.) Покажем, что для любой вершины $z \in D$ найдется максимальное паросочетание M в графе G, не покрывающее z.

Для этого рассмотрим граф H', полученный из $H(T)$ удалением R и $N(R)$. Останется граф на A и $H(D)$. Заметим, что $\forall S \subset A \quad |S| < |N(S)|$. Действительно, если было бы равенство, то можно было бы добавить множество S к множеству R, тем самым увеличив его.

Тогда можем удалить любую вершину из множества $H(D)$ и лемма Холла не нарушится. А значит, есть паросочетание, не покрывающее эту вершину. Но каждой вершине $H(D)$ соответствует компонента в исходном графе. Про которую уже доказали, что является фактор-критической. Тогда оттуда можно выбрать любую вершину, которую не надо покрывать.

Заметим теперь, что $C = R \cup R'$ не связана ни с какой вершиной из D. Как следствие, C, A и D представляют собой нужные части декомпозиции Галлаи-Эдмондса, удовлетворяющие пунктам 1-3 теоремы. Кроме того, из условия $N(S) > |S|$ для любого непустого $S \subseteq A$ следует и четвертый пункт теоремы Галлаи-Эдмондса.

Осталось лишь заметить, что A является барьером. Наконец, так как T есть барьер в графе G, то

$$def(G) = c_{odd}(G - T) - |T| = c_{odd}(G[D]) + c_{odd}(G[R']) - |R \cup A| = c_{odd}(G[D]) - |A|\,.$$

Так как при этом $c_{odd}(G[C]) = 0$, то $c_{odd}(G[D]) = c_{odd}(G - A - C) = c_{odd}(G - A)$, так что $def(G) = c_{odd}(G - A) - |A|$, то есть A также представляет собой барьер в графе G. $\square$

Замечание - пометка от Ани Н. Из определения есть единственность такого разбиения, так что предоставление – корректно.

Следствие. Граф G является фактор-критическим тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$ есть единственный барьер в G.

Замечание. Вообще, в произвольном графе можно было бы находить паросочетание и с помощью Куна. С некоторой вероятностью работает, с некоторой – на нечетном цикле пойдем не туда.

***Определение* 6.4.7.** Пусть x – вершина, не покрытая паросочетанием M. Предположим, что в графе G существуют два M-чередующихся пути из x в некоторую другую вершину v, имеющих разную четность. Наибольший общий участок этих двух путей, имеющий четную длину, называется стеблем (stem). Конечная вершина стебля называется базой (base). К базе примыкает цикл нечетной длины, состоящий из $2k + 1$ ребра, k из которых покрыты паросочетанием M, называемый цветком (blossom) B. База – единственная вершина цикла B, не покрытая ребрами паросочетания M.

Алгоритм. Алгоритма Эдмондса состоит из процедуры сжатия цветка (blossom shrinking). На каждом шаге этой процедуры мы заменяем цикл нечетной длины B (blossom) на одну псевдовершину B (сжимаем цветок). При этом все внешние ребра, исходящие из цикла нечетной длины, становятся инцидентными псевдовершине B. Далее продолжаем данный процесс, стартуя с псевдовершины B. Если у нас в результате сжатия появился еще один цикл C нечетной длины, содержащий псевдовершину B, мы вновь сжимаем его в новую псевдовершину C и так далее. Как только мы находим в процессе этих действий M-дополняющий путь, соединяющий u с вершиной y, не покрытой M, мы разворачиваем все сжатые циклы обратно, выбирая в каждом цикле из двух возможных путей тот, который не нарушит M-чередуемость восстанавливаемого пути.

Замечание. По описанному алгоритму можно построить разбиение вершин графа на блоки A, C и D.

7. Покраска графов

7.1. k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса (Brooks, 1941)

***Определение* 7.1.1** (k-раскрашиваемый граф)**.** Граф, вершины которого можно разбить на k множеств так, чтобы любые две смежные вершины лежали в разных множествах.

***Определение* 7.1.2** (Хроматическое число графа $\chi(G)$)**.** Минимальное количество цветов, в которое можно его покрасить.

Алгоритм Простая покраска. Упорядочим некоторым линейным образом вершины. Будем раскрашивать в этом порядке, присваивая очередной вершине минимальный цвет отсутствующий среди покрашенных соседей. Тем не менее, даже такой алгоритм красит любой граф в не более чем $\Delta + 1$ цвет.

Доказательство. Степень каждой вершины не более Δ. Значит, среди $\Delta + 1$ цвета соседи займут не более Δ и хотя бы один нам останется. □

Теорема 7.1.1. $\chi(G) \leqslant \Delta + 1$.

Доказательство. Алгоритм выше. □

Следствие. Любой k-хроматический граф обязательно содержит вершину, степень которой больше или равна $k - 1$.

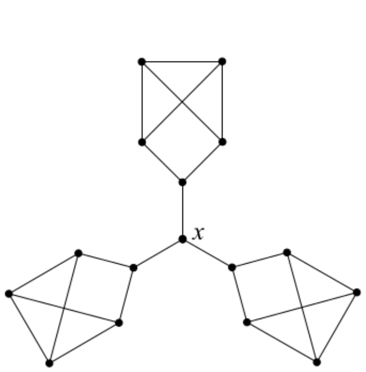
Доказательство. Иначе его можно было бы покрасить в $k - 1$ цвет алгоритмом выше. □

Замечание. Для графов K_n и C_{2n+1} оценка $\chi(G)$ в $\Delta + 1$ достигается.

Теорема 7.1.2 (Брукса (Brooks, 1941))**.** G – простой связный граф, не являющийся полным или нечётным циклом. Тогда $\chi(G) \leqslant \Delta$.

Доказательство. Пусть сначала G не k-регулярный. Тогда выберем в нём вершину, степень которой строго меньше Δ и дадим ей номер n. После чего запустим от неё bfs и отсортируем их в порядке убывания расстояния до вершины n. Таким образом т.к. граф связный, для каждой вершины кроме n будет существовать сосед с бльшим номером в порядке сортировки(иначе говоря, находящийся на меньшем расстоянии до вершины n). Теперь пройдёмся жадным алгоритмам по вершинам от 1 до n. У каждой, кроме n, на момент покраски будет не более $\Delta - 1$ уже окрашенного соседа (т.к. хотя бы один сосед имеет больший номер). Значит, можно будет выбрать минимальный отсутствующий среди соседей цвет. Наконец, мы дойдём до покраски n. Т.к. её степень была $< \Delta$, то у неё на этот момент тоже будет не более $\Delta - 1$ покрашенного соседа.

Пусть теперь граф G k-регулярный и в нём есть точка сочленения x. Тогда пусть H_i – подграфы, получаемые при удалении x. Расщепим вершину x на $(G - x)$ вершин x_i и рассмотрим подграфы, индуцированные множествами $x_i \cup V(H_i)$. В каждом из них есть вершина x_i степени 1. Т.к. мы рассматриваем графы с $\Delta > 1$, то по алгоритму выше каждый из таких подграфов можно покрасить в Δ цветов. После чего т.к. подграфы между собой независимы, то в каждом и них можно заменить(сдвинуть) цвета в правильной раскраске так, чтобы все вершины x_i стали одного цвета. После чего все эти подграфы можно соединить обратно по вершинам x_i и получить правильно покрашенный в Δ цветов граф G.



(a) (b)

Пусть теперь граф G k-регулярный, двусвязный с $\Delta \geqslant 3$ ($\Delta = 1$ и 0 – это графы K_1 и K_0, а при $\Delta = 2$ мы раскрашиваем цикл, который либо нечётный и мы исключили его в условии, либо чётный и его мы красить умеем). Позже мы докажем, что в двусвязном графе всегда найдётся вершина x у которой имеются два несмежных соседа y и z таких, что граф $G - y - z$ связен. Примем пока это за правду. Удалим из графа вершины z и y. Тогда, взяв вершину x за вершину n, мы снова можем запустить от неё поиск в ширину и расположить в порядке убывания расстояния до x. Теперь т.к. удаление y и z не изменило связности графа, если поставить их на места 1 и 2, то каждая вершина кроме x по-прежнему будет иметь хотя бы одного соседа с бльшим номером. Значит, все вершины, кроме x можно покрасить в Δ цветов. Вершины же y и z покрасятся в цвет 1. Значит, поскольку они соседи x, то среди её соседей будет хотя бы один неиспользованный цвет. Значит, все вершины можно покрасить в Δ цветов.

Осталось доказать, что такие вершины x, y и z существуют в нашем графе. Пусть граф трехсвязен. Тогда т.к. он отличен от K_n, в нём найдется пара несвязных вершин, смежных с некоторой общей вершиной x (по таинственной лемме из первой главы TODO). Т.к. граф трёхсвязный, то удаление z и y не повлияет на связность.

Пусть теперь $\kappa(G) = 2$. Выберем в G вершинно-разделяющее множество $|S| = 2$ и рассмотрим вершину $x \in S$. Так как $\kappa(G - x) = 1$, то граф $G - x$ можно разбить на дерево блоков и точек сочленения. У такого дерева будет хотя бы 2 листа B_1 и B_2 с соответствующими им точками сочленения v_1 и v_2. Тогда т.к. G двусвязный, то $\exists y \in (B_1 - v_1)$, смежная с x в графе $G - v_1$. И аналогично $\exists z \in (B_2 - v_2)$, смежная с x. По построению, y и z несмежны. Наконец, т.к. $\Delta \geqslant 3$, то x имеет хотя бы одного соседа в графе $G - y - z$. Тогда, т.к. y и z точками сочленения не являлись, то граф $G - y - z$ связный. Теорема Брукса доказана. □

***Определение* 7.1.3** (k-критический граф)**.** Граф, у которого $\chi(G) = k$, но $\forall H \subsetneq G\, \chi(H) < k$.

Утверждение 7.1.3. Минимальная степень $\delta(G)$ k-критического графа G больше или равна $k - 1$.

Доказательство. Пусть в графе есть вершина $deg(x) < k - 1$. Так как граф k-критический, то без вершины x его можно покрасить в $k - 1$ цвет. Теперь вернём вершину x на место. Т.к. у неё менее $k - 1$ соседей, то среди $(k - 1)$-го цвета найдётся тот, в который можно покрасить вершину x. Значит, граф G можно было покрасить в $k - 1$ цвет. Противоречие. □

Утверждение 7.1.4. В k-критическом графе отсутствуют точки сочленения.

Доказательство. Пусть нашлась точка сочленения x. Тогда проведём рассуждения, аналогичные приведённым в теореме Брукса. А именно, рассмотрим пографы G_i, полученные индуцированием G на множества $x_i \cup V(H_i)$, где H_i – это i-я компонента связности, полученная после удаления вершины x. Т.к. граф k-критический, то каждый G_i можно покрасить в $k - 1$ цвет так, чтобы x_i вершина была покрашена в цвет 1. Но тогда после совмещения этих подграфов мы получим G, правильно окрашенный в $k-1$ цвет. Противоречие. □

***Определение* 7.1.4.** Пусть S – вершинно разделяющее множество в графе G и $H_1, H_2, \dots, H_k$ – компоненты связности $G-S$. Подграфы G_i, индуцированные подмножествами вершин $S \cup V(H_i)$ называются S-компонентами графа G.

***Определение* 7.1.5.** Правильная раскраска S-компонент называется согласованной, если любая вершина S окрашена в один и тот же цвет в раскраске каждой из S-компонент графа G.

Утверждение 7.1.5. В любом k-критическом графе отсутствует вершинно-разделяющее множество S, являющееся кликой.

Доказательство. Из критичности, каждую из S-компонент можно покрасить в $k-1$ цвет. Далее, т.к. S – клика, то все цвета в её раскрасках разные и во всех раскрасках S-компонент можно их согласовать. Объединив получившуюся раскраску, получим раскраску G в $k-1$ цвет. Противоречие. □

Следствие. Если в k-критическом графе есть вершинно-разделяющее множество размера 2, то вершины этого множества должны быть несмежны.

Теорема 7.1.6 (Dirac)**.** Пусть G – k-критический граф, в котором есть вершинно-разделяющее множество $S = \{x, y\}$. Тогда G представляет собой объединение ровно двух S-компонент G_1 и G_2, у одной из которых при любой правильной окраске в $k-1$ цвет вершины x и y окрашены в один и тот же цвет, а у другой – в разные.

Доказательство. Действительно, пусть $S = \{x, y\}$, где x и y несмежны. Т.к. согласованной раскраски нет (иначе могли бы покрасить G в $k-1$ цвет), то существует хотя бы одна компонента G_1, любая правильная раскраска которой красит x и y в один цвет и одна компонента G_2, любая правильная раскраска которой красит x и y в разные цвета. И так как $G_1 \cup G_2$ уже не имеет раскраски в $k-1$ цвет, а граф G – k-критический, то третьей компоненты не существует. □

***Определение* 7.1.6.** Рассмотрим некоторую функцию $L : V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$, сопоставляющую вершине подмножество натуральных чисел $L(x)$. Правильная раскраска вершин графа G, при которой любая вершина $x \in V(G)$ окрашена в один из $L(x)$ цветов называется списочной раскраской или L-раскраской графа G. Граф, допускающий такую раскраску называется L-раскрашиваемым.

***Определение* 7.1.7.** Граф G списочно k-раскрашиваемый, если у него существует правильная L-раскраска для любых наборов множеств $L(x), x \in V(G)$, размер которых равен k. Наименьшее значение k, при котором граф G является списочно k-раскрашиваемым называется списочным хроматическим числом и обозначается как $\chi_L(G)$.

Теорема 7.1.7.

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) \Rightarrow \chi_L(G) \leqslant \Delta(G)$$

7.2. Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы

Утверждение 7.2.1. $\chi(G) \geqslant \omega(G)$, где $\omega(G)$ — количество вершин в наибольшей клике.

Однако граф с большим хроматическим числом имеет большую клику внутри себя, чему является иллюстрацией следующая

Теорема 7.2.2. (Мицельский, 1955) Для любого натурального числа k существует k-хроматический граф без треугольников.

Замечание. В графе без треугольников нет клик размера 3 $\implies$ $\omega(G) \leqslant 2$.

Доказательство. По индукции строим граф Грётцша. А именно. Пусть есть подходящий k-хроматический граф G_k. Добавим к множеству $V(G_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ столько же вершин $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и вершину z. Соединим вершину y_i со всеми соседями вершины x_i. Соединим вершину z со всеми вершинами y.

В этом графе нет треугольников. Действительно, вершины Y несмежны $\Rightarrow$ треугольник мог включать в себя не более одной вершины из Y. Вершину z он тоже содержать не может. Значит, остался только вариант $x_i y_j x_k x_i$. Но тогда в G_k был бы треугольник $x_i x_j x_k x_i$. А его не было.

Докажем, что получившийся граф G_{k+1} $(k+1)$-раскрашиваемый. Раскрасим G_k в k цветов. Раскрасим y_i в тот же цвет, что и x_i. Покрасим z в цвет $k{+}1$. Докажем, что не k-раскрашиваемый. Пусть можно покрасить в k, покрасим. Но тогда z покрашено в цвет, отличный от всех y. Тогда y покрашено в $< k$ цветов. Возьмем теперь каждый x_i, покрашенный в тот же цвет, что и z и перекрасим в цвет y_i. Это можно сделать т.к. y_i соединена со всеми соседями x_i. Теперь ни одна из вершин G_k не покрашена в тот же цвет, что и z. Значит, на покраску G_k можно было потратить меньше, чем k цветов. Противоречие. □

В подобном графе огромное число циклов длины 4 и более, поэтому может показаться, что большое число коротких циклов сильно влияет на хроматическое число графе. На самом деле нет.

Теорема 7.2.3. (Эрдёш, 1961) Для любого натурального k существует k-хроматический граф, обхват которого больше или равен k.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание. Хроматическое число — глобальное, а не локальное свойство графа.

Утверждение 7.2.4. $n^2/4$ — максимальное число рёбер в двудольном графе на n вершинах.

Утверждение 7.2.5. (Теорема Мантеля) В графе с $\geqslant n^2/4$ рёбер обязательно есть треугольники.

Доказательства в первой главе.

***Определение* 7.2.1.** Полный k-дольный граф $K_{n_1,\dots,n_k}$ — это граф в котором есть ребра $\iff$ вершины в разных долях.

Свойства.

1. $\chi(K_{n_1,\dots,n_k}) = k$
2. $|E(K_{n_1,\dots,n_k})| = \sum_{i\neq j} n_i n_j = ((\sum_i n_i)^2 - \sum_i n_i^2)/2$

***Определение* 7.2.2.** Граф Турана $T(n,k)$ — полный k-дольный граф на n вершинах с максимальным количеством рёбер.

Утверждение 7.2.6. Количество рёбер в графе Турана $M(n,k) = \frac{k-1}{2k}n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}$.

Замечание. Оптимальное число рёбер достигается в случае, когда имеется $n \bmod k$ долей размера $k+1$ и $n - n \bmod k$ долей размера k.

Это легко доказывается из формулы выше или рассуждения от противного: если есть две доли, которые отличаются хотя бы на 2, то можно улучшить ответ передав вершину из большей доли в меньшую.

Дальше остаётся только арифметика.

Теорема 7.2.7. (Туран, 1941) Пусть количество рёбер в простом графе G, построенном на $n = tk + r$ вершинах, больше числа $M(n,k)$.

Тогда G содержит клику размера $k+1$.

Доказательство. Рассмотрим множество графов, в которых $tk + r$ вершин и не содержащих клику размера $k+1$.

Пусть граф G имеет максимальное число рёбер среди всех графов этого множества, покажем, что $|E(G)| \leqslant M(n,k)$, индукция по $t = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

- База $t = 0$. $n < k$, $n = r$.

  Максимальном по числу рёбер является полный граф K_n.

  $E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

  $M(n,k) = \frac{k-1}{2k}n^2 - \frac{n(k-n)}{2k} = \frac{n(n-1)}{2}$

- Переход $(t-1) \to t$.

  По построению графа G, добавление любого ребра e к G приводит к появлению в $G + e$ клики размером $k+1$.

  Следовательно граф G содержит клику S размером k, оценим количество рёбер в G.

  - Внутри клики ровно $\frac{k(k-1)}{2}$ рёбер.
  - Из любой вершины вне S в клику ведёт не более $k-1$ ребра.
  - В графе $G - S$ количество вершин $n - k = (t-1)k + r$ можно оценить по индукции как $M(n,k) =$.

  Соберём все вместе:

  $E(G) \leqslant \frac{k(k-1)}{2} + (n-k)(k-1) + M(n-k,k) \leqslant \frac{k(k-1)}{2} + (n-k)(k-1) + \frac{k-1}{2k}(n-k)^2 - \frac{r(k-r)}{2k}$

  $E(G) \leqslant \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(k-1)(n^2-k^2)}{2k} - \frac{r(k-r)}{2k} \leqslant \frac{k-1}{2k}n^2 - \frac{r(k-r)}{2k} = M(n,k)$ □

Следствие. Пусть количество рёбер в простом графе G, построенном на $n = tk + r$ вершинах, больше числа $M(n,k)$. Тогда G невозможно правильно раскрасить в k цветов.

***Определение* 7.2.3.** Граф G называется совершенным, если для всех как для самого графа G, так и для любого его индуцированного подграфа $G[A]$, $A \subset V(G)$

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Пример. Полные и двудольные графы являются совершенными.

Теорема 7.2.8. (Слабая гипотеза Бержа или теорема о совершенных графах). Граф совершенен $\iff$ его дополнение $\bar{G}$ также является совершенным графом.

Доказательство теоремы чуть позже.

***Определение* 7.2.4.** Пусть C — цикл длины большей трёх. Тогда хордой цикла C называется ребро, не принадлежащее циклу C, концевые вершины которого лежат на цикле.

***Определение* 7.2.5.** Индуцированным циклом называется цикл C длины большей трёх, не имеющий хорд. Иначе говоря, это цикл длины большей трёх, являющийся индуцированным подграфом исходного графа G.

Теорема 7.2.9. (Сильная гипотеза Бержа) Граф G совершенен тогда и только тогда, когда ни G, ни его дополнение $\bar{G}$ не содержат индуцированных циклов нечётной длины.

Замечание. Теорема не запрещает совершенным графам иметь нечётные циклы длины 3.

Замечание. Слабая гипотеза Бержа следует из сильной (так как критерий сильной гипотезы симметричен относительно замены G на $\bar{G}$).

Доказательство опущено. Можно почитать статью Чудновски, Робертсона, Сеймура, Томаса от 2006 года.

***Определение* 7.2.6.** Кликовым покрытием (или вершинным кликовым покрытием) графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ вершин этого графа на блоки, при котором вершины каждого блока образуют клику в исходном графе.

***Определение* 7.2.7.** $\nu(G)$ это количество блоков в минимальном кликовом покрытии.

Замечание. Клика в $G \iff$ независимое множество в $\bar{G}$.

Утверждение 7.2.10. В простых графах $\chi(G) = \nu(\bar{G})$

Доказательство. Если у нас есть разбиение на клики, то в дополнении графа каждый элемент разбиения является независимым множеством, то есть его можно покрасить в один цвет.

Аналогично в другую сторону. □

Замечание. Аналогичное равенство $\chi(\bar{G}) = \nu(G)$.

Утверждение 7.2.11. Если граф G совершенный, то

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Это то же самое, что

$$\nu(\bar{G}[A]) = \alpha(\bar{G}[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Утверждение 7.2.12. Аналогично если граф $\bar{G}$ совершенный, то

$$\chi(\bar{G}[A]) = \omega(\bar{G}[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Это то же самое, что

$$\nu(G[A]) = \alpha(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Первое Берж предложил называть γ-совершенными графами, а второе α-совершенными графами. По слабой гипотезе Бержа эти понятия совпадают.

Утверждение 7.2.13. В простых графах $\alpha(G) \leqslant \nu(G)$

Доказательство. Из каждого блока можно взять не более одной вершины в независимое множество. □

Приступим к доказательству слабой гипотезы Бержа, но перед этим

***Определение* 7.2.8.** Пусть x есть произвольная вершина графа. Операция расширения этой вершины состоит в добавлении к множеству вершин графа новой вершины x', соединении её с x, а также со всеми вершинами, смежными с x.

Теорема 7.2.14. Расширение совершенного графа оставляет его совершенным.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по количеству вершин графа.

1. База $|V| = 1$, $G = K_1$.

   Расширение K_1 превращает его в K_2, который совершенный.

2. Пусть G произвольный совершенный граф, а G' его расширение по вершине x.

   Нужно доказать, что $\chi(G'[A]) = \omega(G'[A])$ для всех A.

   - Если $G'[A]$ не совпадает с G' и либо x, либо x' не принадлежит $G'[A]$, то $G'[A]$ является индуцированным подграфом совершенного графа G.
   - Если $G'[A]$ не совпадает с G' и содержит и x, и x', то это соответствует расширению некоторого подграфа исходного графа G, так как индуцированный подграф совершенного графа совершенен, то для $G'[A]$ верно предположение индукции.
   - Остаётся случай $G'[A] = G'$. Он разбивается на два случая: принадлежит ли x какой-нибудь максимальной клике в G или нет.

     Заметим, что так как $\chi(G) \geqslant \omega(G)$ для любого G то нам достаточно показать лишь обратное неравенство.
   - Пусть принадлежит, тогда кликовое число увеличилось на 1: $\omega(G') = \omega(G) + 1$.

     При этом $\chi(G') \leqslant \chi(G) + 1$ (так как можно просто покрасить x' в новый цвет).

     $\chi(G') \leqslant \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G')$.
   - Пусть не принадлежит, то есть $\omega(G') = \omega(G)$.

     Рассмотрим какую-нибудь раскраску графа G в $\chi(G)$ цветов, пусть S — это множество вершин того же цвета, что и x, не включая саму x.

     Тогда $S \sqcup \{x\}$ является независимым множеством, аналогично, так как x была расширена в x' независимым является и $S \sqcup \{x'\}$.

     Рассмотрим граф G' без $S \sqcup \{x'\}$, получим индуцированный подграф $G - S$ графа G.

     Заметим, что в графе G любая клика размером $\omega(G)$ окажется окрашенной во все $\chi(G) = \omega(G)$ цветов, а значит в любой максимальной клике есть вершина из множества S, в силу этого $\omega(G - S) \leqslant \omega(G) - 1$.

     Граф $G - S$ как индуцированный подграф G совершенен, значит $\chi(G - S) = \omega(G - S)$.

     Заметим, что в граф $G - S$ мы можем вернуть удалённые вершины, покрасив их в новый цвет, а значит $\chi(G') \leqslant \chi(G - S) + 1$.

     Итого, $\chi(G') \leqslant \chi(G - S) + 1 = \omega(G - S) + 1 \leqslant \omega(G) = \omega(G')$. □

Доказательство. (Слабой гипотезы Бержа) Предполагаем граф G совершенным, доказываем, что $\bar{G}$ совершенен.

Индукция по числу вершин, случай $n = 1$ тривиален.

Переход. Так любой индуцированный подграф подходит под индукционное предположение, то нам нужно только доказать, что $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, более того, как и раньше, достаточно показать лишь $\chi(\bar{G}) \leqslant \omega(\bar{G})$

Пусть $\mathscr{K}$ множество всех множеств вершин, образующих клику в графе G, а $\mathscr{A}$ — множество всех максимальных вершинно-независимых множеств.

Предположим, что $\exists K \in \mathscr{K}$, такой что $\forall A \in \mathscr{A} : K \cap A \neq \varnothing$. Тогда $\alpha(G - K) \leqslant \alpha(G) - 1$, то есть размер максимального независимого множества строго уменьшился. Но так как $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$, то $\omega(\bar{G} - K) \leqslant \omega(\bar{G}) - 1$.

Так как K клика в G, то она является независимым множеством в $\bar{G}$, значит потратив один цвет, можно продолжить любую раскраску $\bar{G} - K$ на $\bar{G}$, то есть $\chi(\bar{G}) \leqslant \chi(\bar{G} - K) + 1$.

Так как по индукционному предположению граф $\bar{G}$ совершенный, то имеем

$\chi(\bar{G}) \leqslant \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - k) + 1 \leqslant \omega(\bar{G})$.

Осталось показать, что такая клика существует.

Об этом рассказывает параграф *15.5.3*, который здесь пока не покрыт. □

7.3. Рёберная раскраска графов

***Определение* 7.3.1.** Правильная реберная раскраска — раскраска, при которой любые ребра, инцидентные одной и той же вершине, окрашены в разные цвета. $\chi'(G)$ — минимальное количество цветов, в которые можно правильно окрасить ребра графа.

Утверждение 7.3.1. Пример задачи на минимальную реберную раскраску:

Для любой пары из n команд известно, должны ли они играть между собой. Любая команда может провести лишь одну игру в неделю. Минимизируйте время проведения соревнований.

Один цвет = одна неделя игр.

Утверждение 7.3.2. В реберной раскраске рёбра одного цвета образуют паросочетание.

Минимальная рёберная раскраска — декомпозиция графа на минимальное число паросочетаний.

$$\chi'(G) \geqslant \frac{m}{\alpha'(G)}$$

Утверждение 7.3.3.

$$\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$$

Утверждение 7.3.4.

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

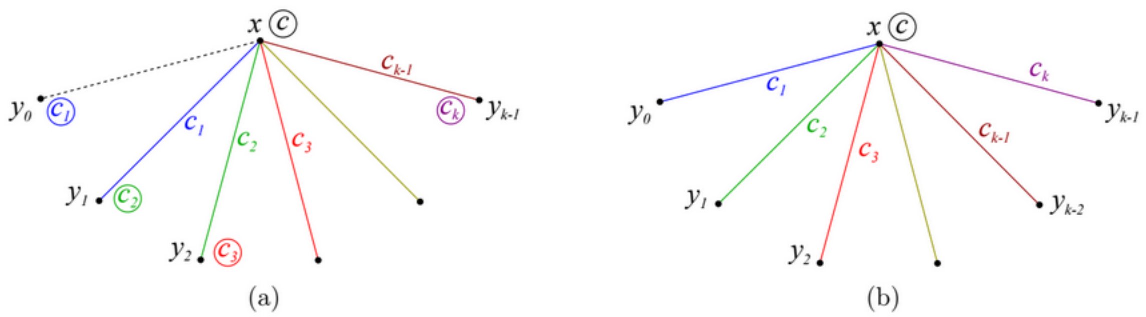
($L(G)$ — реберный граф.) Реберная раскраска — частный случай вершинной раскраски.

Теорема 7.3.5. (Визинг, Гупта) G — простой.

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

Доказательство. При правильной реберной раскраске все ребра, инцидентные одной и той же вершине, должны быть окрашены в разные цвета. Получили оценку снизу.

Теперь предположим, что ребра графа G невозможно окрасить в $\Delta(G)+1$ цвет. Выберем в G подграф H с максимально возможным количеством ребер, который допускает такую реберную окраску. Мы придем к противоречию, если нам удастся построить подграф, имеющий на одно ребро больше, чем H, который также можно реберно окрасить в $\Delta(G)+1$ цвет.



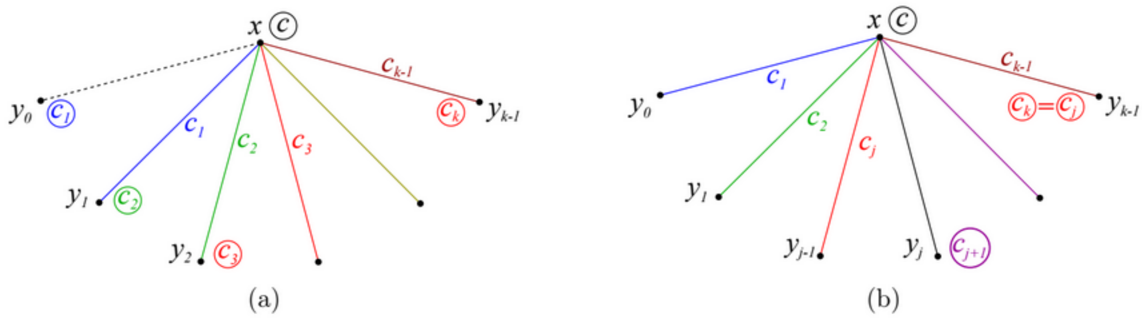
Согласно нашему предположению, в графе G существует ребро $\{x, y_0\} \notin E(H)$. Так как количество цветов, использованных при окраске ребер подграфа H, превосходит максимальную степень вершины $\Delta(G)$, то для вершины x найдется хотя бы один цвет c, не встречающийся при окраске инцидентных с x ребер, входящих в H. Мы будем говорить, что такой цвет не представлен в x. По тем же причинам, в вершине y_0 не представлен некоторый цвет c_1.

Если цвет c_1 не представлен и в вершине x, то мы можем добавить к подграфу H ребро $\{x, y_0\}$, окрашенное в цвет c_1, и получить правильную окраску подграфа $H \cup \{x, y_0\}$.

В противном случае в подграфе H имеется ребро $\{x, y_1\}$, окрашенное в цвет c_1. В вершине y_1 не представлен цвет c_2. Если этот цвет не представлен и в вершине x, то мы можем перекрасить ребро $\{x, y_1\}$ в цвет c_2, а ребро $\{x, y_0\}$ окрасить в цвет c_1. В результате мы вновь получим правильную окраску подграфа $H \cup \{x, y_0\}$.

В противном случае мы найдем ребро $\{x, y_2\}$, окрашенное в цвет c_2 и продолжим алгоритм.

На k-ом шаге мы придем к ребру $\{x, y_{k-1}\}$, окрашенному в цвет c_{k-1}. При этом цвет c_i не представлен в вершине y_{i-1}, $i \in [1, ..., k]$. В случае, если в вершине x не представлен цвет c_k, мы можем перекрасить ребро $\{x, y_{k-1}\}$ в цвет c_k, а цвета предыдущих ребер сдвинуть: ребро $\{x, y_{i-1}\}$, $i \in [1, k-1]$, перекрашивается в цвет c_i.



Если на каждом шаге мы приходим к разным ребрам, то алгоритм завершится не более, чем за $\deg(x)$ шагов. Однако может оказаться так, что не представленный в вершине y_{k-1} цвет c_k совпадет с одним из ранее встретившихся цветов c_j, $j < k-1$.

В этом случае сдвинем цвета $c_1, ..., c_j$ с ребер $\{x, y_1\}, ..., \{x, y_j\}$ на ребра $\{x, y_0\}, ..., \{x, y_{j-1}\}$, оставив ребро $\{x, y_j\}$ неокрашенным. Введем граф $S := H \cup \{x, y_0\} \setminus \{x, y_j\}$, имеющий одинаковое количество ребер с H, и рассмотрим в нем подграф S_{c,c_j}, индуцированный ребрами, окрашенными либо в цвет c, либо в цвет c_j. Каждая компонента такого подграфа представляет собой либо цикл четной длины, либо путь, в котором ребра разных цветов чередуются друг с другом. Покажем, что в подграфе S_{c,c_j} вершины y_j, y_{k-1} и x имеют степень, равную единице, а значит, не могут вместе лежать в одной и той же компоненте связности S_{c,c_j}.

Действительно, в вершине x не представлен цвет c, но представлен c_j, поэтому в подграфе S_{c,c_j} эта вершина является листом. В вершине y_{k-1} не представлен цвет $c_j = c_k$, но представлен c. В вершине y_j тоже представлен цвет c, а цвет c_j мы только что сдвинули.

Пусть x и y_j лежат в различных компонентах связности S_{c,c_j}. Тогда поменяем цвета c и c_j в компоненте, содержащей вершину y_j. После этой операции цвет c не будет присутствовать в y_j. Окрашивая ребро $\{x, y_j\}$ в цвет c, мы получаем правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_j\}$.

Теперь предположим, что вершины x и y_j лежат в одной компоненте связности S_{c,c_j}. Тогда вершина y_{k-1} там не лежит. Поменяв в компоненте, содержащей y_{k-1}, цвета c и c_j, а затем сдвинув цвета ребер $\{x, y_i\}$ на ребра $\{x, y_{i-1}\}, i = j+1, ..., k-1$, мы сможем окрасить ребро $\{x, y_{k-1}\}$ в цвет c и вновь получить правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_j\}$. □

***Определение* 7.3.2.** Простой граф G относится к первому классу, если $\chi'(G) = \Delta(G)$ и ко второму, если $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Теорема 7.3.6. (Обобщение, без доказательства.) G — граф с мультиребрами, $\mu(G)$ — максимальное количество ребер между двумя вершинами по всем парам вершин.

$$\chi'(G) \leqslant +\Delta(G) + \mu(G)$$

Следствие. (Шеннон) G — граф с мультиребрами.

$$\chi'(G) \leqslant (3/2) \cdot \Delta(G)$$

8. А я сказала, ещё короче!

Если вы уже прочли весь конспект и уверены в том, что готовы к экзамену, эта секция специально для вас. Здесь в кратком виде перечислено всё, что от вас хотят услышать в каждом билете. В частности, по нетривиальным теоремам предложены краткие идеи, необходимые при доказательстве.

Проверь себя!

P.S. Этот раздел вообще не претендует на адекватность, но утверждается, что если написанное здесь не вызывает у вас 1000WAT, то вы хоть сколько-нибудь знакомы с материалом.

8.1. Подсчёт остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях

Утв.:$t(G) = t(G - e) + t(G \backslash e)$

Матрица Кирхгофа $L = M_d - M_a$.

Лемма $L = M_i M_i^\top$.

Matrix tree theorem. $t(G) = \det(L^*)$ (подсказка: подматрица либо дерево, либо лин. зависимый цикл + Бине-Коши.)

$\lambda = 0$ – с.ч. L,

Утв.: $\lambda_1 = 0, t(G) = \frac{1}{n}\lambda_2 \dots \lambda_n$ (подсказка: посчитать определитель разными способами(в т.ч. через производную с минорами))

Корневое остовное дерево. $L^- = M_d^- - M_a, L^+ = M_d^+ - M^a$.

Теорема Татта: $t^- D, i = \det(L^-_{i,i})$ (подсказка: раскладывать по полилинейности, пока все $outdeg(x) > 1$, если уже так, взять лист)

Если удвоить и ориентировать рёбра, то $\forall x \in V(G) t(G) = t^-(D, x) = t^+(D, x)$

8.2. Эйлеровы циклы

Эйлеров путь/цикл/граф

Условия существования эйлерова цикла (подсказка: берём цикл, если не весь, крепим к нему прилежащий и т.д.). Условие эйлеровости орграфа.

Количество эйлеровых циклов в орграфе (подсказка: ребро в остовном дереве из вершины = последнее ребро, по которому мы пройдём в эйлеровом цикле из этой вершины, остальные – нумеровать)

Сл-е: количество ориентированных подходящих деревьев не зависит от выбора вершины.

Последовательности де Брейна: алгоритм поиска, количество таких последовательностей.

8.3. Гамильтоновы циклы

Гамильтоновы циклы.

Необходимые условия существования: связность, $\delta(G) > 1$, $c(G - S) \leqslant |S|$.

Достаточные условия существования: гамильтонов путь + $deg(x_1) + deg(x_n) \geqslant n$ (подсксазка: сходить назад по смежным). + сл-е про наиб. по включению путь.

Теорема Оре. Если для любых несмежных x и y $deg(x) + deg(y) \geqslant n - 1$, то есть гампуть (подсказка: взять путь -> в цикл -> продлить путь).

Утв (похоже на Оре): Если для любых несмежных x и y $deg(x) + deg(y) \geqslant n$, то есть гамцикл.

Теорема Дирака: степень вершин $\geqslant \frac{n-1}{2} \Rightarrow$ гампуть, $\geqslant \frac{n}{2} \Rightarrow$ гамцикл.

Утв: добавление ребра $\{x, y\}$ если $deg(x) + deg(y)$ не влияет на существование цикла.

Замыкание. Замыкание не зависит от порядка. Теорема Бонди-Чватала(?!) замыкание и сам граф содержат гамцикл или не содержат его одновременно.

Утв: $C(G) = K_n \Rightarrow Hamcycle$

Теорема Чватала(?!) $d_i \leqslant d_{i+1} \vee \forall i < \frac{n}{2} \wedge d_i > i \wedge d_{n-i} \geqslant n - i \Rightarrow$ гамцикл. (подсказка: ищем и оцениваем степени непар максимальной непары).

Дирак для орграфов. ССграф и $indeg(x), outdeg(x) \geqslant \frac{n}{2} \Rightarrow$ гамцикл.

Теорема: в любом турнире есть ориентированный гампуть (подсказка: индукция + 3 случая втыка).

8.4. Линейное пространство рёбер. Циклы и разрезы

Кодерево. Хорда остова. Фундаментальный цикл. Цикловый ранг. Скалярное произведение + орт. Декомпозиция графа (в т.ч. тривиальная и гамильтонова).

Теорема Веблена: Граф раскладывается на циклы $\iff$ чётный.

Утв. $H_1 \triangle H_2 = G$, H_1, H_2, G – чётны.

Пространство циклов. Фундаментальные = базис. Рёберно разделяющее множество. Рёберный разрез (в т.ч. минимальный).

Теорема: минимальный $\iff$ 2 компоненты.

Утв: Реберный разрез = дизъюнктное объединение минимальных.

Утв: $\partial(X) \triangle \partial(Y) = \partial(X \triangle Y)$. (подсказка: нарисуйте квадратик)

Пространство рёберных разрезов. Фундаментальный разрез = базис.

Утв: чётные пересечения как проверка на принадлежность пространствам. (подсказка: необходимость на базисе, достаточность через разложение на корёбрах).

Сл-е: пространства ортогональны друг другу.

И являются ортогональными дополнениями, если не пересекаются.

$|\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = (n - k) + (m - n + k) = m = |E|$, где k – число компонент

Числа Бетти. $n - m = \beta_0 - \beta_1$. Доказательство по индукции с удалением ребра.

8.5. Циркуляции и напряжения. Электрические сети

Взвешенный орграф. Циркуляция (в т.ч. в терминах матриц). Носитель функции. Связь циркуляций с циклами (необходимость наличия). Разложимость циркуляции на простые. Связь с разрезами. Напряжения.

Утв: нетривиальное напряжение содержит разрез (подсказка: взять разрез из одинаковых потенциалов).

Утв: Цикркуляции и напряжения ортогональны.

$dimB = n - 1, dimC = m - n + 1$

Закон Ома $u + h = Ri$, матрица Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа: $M_i i = 0$, $Ki = 0$

Второй закон Кирхгофа: $C^\top u = 0, C = (f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{e_{m-n+1}})$

Ад с нахождением токов и напряжений. (подсказка: разделить все матрицы и вектора исходя из того, что в C можно выделить единичную подматрицу. Затем первый закон Кирхгофа $\to$ второй закон $\to$ закон Ома)

Квадрирование прямоугольников.

8.6. Вершинная и рёберная связность графа.

Рёберная k-связность (и просто связность). Вершинная связность. Вершинно разделяющее множество. $\kappa(K_n) = n - 1$. Вершинная k-связность.

Теорема: $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$ (подсказка: взять рёберный разрез, ментально удалить все кроме одного ребра разреза, поудалять вершины.)

8.7. Двусвязные графы

Похожие рёбра (отношение эквивалентности). Блоки.

Равносильности вершинной двусвязности: любые два ребра лежат на одном цикле, любые две вершины лежат на одном цикле(подсказка: $1 \to 2$ похожесть соседних, $2 \to 3$ инцидентные рёбра, $3 \to 1$ пусть есть т. соч.).

Дерево блоков и точек сочленения. Алгоритм поиска точек сочленения.

Ручка подграфа. Разложение на ручки.

Утв: вершинная двусвязность $\iff$ разложение на ручки (подсказка: 1. ребро вместо ручки, 2. индукция по ручкам через циклы).

Замкнутая ручка. Рёберно двусвязный = ручки + замкнутые ручки (подсказка: дерево блоков и предыдущее утв.).

Разделение связного мультиграфа. Неразделяемый граф.

Утв: есть сильная ориентация $\iff$ рёберно двусвязный (посказка: ориентация моста ломает СС + используем разбиение на ручки).

8.8. k-связные графы. Теоремы Менегера и Уитни

Путь между множествами. Отделяющее множество.

Теорема: |мин. отделяющее X от Y множество| = #(попарно не пересекающиеся пути между X и Y) (подсказка: $l \leqslant k$, Поиграем с пересечениями X и Y. Если пусто, удалим ребро и от него если надо построим $X \neq R \neq Y$. Рассмотрим $G - Y \backslash R$, $G - X \backslash R$, состыкуем пути).

Вершинно разделяющее x и y множество (размер = $\kappa(x, y)$).

Теорема Менгера: x и y несмежны, $\kappa(x, y) = \#$(непересекающихся путей между x и y) (подсказка: $X = N(x)$, $Y = N(y)$ + теорема выше).

Теорема Уитни: k-связный $\iff$ между любыми $x \neq y$ есть k непересекающихся путей. (подсказка: несмежные – Менегер, смежные – убрать ребро $\Rightarrow$ либо снова Менегер, либо убранное ребро мост в $G - S$).

8.9. Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема (Рёберный Менегер): #(рёберно непересекающихся путей между x и y) = |минимальное рёберно разделяющее множество между x и y|

Теорема(Рёберный Уитни): граф рёберно k-связный $\iff$ любые $x \neq y$ связаны k рёберно непересекающимися путями.

Сток, исток, пропускная способность, сеть, поток, величина потока. Разрез.

Лемма (слабая двойственность): $val(f) \leqslant cap(S, T)$ (подсказка: заметить, что $f^+(S) - f^-(S) = f^+(s) = val(f)$)

Теорема Форда-Фалкерсона: мин разрез = мах поток (подсказка: показать, что max поток $\Rightarrow$ разрез. Заметить, что поток и разрез совпали. Тогда слабая двойственность.)

8.10. Понятие паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа

Паросочетание. Вершина, покрытая паросочетанием. Совершенное, максимальное ($\alpha'(G)$), наибольшее по включению. Чередующиеся пути, M-дополняющие пути.

Теорема Бержа: M максимально $\iff$ нет M-дополняющих путей (подсказка: симметрическая разность с максимумом).

Вершинное покрытие (минимальное = $\beta(G)$).

Лемма (слабая двойственность): $|M| \leqslant |K|$, где K – вершинное покрытие (а ещё $\alpha'(G) \leqslant \beta(G)$).

Независимое множество (максимальное = $\alpha(G)$). Число независимости. Рёберное покрытие (минимальное = $\beta'(G)$).

Лемма (ещё слабая двойственность): |независимое множество| $\leqslant$ |рёберного покрытия| (в частности, $\alpha(G) \leqslant \beta'(G)$)

Кликовое число. $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

Теорема: S независимое $\iff$ $V(G) \backslash S$ вершинное покрытие (сл-е: $\alpha(G) + \beta(G) = n$)

Лемма: рёберное покрытие = объединение звёзд.

Теорема(Gallai): $\delta(G) > 0 \Rightarrow \alpha'(G) + \beta'(G) = n$ (подсказка: 1. допокрываем непокрытое, 2. вспоминаем и считаем звёзды)

8.11. Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе.

Алгоритм Куна.

Теорема Кёнинга-Эгервари: $\alpha'(G) = \beta(G)$ (подсказка: добавим x, y, рёбра парсоча $\leftrightarrow$ непересекающиеся пути (x, y); вершинные покрытия $\leftrightarrow$ разделяющие x и y множества. Внезапно, Менегер.)

Теорема: алгоритм Куна корректен(подсказка: доказывается через то, что в полученном сочетании $|M| = |K|$)

M-чередующееся дерево. X-насыщенное паросочетание. $N(S)$.

Теорема Холла: X-насыщенно есть $\iff$ $\forall S |N(S)| \geqslant |S|$ (подсказка: количество вершин из X $(= S)$ в M-дереве на одну больше, чем из Y $(= N(S))$. противоречнули)

Сл-е $|X| = |Y|$ + т. Холла = сов. паросочетание.

8.12. Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта.

Нечётная компонента.

Теорема Татта. $|S| \geqslant c_{odd}(G - S)$ (подсказка: насытить + доказать лемму о полных при удалении степеней $n - 1$ (подсказка: нет одного ⇒ нет двух, силить два совершенных) + построить совпарсоч)

Лемма: $c_{odd}(G - S) - S \equiv n (\mathtt{mod}\ 2)$ (подсказка: рассмотреть, что получается от удаления S и посчитать)

Теорема Петерсона: кубический граф с $\leqslant 2$ мостов ⇒ совпарсоч (подсказка: вершин чётно ⇒ $c_{odd}(G - S) \geqslant |S| + 2$ + посчитать рёбра из S до нечётных)

Теорема Плесника: k-регулярный, $(k - 1)$-связный, вершин чётно ⇒ если удалить $\leqslant (k - 1)$ ребро, то есть совпарсоч

Утв: n неч ⇒ $\det Matx_{n\times n} = 0$. (подсказка: опять транспонируешь)

Пфаффиан. Определитель через пфаффиан. Слагаемые ↔ совпарсочи. Матрица Татта (+ алгоритм проверки на совпарсоч). Пфаффова ориентация.

Теорема: у планарного графа за полином можно найти пфаффову ориентацию. (сл-е: у него можно посчитать кол-во совпарсочей)

k-фактор, f-фактор. Построение адового графа.

Теорема: есть f-фактор $\iff$ в адовом графе есть совпарсоч. (подсказка: нарисовать адов граф и увидеть)

8.13. Максимальные паросочетания в произвольном графе. Структурная теорема Галлаи-Эдмондса. Алгоритм Эдмондса

Барьер. Дефицит. $def(G) = n - 2\alpha'(G)$

Лемма: $\forall M, S\ |M| \leqslant \frac{1}{2}(n - (c_{odd}(G - S) - |S|))$ (подсказка: разбить рёбра парсоча на внутри $G - S$ и хотя бы один концом в S. Оценить)

Теорема Бержа: $def(G) = \max_{S\subset V(G)} c_{odd}(G - S) - |S|$ или $\alpha'(G) = \frac{1}{2}(n - \max_{s\subset V(G)}(c_{odd}(G - S) - |S|))$ (подсказка: взять и достроить граф вот этим максимумом из формулы вершин. Понять, что там есть совпарсоч.)

Лемма: Барьер T максимален ⇒ все компоненты в $G - T$ нечётны (подсказка: от противного превратить в нечётную)

Фактор-критический граф.

Лемма: T – max барьер ⇒ все компоненты $G - T$ фактор-критические (подсказка: проверяем по Татту, пользуемся максимальностью барьера)

Двудольный граф по барьеру.

Лемма: T – max барьер ⇒ в $H(G, T)$ есть X-насыщенное паросочетание. (подсказка: лемма Холла + $|Y \backslash N(S)| \leqslant c_{odd}(G - (T \backslash S))$ + побаловаться с множествами... хз, как это лучше написать)

Утв о структуре графа: Есть $\max T, \max M$. Тогда в графе $c_{odd}(G - T) - |T|$ не покрытых M вершин, по одной в каждой компоненте $c(G - T)$, $|T|$ компонент сочетаются по одной вершине с T + совпарсоч, остальные выкидывают одну и получают совпарсоч.

Декомпозиция Галлаи-Эдмондса.

Теорема (структурная теорема Галлаи-Эдмондса):

1. Компоненты C чётны
2. Вершины x однозначно берут по компоненте D
3. Компоненты D – фактор-критические
4. $\varnothing \neq S \subset A \Rightarrow$ в $N_G(S)$ есть хотя бы по вершинке от $|S|+1$ компонент G_i
5. A – барьер и $c_{odd}(G-A) = k$

(подсказка: если вам попадается этот билет, проще умереть... а вообще, $R = \max_{S \subset T}\{S = N(S)\}$, $A = T \backslash R$, $D = V(G) \backslash (T \cup N(R)$, $C = R \cup N(R)$, + док-во пятого пункта через дефицит и барьерность T).

Сл-е: граф фактор-критический $\iff$ $A = \varnothing$ – единственный барьер.

Стебли, базы и цветки...

Алгоритм сжатия соцветий. Построение A, B и C из максимального паросочетания.

8.14. k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

k-раскрашиваемый граф. Хроматическое число. Покраска в $\Delta+1$ цвет. $\chi(G) \leqslant \Delta+1$. $\chi(G) = k \Rightarrow \exists x : deg(x) \geqslant k-1$.

Теорема Брукса: не K_n и не $C_{2n+1} \Rightarrow \chi(G) = \Delta$ (подсказка: нерегулярный покрасить, с точкой сочленения покрасить через неё, двусвязный: есть вершина с несмежными соседями (подсказка: дерево блоков), покрасим)

k-критический граф.

В k-критических $\delta(G) \geqslant k-1$ (подсказка: уберём, покрасим, вернём)

В k-критических нет точек сочленения (подсказка: как в бруксе)

Вершинно-разделяющее множество. Согласованная покраска.

В k-критических нет вершинно-разделяющих клик. (подсказка: можно согласовать)

Сл-е: если 2 вершины разделяют, то они несмежны.

Теорема Дирака: k-критический, $S = \{x, y\} \Rightarrow G = G_1 \cup G_2$, которые красятся по-разному (подсказка: G_1 и G_2 существуют т.к. нельзя покрасит лучше + больше нет т.к. критический)

Списочная раскраска, списочно раскрашиваемое, списочно k-раскрашиваемое. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) \Rightarrow \chi_L(G) \leqslant \Delta(G)$

8.15. Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы.

$\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

Теорема Мицельского: $\forall k \in \mathbb{N}$ есть k-хроматический граф без треугольников. (подсказка: индукция: добавляем всё и ещё одну.)

Теорема Эрдёша: $\forall k \in \mathbb{N} \exists G : \chi(G) = k$ и обхват $G \geqslant k$

Утв: $\frac{n^2}{4}$ – max рёбер в двудольном графе. В графе с таким числом рёбер есть треугольники. (подсказка: это не в этой главе)

Полный k-дольный граф $K_{...k}$. $\chi = k$. $E = \sum_{i \neq j} n_i n_j$. Граф Турана. $n = tk + r \Rightarrow M(n, k) = \frac{k-1}{2k} n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}$. Оптимум.

Теорема Турана. $E > M(n, k) \Rightarrow$ есть клика размера $k + 1$.(подсказка: индукция по t + выделить в графе клику размера k)

Сл-е: $E > M(n, k) \Rightarrow \chi > k$

Совершенный граф.

Хорда цикла. Индуцированный цикл.

Теорема сильная гипотеза Бержа: совершенен $\iff$ и в G и в $\overline{G}$ нет индуцированных циклов нечётной длины.

Кликовое покрытие ($= \nu(G)$).

Утв: граф прост $\Rightarrow \chi(G) = \nu(\overline{G})$.

Утв: G совершенный $\Rightarrow \chi(G) = \nu(\overline{G}) = \alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ (γ-совершенный).

Утв: $\overline{G}$ совершенный $\Rightarrow \nu(G) = \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G}) = \nu(G)$ (α-совершенный).

Утв: В простых $\alpha(G) \leqslant \nu(G)$.

Расширение вершины.

Теорема расширение совершенного графа совершенно(подсказка: индукция по графам + принадлежность x клике + неравенство $\chi(G') \geqslant \omega(G')$)

Теорема слабая гипотеза Бержа: совершенен $\iff$ дополнение совершенно. (подсказка: взять клику, которая пересекается со всеми независимыми множествами, удалить её и пооценивать $\overline{G}$ + доказать, что такая найдётся(подсказка: мульти $A \leftrightarrow K$, построить H где $k(x) > 0$, построить H' расширением, магией вуду показать что он несовершенен))

8.16. Рёберная раскраска графов.

Рёберная раскраска. Раскраска и паросочетания.

Утверждения: $\chi'(G) \geqslant \frac{m}{\alpha'(G)}$, $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$, $\chi'(G) = \chi(L(G))$

Теорема Визинга: G – простой, $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ (подсказка: либо получается всё сдвинуть, либо цикл и сдвиг + индуцированный граф + перекраска пути (возможно ещё сдвиг))

Первый и второй класс.

Теорема $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$. $\mu(G) =$ макс. кратность.

Сл-е Шеннон: $\chi'(G) \leqslant \frac{3}{2}\Delta(G)$