Математический анализ

Никифоровская Анна

21 июня 2018 г.

Содержание

1. 13. Теория функций комплексной переменной

1.1. §1. Голоморфные функции.

13.02.2018

Ω – область в $\mathbb{C}$. (открытое линейно связное множество)

$f \ : \ \Omega \to \mathbb{C}$

***Определение* 1.1.**

$z_0 \in \Omega$, f – голоморфна в точке z_0, если существует предел

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

***Определение* 1.2.**

f – комплексно дифференцируема в точке z_0, если

$f(z) = f(z_0) + k \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$.

Замечание.

Как и в вещественной ситуации голоморфность и дифференцируемость связаны. А именно, $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'$

Свойства.

1. f, g голоморфны в точке z_0, тогда $\alpha f + \beta g$ голоморфно в точке z_0.
2. f, g – голоморфны в точке $z_0 \implies fg$ голоморфно в точке z_0 и причем $(fg)'(z_0) = f'g(z_0) + fg'(z_0)$
3. f, g – голоморфны в точке z_0 и $g(z_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ голоморфно в точке z_0.
4. f – голоморфно в точке z_0, g голоморфна в точке $f(z_0)$, то $g \circ f$ голоморфно в точке z_0 и $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Пример.

e^z

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z-z_0} = e^{z_0} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{e^{z-z_0}-1}{z-z_0} = e^{z_0} \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^{z_0} \lim\limits_{x,y \to 0} \frac{e^x e^{iy}-1}{x+iy}$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1 + iy + o(y)$

***Определение* 1.3.**

$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Замечание.

Связь вещественного и комплексного дифференцирования.

$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$

$$\begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0,y_0) \\ h(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \|)$$

$k = \alpha + i\beta$

$k(z - z_0) = (\alpha + i\beta)(x - x_0 + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) \\ \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) \end{pmatrix}$$

Получили, что комплексная дифференцируемость – это вещественная дифференцируемость плюс условие $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$.

Это условие Коши-Римана.

Замечание.

$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$

$k = |\, k \,| \cdot e^{i\varphi}$

Замечание.

$f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

$f'(z_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

$f'(z_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{f({}_0x + iy) - f(x_0 + iy_0)}{iy - iy_0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Отсюда условие, что из голоморфмности в точке z_0 следует $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Что то же условие Коши-Римана.

***Определение* 1.4** (Обозначение)**.**

$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$

Замечание - мотивация.

$d_{z_0} f = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$

$dz = d(x + iy) = dx + idy$

$d\overline{z} = d(x - iy) = dx - idy$

Получили новый базис, в котором можно все выразить.

Замечание.

f – голоморфна $\iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(f'(z_0) + f'(z_0)) = f'(z_0)$

Теорема 1.1.

$f \;:\; \Omega \to \mathbb{C} \;\; z_0 \in \Omega \;\;\; f$ вещественно дифференцируема в точке z_0.

Тогда следующие условия равносильны:

1. f – голоморфно в точке z_0.
2. $d_{z_0} f$ – комплексно линейна.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

4. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

5. $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$

   $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}$

***Определение* 1.5.**

$H(\Omega)$ – множество функций $f\ :\ \Omega \to \mathbb{C}$, голоморфных во всех точках из Ω.

Следствие.

$f \in H(\Omega)$ и $\operatorname{Re} f \equiv const$

$\implies f \equiv const$

Доказательство.

$0 = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$

$0 = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}$

$\implies \operatorname{Im} f \equiv const$ □

Теорема 1.2 (Теорема Коши)**.**

$f \in H(\Omega) \implies f(z)\,dz$ – локально точная форма.

Доказательство. Для случая непрерывных частных производных.

Если частные производные непрерывны, то замкнутость $\iff$ локальная точность.

$P\,dx + Q\,dy$ – замкнута $\overset{def}{\iff} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$f\,dx + if\,dy$ – замкнута $\iff \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (if)}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ □

Доказательство. Для общего случая.

Нужно проверить, что интеграл по любому достаточно маленькому прямоугольнику равен нулю.

Берем в качестве окрестности точки x круг, помещающийся в Ω.

Пусть для некоторого прямоугольника P

$\alpha(P) := \int\limits_P f\,dz \neq 0$

(направление стандартное, против часовой стрелки)

Разрежем этот прямоугольник на 4 штуки. Двумя разрезами. $P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}$.

Заметим, что $0 \neq \alpha(P) = \alpha(P_I) + \alpha(P_{II}) + \alpha(P_{III}) + \alpha(P_{IV})$

$0 < |\,\alpha(P)\,| \leqslant |\,\alpha(P_I)\,| + |\,\alpha(P_{II})\,| + |\,\alpha(P_{III})\,| + |\,\alpha(P_{IV})\,|$

Для какого-то из маленьких прямоугольников верно, что $|\,\alpha(P_?)\,| \geqslant \frac{1}{4}\,|\,\alpha(P)\,|$

Назовем этот прямоугольник P_1. Т.к. его интеграл не 0, то можем снова повторить такую операцию и следующий выбранный прямоугольник назовем P_2 и т.д.

$|\,\alpha(P_k)\,| \geqslant \frac{1}{4}\,|\,\alpha(P_{k-1})\,|$

$|\,\alpha(P_k)\,| \geqslant \frac{1}{4^k}\,|\,\alpha(P)\,|$

Возьмем точку z_0, принадлежащую всем прямоугольникам в этом ряду.

f – голоморфна в этой точке, а значит

$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0)$

$\int\limits_{P_k} f(z)\,dz = \int\limits_{P_k} f(z_0)\,dz + \int\limits_{P_k} A(z-z_0)\,dz + \int\limits_{P_k} o(z-z_0)\,dz$

Заметим, что $\int\limits_{P_k} f(z_0)\,dz = 0$, т.к. интеграл по замкнутому контуру от константы.

$\left|\int\limits_{P_k} o(z-z_0)\,dz\right| \leqslant \max|\,o(z-z_0)\,| \cdot \text{периметр}(P_k) = o(\text{периметр}(P_k)^2) = \frac{1}{4^k}(\text{периметр}(P)^2)o(1)$

$\int\limits_{P_k} A(z-z_0)\,dz = 0$, из первого доказательства, например. (Т.к. все непрерывно дифференцируемо)

$\frac{1}{4^k}\,|\,\alpha(P)\,| \leqslant |\,\alpha(P_k)\,| = o(1)\cdot\frac{1}{4^k}\cdot(\text{периметр}(P)^2)$

Получили, что $o(1)\cdot(\text{периметр}(P)^2) \geqslant |\,\alpha(P)\,| > 0$.

Противоречие.

□

Следствие.

1. $f \in H(\Omega) \implies$ у любой точки $x_0 \in \Omega$ есть окрестность, в которой существует голоморфная функция F, т.ч. $F' = f$.

   Доказательство.
   $f\,dz = f\,dx + if\,dy$

   F – первообразная $f \implies \frac{\partial F}{\partial x} = f \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = if$

   $\implies F$ – голоморфная и $\frac{\partial F}{\partial x} = F' = f$ □

2. $f \in H(\Omega) \implies \int\limits_{\gamma} f\,dz = 0$, если γ – стягиваемая кривая.

Теорема 1.3.
Δ – горизонтальная или вертикальная прямая.

$f \in C(\Omega)$ и $f \in H(\Omega \setminus \Delta)$.

$\implies f\,dz$ – локально точная.

Доказательство.
Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику равен нулю. Если прямую не задевает, то и ладно, пользуемся предыдущим. Осталось показать для пересекающих эту прямую прямоугольников. Но прямая разбивает такие прямоугольники на два, касающихся ее. Если для них докажем, что интеграл по ним 0, то и все вместе докажем.

Порежем еще немножко прямоугольник так, чтобы он прямой не касался. Пусть мы порезали его на δ (т.е. граница, которая раньше касалась, теперь на расстоянии δ от прямой).

(считаем что прямая горизонтально проходит, отрезок исходного прямоугольника на прямой I, то во что он перешел – $\tilde{I}$. И остаются два вертикальных отрезка.)

Покажем, что для любого ε можно выбрать такую δ, что

$\left|\int\limits_{P} f\,dz - \int\limits_{P_\delta} f\,dz\right| < \varepsilon$

$\left|\int\limits_{P} f\,dz - \int\limits_{P_\delta} f\,dz\right| = \left|\int\limits_{\text{верт. отрезки}} + \int\limits_{I} - \int\limits_{\tilde{I}}\right| \leqslant \left|\int\limits_{\text{верт. отрезки}}\right| + \left|\int\limits_{I} - \int\limits_{\tilde{I}}\right|$

$$\left| \int\limits_{\text{верт. отрезки}} \right| \leqslant 2\delta \cdot M < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ где } M := \max_{z \in P} |\, f(z)\, |$$

При достаточно малых δ.

$$\left| \int\limits_I - \int\limits_{\tilde{I}} \right| = \left| \int\limits_I (f(z) - f(z + i\delta)\, dz \right| = \left| \int\limits_I (f(x+iy) - f(x+iy+i\delta))\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_I |\, f(x+iy) - f(x+iy+i\delta)\, |\, dx \leqslant \varepsilon \cdot \text{длина } I$$

f равномерно непрерывна на P

$\implies$ для достаточно малых δ, если расстояние между точками $\leqslant \delta$, то расстояние между значениями $< \varepsilon$. □

Следствие.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна и голоморфна в Ω за исключением изолированных точек $\implies f\, dz$ локально точная.

Доказательство.

Внутри каждой окрестности изолированной точки, можно через эту точку провести прямую горизонтальную, например, и воспользоваться предыдущей теоремой. □

28.02.2018

***Определение* 1.6.**

Индекс кривой относительно точки.

$\operatorname{Ind}(\gamma, a) \quad a \notin \gamma \quad \gamma$ – замкнутая кривая.

$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

Параметризация γ в полярных координатах, $r, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

Замечание.

Индекс можно посчитать, проведя какой-нибудь луч и посчитав число пересечении с кривой с учетом ориентации.

Теорема 1.4.

$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$, где γ – кусочно гладкая замкнутая кривая.

Доказательство.

$z = r(t) \cdot e^{i\varphi(t)}$

$dz = (r'(t) e^{i\varphi(t)} + r(t) \cdot i \cdot \varphi'(t) \cdot e^{i\varphi(t)})\, dt$

$\frac{dz}{z} = (\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t))\, dt$

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_a^b (\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t))\, dt = \ln r(t) \Big|_a^b + i\varphi(t) \Big|_a^b = 0 + i(\varphi(b) - \varphi(a)) = 2\pi \cdot i \cdot \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$$ □

Следствие.

$a \notin \gamma$ – кусочно гладкая замкнутая кривая.

$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a)$

Теорема 1.5 (Интегральная формула Коши)**.**

$a \notin \gamma$, γ – кусочно гладкий стягиваемый замкнутый путь в Ω.

$f \in H(\Omega)$.

Тогда $\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i \cdot f(a) \cdot \mathrm{Ind}(\gamma, a)$

Доказательство.

$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$

$g(z) \in C(\Omega)$, более того $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$

$\implies g(z)\, dz$ – локально точная форма $\implies \int\limits_\gamma g(z)\, dz = 0$

$\implies \int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = 0 \implies$

$\implies \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int\limits_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\, dz = f(a) \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(\gamma, a)$ □

Пример.

f – голоморфна в окрестности круга.

$$\int\limits_{\text{граница круга}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{если } a \text{ лежит в круге} \\ 0 & \text{если не лежит} \end{cases}$$

***Определение* 1.7.**

$\mathbb{T} = \{|\, z\,| = 1\}$

$r\mathbb{T} = \{|\, z\,| = r\}$

С обходом против часовой стрелки

$\mathbb{D} = \{|\, z\,| < 1\}$ $\overline{\mathbb{D}} = \{|\, z\,| \leqslant 1\}$

$r\mathbb{D} + a = \{|\, z - a\,| < r\}$

Теорема 1.6.

$f \in H(R\mathbb{D}) \implies f$ – аналитична в круге $R\mathbb{D}$.

Замечание.

Аналитична = раскладывается в степенной ряд.

Доказательство.

$0 < r_1 < r_2 < R$

Возьмем точку z, т.ч. $|\, z\,| < r_1$.

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{\zeta})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$

$\left| \frac{z}{\zeta} \right| = \frac{|\, z\,|}{r_2} < \frac{r_1}{r_2} < 1$

Заметим, что тогда ряд сходится равномерно, а значит можно будет переставлять знаки интегрирования и суммирования:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r_2\mathbb{T}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{r_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \cdot z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Формула для коэффициентов $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$ □

Следствие.

1. $f\ :\ \Omega \to \mathbb{C}$
   $f \in H(\Omega) \iff f$ – аналитична в Ω.
2. $f \in H(\Omega) \iff f$ – бесконечно дифференцируема в Ω.
3. $f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$

***Определение* 1.8.**
$g\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ гармоническая, если g дважды дифференцируема в Ω и $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$
$(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0)$

Следствие.

4. $f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ – гармонические функции.

   Доказательство.
   $f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ бесконечно дифференцируема $\implies$
   $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$
   $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}$
   $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x \partial y}$
   $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x \partial y}$

□

Замечание.
Если g – гармоническая в Ω функция, то существует единственная с точностью до аддитивности константы гармоническая в Ω функция h, т.ч. $g + ih \in H(\Omega)$.

Теорема 1.7 (Мореры)**.**
$f \in C(\Omega)$ и $f(z)\, dz$ локально точная.
$\implies f \in H(\Omega)$.

Доказательство.
$f(z)\, dz$ – локально точная $\implies \forall a \in \Omega$
существует окрестность, в которой у $f(z)\, dz$ есть первообразная
$\implies F' = f \quad F$ определена в окрестности точки a.
$\implies F$ голоморфна в окрестности точки a.
$\implies F' = f$ – голоморфна в окрестности точки a.
$\implies f \in H(\Omega)$. □

Следствие.
$f \in C(\Omega) \quad \Delta$ – прямая параллельная вещественной(мнимой) оси.
$f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f \in H(\Omega)$

Доказательство.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta) \overset{\text{следствие т.Коши}}{\Longrightarrow} f(z)\,dz$ – локально точная форма в Ω.

$f \in C(\Omega)$.

$\overset{\text{т.Мореры}}{\Longrightarrow} f \in H(\Omega)$ □

Пример.

$f \in H(\Omega) \quad a \in \Omega$

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

$\Longrightarrow g \in H(\Omega)$.

Теорема 1.8 (интегральная формула Коши)**.**

$f \in H(\Omega) \quad K \subset \Omega \quad K$ – компакт с кусочно-гладкой границей.

Тогда

1. $\int\limits_{\partial K} f(z)\,dz = 0$

2. Если $a \notin \partial K$, то $\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{если } a \notin K \\ 2\pi i f(a) & \text{если } a \in \operatorname{Int} K \end{cases}$

Доказательство.

1. $\int\limits_{\partial K} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial K} f(z)\,dx + if(z)\,dy = \int\limits_{K} (i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dx\,dy = 0$

   Т.к. условие Коши-Римана $(i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$.

2. Если $a \notin K$, то $\frac{f(z)}{z-a}$ голоморфна в окрестности K.

   Если $a \in \operatorname{Int} K$, возьмем $\overline{B}_\varepsilon(a) \subset \operatorname{Int} K$

   $\tilde{K} := K \setminus B_\varepsilon(a)$ – компакт с кусочно гладкой границей.

   $a \notin \tilde{K} \implies \int\limits_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$

   $\int\limits_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0 = \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$

   $\implies \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$

□

Теорема 1.9.

$f \; : \; \Omega \to \mathbb{C}$ следующие условия равносильны.

1. $f \in H(\Omega)$

2. f – аналитична в Ω.

3. f – бесконечно дифференцируема.

4. $f(z)\,dz$ – локально точная.

5. $f(z)\,dz$ – замкнутая

6. $f \in C(\Omega)$ и интеграл по любому достаточно маленькому контуру равен 0.

Доказательство.
Уже знаем:

$1 \iff 2$ и $1 \iff 3$

$1 \implies 4$ теорема Коши

$4 \implies 1$ теорема Мореры

$4 \iff 6$ предыдущий семестр

$5 \implies 4$ предыдущий семестр

$4 \implies 3$ локальная точность $\implies$ локальная точность + бесконечная дифференцируемость $\implies$ замкнутость. □

Теорема 1.10 (Неравенство Коши).
$f \in H(R\mathbb{D})$ и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Тогда для $0 < r < R$:

$M(r) := \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$

Тогда $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$

Доказательство.
$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$

$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{r\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max\limits_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \right| = r \max\limits_{|\zeta|=r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}$

□

***Определение* 1.9.**
$f \in H(\mathbb{C}) \overset{def}{\iff} f$ – целая функция

Теорема 1.11 (Луивилля).
f – целая и ограниченная функция $\implies f \equiv const$

Доказательство.
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad M := \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| < +\infty$

$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n} \underset{r\to+\infty}{\to} 0 \implies a_n = 0$ при $n \neq 0$. □

01.03.2018

Теорема 1.12 (Основная теорема алгебры).
Если p – многочлен степени $\geqslant 1$, то у p есть корень.

Доказательство.
От противного. Пусть $p(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$

$f(z) := \frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$

Докажем, что f ограничена.

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \quad a_n \neq 0$

$R := \frac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_1|+|a_0|}{|a_n|} + 1 \geqslant 1$

Рассмотрим $|z| > R$. Оценим снизу $|p(z)|$.

$|p(z)| \geqslant |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| \geqslant |a_n z^n| - (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + ... + |a_1| + |a_0|)|z|^{n-1} \geqslant$

$\geqslant |z|^{n-1}|a_n|(|z| - \frac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+...+|a_1|+|a_0|}{|a_n|}) \geqslant |a_n|$

$\implies |f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leqslant \frac{1}{|a_n|}$ при $|z| \geqslant R$.

В круге $|z| \leqslant R$ функция непрерывна, а значит тоже ограничена.

$\implies |f|$ ограничена.

$\implies$ по теореме Лиувилля $f \equiv const \implies p \equiv const$. Получили противоречие с тем, что $\deg p \geqslant 1$ □

1.2. §2. Теоремы единственности

Лемма.

Ω – область и $E \subset \Omega$.

Если E – открыто в Ω и замкнуто в Ω, то $E = \Omega$.

Доказательство.

Пусть $E \neq \Omega$. $\implies \exists a \in E \;\; b \in \Omega \setminus E$

Ω – линейно связно $\implies \exists$ кривая, соединяющая точки a и b.

$\gamma \;:\; [\alpha, \beta] \to \Omega \quad \gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b$

$\gamma^{-1}(E)$ – прообраз открытого множества $\implies$ открытое в $[\alpha, \beta]$.

$\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$ – прообраз открытого множества $\implies$ открытое в $[\alpha, \beta]$.

$\gamma^{-1}(E) = [\alpha, \beta] \setminus \gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$ – замкнутое множество.

$c := \sup \gamma^{-1}(E) \in \gamma^{-1}(E)$, но $\beta \notin \gamma^{-1}(E) \implies c < \beta$.

Из того, что $\gamma^{-1}(E)$ – открыто и $c \in \gamma^{-1}(E)$ следует, что $(c - \delta, c + \delta) \subset \gamma^{-1}(E)$. Но тогда $c \neq \sup$. Противоречие.

Значит, $E = \Omega$. □

Теорема 1.13 (единственности)**.**

$f \in H(\Omega) \;\; z_0 \in \Omega$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \geqslant 0$
2. $f \equiv 0$ в окрестности точки z_0.
3. $f \equiv 0$ в Ω.

Доказательство.

$3 \implies 1$ – очевидно

$1 \implies 2$

Возьмем круг $z_0 + R\mathbb{D} \subset \Omega$

$\implies f$ раскладывается в ряд в круге $z_0 + R\mathbb{D}$.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \equiv 0$

$2 \implies 3$

$E := \{z \in \Omega \quad : \quad$ у точки z существует окрестность, в которой $f \equiv 0\}$

По пункту 2 $E \neq \varnothing$.

E – открыто. (Т.к. раз у какой-то точки есть кружочек, где ноль, то в каждой точке такого кружка тоже есть кружочек, где ноль)

E – замкнуто. Т.е. если $z_n \in E \ \ z_n \to z_0 \implies z_0 \in E$

у z_n есть окрестность, в которой $f \equiv 0$

$\implies f^{(k)}(z_n) = 0 \ \ \forall k \ \ \forall n \implies f^{(k)}(z_0) = 0 \ \ \forall k$

$f^{(k)}(z_n) \to f^{(k)}(z_0)$

Тогда у точки z_0 есть окрестность, где $f \equiv 0 \implies z_0 \in E$ □

Теорема 1.14 (о среднем)**.**

$f \in H(\Omega) \ \ a \in \Omega$.

Тогда $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$

Если $a + r\mathbb{D} \subset \Omega$.

Доказательство.

$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a+r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz =$

Параметризуем окрестность $z = a + re^{it} \ dz = r \cdot i \cdot e^{it}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} \cdot rie^{it}\,dt$ □

Следствие.

$f \in H(\Omega) \ \ a \in \Omega \quad a + r\mathbb{D} \subset \Omega$.

Тогда $f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{a+r\mathbb{D}} f(z)\,dx\,dy$

Доказательство.

$\int\limits_{a+r\mathbb{D}} f(z)\,dx\,dy = \int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} \rho f(a + \rho e^{it})\,dt\,d\rho = \int\limits_0^r \rho \cdot 2\pi f(a)\,d\rho = 2\pi f(a) \cdot \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$ □

Теорема 1.15 (принцип максимума)**.**

$f \in H(\Omega) \quad a \in \Omega$

Если $|\,f(a)\,| \geqslant |\,f(z)\,| \ \ \forall z$ из окрестности точки a, то $f \equiv const$

Доказательство.

$M := |\,f(a)\,| \quad |\,f(z)\,| \leqslant M$ в круге $a + R\mathbb{D}$.

Возьмем $r < R$. Можем рассматривать функцию, умноженную на константу. Более того, можем сделать $M := f(a) > 0$. (домножив на поворот) $M = f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$

$M = f(a) = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\,f(a + re^{it})\,|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M = M.$

А значит, равенство есть везде.

Т.е. $|\,f(a+re^{it})\,| \equiv M$

$M = f(a) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int\limits_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,f(a+re^{it})\,dt \leqslant M$

И снова все неравенства превращаются в равенства.

$\implies \mathrm{Re}\,f(a+re^{it}) \equiv M$

$\implies f(z) \equiv M$ в круге $a + R\mathbb{D}$.

А значит, и во всей области тоже. $\implies f \equiv M$ в Ω. $\square$

Следствие.

Ω – ограниченная область $f \in H(\Omega)$ и $f \in C(\mathrm{Cl}\,\Omega)$.

Тогда $|\,f\,|$ достигает максимума на границе.

И $|\,f(z)\,| \leqslant \max\limits_{w\in\partial\Omega}|\,f(w)\,|$.

Доказательство.

$\mathrm{Cl}\,\Omega$ – компакт. $|\,f\,|$ непрерывно на $\mathrm{Cl}\,\Omega$.

$\implies \exists a \in \mathrm{Cl}\,\Omega$, т.ч. $|\,f(a)\,| = \max\limits_{z\in\mathrm{Cl}\,\Omega}|\,f(z)\,|$.

Если $a \in \Omega$, то $f \equiv const \implies$ max достигается на границе.

Если $a \notin \Omega$, то $a \in \partial\Omega$. $\square$

Замечание.

Поскольку для гармонический функций справедлива теорема о среднем, для них есть и принцип максимума.

***Определение* 1.10.**

z – ноль функции f, если $f(z) = 0$.

Теорема 1.16.

$0 \neq f \in H(\Omega) \quad a \in \Omega$ – ноль функции f.

Тогда $\exists m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(\Omega)$, т.ч. $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z-a)^m g(z)$

Следствие.

Если a – ноль голоморфной функции f, то f не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки a.

Доказательство. (следствия)

$|\,g(a)\,| \neq 0 \quad |\,g(a)\,|$ – непрерывная функция.

$\implies |\,g(z)\,| > 0$ в некоторой окрестности точки a.

$\implies |\,f(z)\,| = |\,z-a\,|^n\,|\,g(z)\,| > 0$ в этой проколотой окрестности точки a. $\square$

Доказательство. (теоремы)

$a + r\mathbb{D} \subset \Omega$.

$\implies f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ в круге $a + r\mathbb{D}$

$m = \min\{n \ : \ f^{(n)}(a) \neq 0\}$ (найдется, т.к. если $f^{(n)}(a) = 0 \ \forall n$, то $f \equiv 0$)

$\implies f(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^m\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+m)}(a)}{(n+m)!}(z-a)^n$

$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m} \in H(\Omega \setminus \{a\})$ и $g(z) \to \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0.$ □

***Определение* 1.11.**

m из теоремы – кратность нуля.

Следствие.

$f, g \in H(\Omega)$ и $fg \equiv 0 \implies f \equiv 0$ или $g \equiv 0$.

Доказательство.

Возьмем $a \in \Omega$. Пусть $f(a) = 0$.

Если $f \not\equiv 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки a $f \neq 0$

$\implies$ в этой проколотой окрестности $g \equiv 0 \implies g \equiv 0$ в Ω. □

Следствие.

Множество нулей ненулевой голоморфной функции состоит из изолированных точек.

Теорема 1.17 (единственности)**.**

$f, g \in H(\Omega)$, $z_n \in \Omega$ – различные точки и $f(z_n) = g(z_n)\ \ \forall n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Omega$, то $f \equiv g$.

Доказательство.

$h(z) := f(z) - g(z) \in H(\Omega)$.

$h(z_n) := f(z_n) - g(z_n) = 0$

По непрерывности $h(z_0) = 0$. Тогда z_0 не изолированный ноль функции h. А так бывает только если $h \equiv 0$. □

Следствие.

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ и т.п.

Любое тождество, имеющееся на вещественной оси, и являющееся голоморфным, верно и в комплексных числах.

05.03.2018

***Определение* 1.12.**

$f_1 \in H(\Omega_1)$

$f_2 \in H(\Omega_2)$

Δ – одна из компонент связности пересечения $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Если $f_1\Big|_\Delta = f_2\Big|_\Delta$, то f_2 – непосредственное аналитическое продолжение f_1 (через Δ)

Замечание.

1. Если Δ фиксированное, то продолжение единственно.

   $\tilde{f}_2 \in H(\Omega_2)$ и $\tilde{f}_2\Big|_\Delta \equiv f_1\Big|_\Delta \equiv f_2\Big|_\Delta$

   $\implies f_2,\ \tilde{f}_2 \in H(\Omega_2)$ и совпадает на $\Delta \implies f_2 \equiv \tilde{f}_2$

2. Если компонента другая, то результат может быть другим.

***Определение* 1.13.**

$f \in H(\Omega)$ и $\tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$

$\tilde{f}$ – аналитическое продолжение f по цепочке областей.

$\Omega_0 \equiv \Omega,\ \ \Omega_n \equiv \tilde{\Omega}.$

f_k – непосредственное аналитическое продолжение f_{k-1}.

На самом деле, достаточно продолжать по кружочкам в силу теорему единственности.

Результат зависит от того, какую компоненту выбираем на каждом шаге.

***Определение* 1.14.**

$(f, \Omega) \quad f \in H(\Omega)$

Введем отношение эквивалентности. $(f, \Omega) \sim (\tilde{f}, \tilde{\Omega})$, если

$(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ получается аналитическим продолжением из (f, Ω) по некоторой цепочке областей.

Полная аналитическая функция – класс эквивалентности по этому отношению.

Тогда $M = \bigcup\limits_{\substack{(f,\Omega) \\ \text{из класса} \\ \text{эквивалентности}}} \Omega$ — это область определения (существования) полной аналитической функции F.

Утверждение 1.18.

M – область.

***Определение* 1.15.**

Значение полной аналитической функции F в точке $x \in M$ – множество значений всех функций из класса эквивалентности в точке x.

Пример.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \quad |\, z \,| < 1$

$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad g \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\})$

$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}} = f_a(z),\ |\, z-a \,| < 1.$

***Определение* 1.16.**

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в круге $|\, z - z_0 \,| < R$.

$|\, z_1 - z_0 \,| \leqslant R.$

Если существует $B_r(z_1)$ и голоморфная в нем функция $g \ :\ B_r(z_1) \to \mathbb{C}$, т.ч. $f \equiv g$ на $B_R(z_0) \cap B_r(z_1)$, то z_1 – правильная точка.

Иначе z_1 – особая точка.

Теорема 1.19.

На границе круга сходимости всегда есть особая точка.

Доказательство.

От противного. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в круге $|\, z \,| < R$ и любая точка $|\, w \,| = R$ – правильная.

$\implies \exists B_{r_w}(w)$, т.ч. $g_w \in H(B_{r_w}(w))$ и $f \equiv g_w$ на $B_R(0) \cap B_{r_w}(w)$

Круги B_{r_w} покрывают окружность $|\, w \,| = R$.

Окружность – компакт $\implies$ выберем конечное подпокрытие.

$\{|\, w\,| = R\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{r_k}(w_k)$

В $B_R(0) \cup \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{r_k}(w_k)$ есть голоморфная функция, совпадающая с f на $B_R(0)$.

Расстояние до границы в данном направлении непрерывно зависит от угла. $\implies$ в какой-то точке достигается min. А он $> R$.

Пусть этот минимум $\tilde{R}$. Разложим функцию в ряд в $B_{\tilde{R}}(0)$.

По единственности продолжения в ряд, это тот же ряд.

$\implies$ исходный ряд сходится в $B_{\tilde{R}}(0)$. Противоречие. $\square$

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сходится при $|\, z\,| \leqslant 1$.

   Этот пример показывает то, что в особой точке ряд может сходиться. Тут, например, особой точкой является $z = 1$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ сходится при $|\, z\,| < 1$.

   Все точки $|\, z\,| = 1$ – особые.

Теорема 1.20.

$f \in H(\Omega)$ Ω – односвязная область.

$f \neq 0$ в Ω. Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^g = f$ в Ω и g определена с точностью до слагаемого $2\pi ik$.

Доказательство.

$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies$ существует первообразная функция g, $g \in H(\Omega)$. Можем выбрать g так, что $e^{g(z_0)} = f(z_0)$.

Проверим, что g подходит.

$(e^{-g(z)}f(z))' = e^{-g(z)}f'(z) - g'(z)e^{-g(z)}f(z) = (f' - g'f)e^{-g} \equiv 0$, т.к. $g' = \frac{f'}{f}$.

$\implies e^{-g}f \equiv const$, но $e^{-g(z_0)}f(z_0) = 1$. А значит, $e^{-g}f \equiv 1$.

Единственность. $e^{g_1} \equiv f \equiv e^{g_2} \implies e^{g_1 - g_2} \equiv 1 \implies g_1(z) - g_2(z) = 2\pi ik_z$, но разность непрерывна $\implies k$ общее.

$\square$

Следствие.

$0 \notin \Omega$ – односвязная область. Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = z$.

Замечание.

$z = re^{i\varphi}$ $r = |\, z\,|$ $\varphi = \arg z$

$z = e^{\ln r + i\varphi}$ $g(z) = \ln|\, z\,| + i\arg z$

***Определение* 1.17.**

Ln – полная аналитическая функция (класс эквивалентности этих функций g).

Определена на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\operatorname{Ln} z = \ln|\, z\,| + i \operatorname{Arg} z$, где $\operatorname{Arg} z$ – все значения аргумента в точке z.

***Определение* 1.18.**
Конкретные представители g – голоморфные ветви логарифма.

***Свойства* Ln.**

1. $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \ : \ e^w = z\} \ \ z \neq 0$
2. $\operatorname{Ln} z = \ln |\, z \,| + i \operatorname{Arg} z$
3. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

   Доказательство.
   $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln |\, z_1 z_2 \,| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \ln |\, z_1 \,| + \ln |\, z_2 \,| + i \operatorname{Arg}(z_1) + i \operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$. □

   Замечание.
   Для голоморфной ветви логарифма этого равенства нет!

   Пример.
   $g(z) = \ln |\, z \,| + i \arg z, \ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$
   $g(-1) = \ln |\, -1 \,| + i\pi = \pi i$
   $g(-1 \cdot (-1)) = g(1) = \ln 1 + i \cdot 0 = 0$
   $0 = g(1) \neq g(-1) + g(-1) = 2\pi i$

   Пример.
   TODOкартинка-спиралька
   $g(1) = 0 \ \ g(2) = \ln 2 + i \arg 2 = \ln 2 + i2\pi$
   В зависимости от того, продолжаем ли через 1 или через 2 продолжения будут отличаться.

***Определение* 1.19.**
$z^p := e^{p \operatorname{Ln} z} \quad z \neq 0.$

- $p \in \mathbb{Z}$ – многозначности нет. (т.к. прикол с $2\pi k$ исчезает)
- $p = \frac{q}{r} \quad \frac{q}{r} \cdot 2\pi k \mod (2\pi i) \quad 0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \ldots, \frac{r-1}{r}$ – r разных значений.
- $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ – счетное число значений.

Упражнение.

1. i^i
2. $(z^p)' = \frac{pz^p}{z}$ при $z \neq 0$.
3. $z^p \cdot z^q \neq z^{p+q}$
   $(z^p)^q \neq z^{pq}$

1.3. §3. Ряд Лорана

***Определение* 1.20.**

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ – ряд Лорана.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ – правильная часть ряда Лорана.

$\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ – главная часть.

Ряд сходится, если сходятся его правильная и главная часть.

Сходимость правильной части. $\exists R \in [0,+\infty]$, т.ч. в круге $|\,z-z_0\,| < R$ сходится правильная часть.

$\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\frac{1}{z-a_0})^n$

Сходимость главной части. $\exists \tilde{R} \in [0,+\infty]$, т.ч. в круге $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \tilde{R}$ сходится главная часть.

$r := \frac{1}{\tilde{R}}$

Существует кольцо $r < |\,z-z_0\,| < R$, в котором сходится ряд Лорана.

Свойства.

1. $\exists r, R \in [0,+\infty]$, что в кольце $r < |\,z-z_0\,| < R$ ряд сходится, при $|\,z-z_0\,| < r$ расходится главная часть, при $|\,z-z_0\,| > R$ расходится правильная часть.

   Эту штуку назовем кольцом сходимости.

2. Строго внутри кольца сходимости сходимость ряда равномерная. Знаем это про обычные степенные ряды, два раза применяем.

3. В кольце сходимости ряд можно дифференцировать почленно.

4. По любой кривой в кольце сходимости можно интегрировать почленно.

Теорема 1.21.

Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в кольце $r < |\,z\,| < R$, то коэффициенты ряда определены однозначно.

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\,\zeta\,|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$, где $r < \rho < R$.

Доказательство.

$f(\rho e^{it}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{int}$

$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\,\zeta\,|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{n+1}e^{i(n+1)t}} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k \rho^k e^{ikt} \cdot i \cdot \rho e^{it}\,dt =$

Была замена переменной $\zeta = \rho e^{it} \quad d\zeta = \rho i e^{it}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k \rho^{k-n} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt = \frac{1}{2\pi} a_n 2\pi = a_n$ □

Теорема 1.22 (Лорана).

Если f голоморфна в кольце $r < |\,z\,| < R$, то $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в этом кольце.

Доказательство.

$r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$

Докажем, что в кольце $r_2 < |\, z\,| < R_2$ есть разложение в ряд Лорана.

Рассмотрим кольцо $r_1 \leqslant |\, z\,| \leqslant R_1$ – компакт.

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\,\zeta\,| = R_1 \\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\,\zeta\,| = r_1 \\ \circlearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

$r_2 < |\, z\,| < R_2$

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$ равномерно сходится

$|\,\zeta\,| = R_1$

$\int\limits_{|\,\zeta\,| = R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{|\,\zeta\,| = R_1} f(\zeta) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{|\,\zeta\,| = R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \cdot 2\pi i \cdot a_n$

$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{z^n}$ равномерно сходится.

$|\,\zeta\,| = r_1$

$\int\limits_{|\,\zeta\,| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{|\,\zeta\,| = r_1} f(\zeta) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{z^n}\, d\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int\limits_{|\,\zeta\,| = r_1} f(\zeta)\zeta^{n-1}\, d\zeta =: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot 2\pi i \cdot a_{-n}$ □

Замечание. Неравенство Коши.

$|\, a_n\,| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$ верно и для отрицательных n.

Теорема 1.23.

Если f – голоморфна в кольце $r < |\, z\,| < R$, то существует $f_1 \in H(R\mathbb{D})$ и $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus r\overline{\mathbb{D}})$, т.ч. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ и разложение будет единственным, если добавить условие $\lim\limits_{|\,z\,| \to \infty} f_2(z) = 0$

Доказательство.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n.$

Пусть $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$

Единственность. $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$. $f_1, g_1 \in H(R\mathbb{D}), \quad f_2, g_2 \in H(\mathbb{C} \setminus r\overline{\mathbb{D}})$

$h := f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ – голоморфна в $\mathbb{C}$.

$\lim\limits_{|\,z\,| \to \infty} h(z) = \lim\limits_{|\,z\,| \to \infty} g_2(z) - \lim\limits_{|\,z\,| \to \infty} f_2(z) = 0$

$\implies h$ голоморфна и ограничена. $\implies h \equiv const \implies h \equiv 0.$ □

***Определение* 1.21.**

f – голоморфна в кольце $0 < |\, z - a\,| < R$, тогда точка a называется (изолированной) особой точкой.

***Определение* 1.22.**

Если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$, то особая точка a называется устранимой особой точкой.

Если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, то точка называется полюсом.

Если $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не существует, то a называется существенной особой точкой.

Пример.

1. $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{e^z-1}{z}$, здесь 0 – устранимая особая точка.
2. $\frac{1}{\sin z}$. 0 – полюс.
3. $e^{\frac{1}{z}}$. 0 – существенная особая точка.

Теорема 1.24 (Характеристика устранимых особых точек).
$f \in H(0 < |\, z - a\,| < R)$. Тогда следующие условия равносильны:

1. a – устранимая особая точка
2. f ограничена в окрестности точки a.
3. $\exists g \in H(a + R\mathbb{D})$, т.ч. $f(z) = g(z)$ при $0 < |\, z - a\,| < R$.
4. В главной части ряда Лорана функции f нет ненулевых слагаемых.

Доказательство.
$4 \implies 3$.

Раскладываем f в ряд Лорана. Нет ненулевых слагаемых в главной части – значит, это ряд Тейлора. И возьмем $g =$ сумма этого ряда.

$3 \implies 1$

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} g(z) = g(a)$

$1 \implies 2$ Очевидно.

$2 \implies 4$.

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$

$|\, a_n\,| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad M(r) = \max\limits_{|\, z-a\,|=r} |\, f(z)\,|$

Возьмем такой r, что $|\, z - a\,| = r$ попадет в окрестность, где f ограничена $\implies M(r) \leqslant M \implies |\, a_{-n}\,| \leqslant M \cdot r^n \underset{r\to 0}{\to} 0$ □

Теорема 1.25 (характеристика полюса).
$f \in H(0 < |\, z - a\,| < R)$. Тогда следующие условия равносильны:

1. a – полюс.
2. $\exists m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(a + R\mathbb{D})$, т.ч. $g(a) \neq 0$ и $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ при $0 < |\, z - a\,| < R$.
3. В главной части ряда Лорана лишь ненулевое конечное число ненулевых слагаемых.

Доказательство.
$3 \implies 2$.

$f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n$ и $a_{-m} \neq 0$.

$g(z) := \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^{n+m} \in H(R\mathbb{D})$ и формула верна.

$2 \implies 3$ – очевидно. Взяли ряд Тейлора, поделили почленно, получили ряд Лорана.

$3 \implies 1$

$f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad a_{-m} \neq 0.$

$f(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + o((z-a)^{-m}) \to \infty$

$1 \implies 2.$

$\lim\limits_{z\to a} |\, f(z)\,| = \infty \implies \exists$ окрестность точки a, т.ч. $|\, f(z)\,| > 1$.

Возьмем $h(z) := \frac{1}{f(z)}$ в этой окрестности.

В этой окрестности $|\, h(z)\,| = \frac{1}{|\, f(z)\,|} < 1 \implies$ в точке a устранимая особая точка.

Можно доопределить функцию h нулем.

(т.к. $\lim\limits_{z\to a} h(z) = \frac{1}{\lim\limits_{z\to a} f(z)} = 0$)

$\implies h(z) = (z-a)^m k(z) \quad k(a) \neq 0$

$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{\frac{1}{k(z)}}{(z-a)^m} =: \frac{g(z)}{(z-a)^m}$

$g(a) = \frac{1}{k(a)} \neq 0$

И равенство есть в некоторой окрестности точки a. □

Замечание.

Мы заодно поняли следующую равносильность.

1. a – полюс функции f порядка m.
2. a – ноль функции $\frac{1}{f}$ кратности m.
3. $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n$ и $a_{-m} \neq 0$.

Теорема 1.26 (характеристика существенных особых точек)**.**

$f \in H(0 < |\, z-a\,| < R)$. Тогда следующие условия равносильны:

1. a – существенная особая точка.
2. В главной части ряда Лорана бесконечное число ненулевых слагаемых.

Пример. $\sin\frac{1}{z} \quad 0$ – существенная особая точка.

***Определение* 1.23.**

f – мероморфная в Ω функция, если у функции f в Ω лишь изолированные особые точки и это полюсы.

$f \in H(\Omega \setminus \{a_1, a_2, ...\})$ и $a_1, a_2, ...$ – изолированные точки, являющиеся полюсами.

Пример.

$\operatorname{ctg}\frac{1}{z} \quad$ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Полюсы первого порядка в точках $\frac{1}{\pi k}$

Но $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$ не будет мероморфной в $\mathbb{C}$. Ведь 0 – не изолированная особая точка.

14.03.2018

Свойства.

Пусть f и g мероморфны в Ω.

Тогда

1. $\alpha f + \beta g$ мероморфна в Ω
2. fg
3. $\frac{f}{g}$
4. f' мероморфна в Ω и имеет полюсы в тех же точках, что и f и их порядок на 1 больше.

Доказательство.

1. f и g имеют полюс в z_0.

   $f(z) = \sum\limits_{n=-p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad g(z) = \sum\limits_{n=-q}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$
2. $f(z) = (z-z_0)^{-p}\varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$ и голоморфна в окрестности z_0.

   $g(z) = (z-z_0)^{-q}\psi(z) \quad \psi(z_0) \neq 0$ и голоморфна в окрестности z_0.

   $fg(z) = (z-z_0)^{-(p+q)}\varphi(z)\psi(z)$
3. $\frac{f}{g} = (z-z_0)^{-p+q} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ голоморфна в окрестности z_0.
4. $f(z) = \sum\limits_{n=-p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

   $f'(z) = \sum\limits_{n=-p}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

$\square$

***Определение* 1.24.**

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |\, z_n \,| = +\infty$

***Определение* 1.25.**

Непрерывность функции в точке ∞.

$\forall z_n \to \infty \quad f(z_n) \to f(\infty)$

***Определение* 1.26.**

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

***Определение* 1.27.**

Если f голоморфна в окрестности ∞ (т.е. вне какого-то круга)

∞ – устранимая особая точка, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

– полюс, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

– существенная особая точка, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует.

Замечание.

Если f голоморфна при $|z| > R$, то $g(z) = f(\frac{1}{z})$ голоморфна при $0 < |z| < \frac{1}{R}$.

Тип особой точки для g и для f одинаковый.

$g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \implies f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} z^n$

∞ – устранимая особая точка $f \iff 0$ устранимая особая точка $g \iff c_n = 0$ при $n < 0 \iff$ в ряде Лорана для f нулевой коэффициент при положительных степенях.

∞ – полюс для $f \iff 0$ – полюс для $g \iff c_n = 0$ при $n < N \iff$ в правой части ряда Лорана для f конечное число ненулевых коэффициентов.

∞ – существенная особая точка $f \iff$ в правой части ряда Лорана для f бесконечное количество ненулевых коэффициентов.

***Определение* 1.28.**

f – голоморфна в ∞, если f голоморфна в окрестности ∞ и ∞ – устранимая особая точка.

***Определение* 1.29.** Сфера Римана.

Берем горизонтальную плоскость. $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, что $w = 0$.

На точку $(0, 0, 0)$ ставим сферу единичного диаметра. И делаем стереографическую проекцию. ∞ – макушка сферы, ей некуда переводиться.

Уравнение сферы Римана $u^2 + v^2 + w^2 = w$.

Теорема 1.27.

При стереографической проекции точке $z = x+iy$ соответствует точка сферы $u^2+v^2+w^2 = w$, что:

$u = \frac{x}{1+|z|^2} \quad v = \frac{y}{1+|z|^2} \quad w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

И обратно: точке (u, v, w) сферы соответствует точка $x = \frac{u}{1-w}$, $y = \frac{v}{1-w}$.

Доказательство.

$u = tx \quad v = ty \quad w = 1 - t$ – параметрицация прямой через северный полюс и нашу точку.

$(tx)^2 + (ty)^2 = t(1 - t)$

$tx^2 + ty^2 = 1 - t$

$t(1 + x^2 + y^2) = 1 \implies t = \frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+|z|^2}$.

Получили t, когда прямая пересекает сферу, подставляем, получаем нужное. □

Следствие.

Расстояние между образами на сфере точек z и $\tilde{z}$ равно $\frac{|z-\tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$. Расстояние между образом z и образом ∞ равно $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$.

Доказательство. Упражнение. □

Следствие.

Сходимость в $\overline{\mathbb{C}}$ эквивалента сходимости на сфере Римана.

Следствие.

$\overline{\mathbb{C}}$ – компакт. Т.к. в смысле сходимостей это сфера, которая компакт.

Теорема 1.28 (Луивилля)**.**

Если $f \in H(\overline{\mathbb{C}})$, то $f \equiv const$.

Доказательство.

$f \in H(\overline{\mathbb{C}}) \implies f \in C(\overline{\mathbb{C}}) \implies f$ – ограничена.

Но тогда уже знаем, что $f \equiv const$. □

Теорема 1.29 (Сохоцкого)**.**

Пусть z_0 – существенная особая точка f. Тогда $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует $z_n \to z_0$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Иными словами, $\operatorname{Cl} f(0 < |\, z - z_0 \,| < \varepsilon) = \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство.

Случай $A = \infty$.

Если бы не нашлось последовательности $z_n \to z_0$, на которой $|\, f(z_n) \,| \to +\infty$, то f была бы ограничена в окрестности z_0. И тогда z_0 – устранимая особая точка.

Случай $A \in \mathbb{C}$.

Если в сколь угодно маленькой окрестности z_0 f принимает значение A, то берем эти точки в качестве последовательности.

Если f в некоторой окрестности не принимает значения A. $g := \frac{1}{f-A} \implies g$ голоморфна в проколотой окрестности z_0. $f = A + \frac{1}{g}$.

У g не может быть полюса в точке z_0, т.к. иначе $f(z) \underset{z\to z_0}{\to} A$.

У g не может быть устранимой особой точки, т.к. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A + \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \implies$ у f – устранимая особая точка.

Если же $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ и у f полюс.

$\implies z_0$ – существенная особая точка g. Тогда по доказанному $\exists z_n \to z_0$, т.ч. $g(z_n) \to \infty \implies f(z_n) \to A$. □

Теорема 1.30 (Пикара)**.**

Пусть z_0 – существенная особая точка f. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $f(0 < |\, z - z_0 \,| < \varepsilon)$ – все комплексные числа, возможно без одного.

Доказательство.

Доказываться это не будет, ибо сложно и не очень нужно. □

Пример.

У $e^{\frac{1}{z}}$ 0 – существенная особая точка.

$e^{\frac{1}{z}}$ не принимает значение 0.

$\implies$ принимает все значения из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в $0 < |\, z \,| < \varepsilon$.

Упражнение. доказать

1.4. §4. Вычеты

***Определение* 1.30.**

$z_0 \in \mathbb{C}$ – особая точка f.

Вычет функции f в точке z_0 — c_{-1} (коэффициент при $\frac{1}{z-z_0}$ в ряде Лорана).

$\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f$

$z_0 = \infty$ вычет функции f в точке ∞ — $-c_{-1}$ (коэффициент при $\frac{1}{z}$ в ряде Лорана).

Свойства.

1. Пусть f голоморфна в $0 < |\, z - a \,| < R$ и $0 < r < R$. Тогда $\int\limits_{\substack{|\, z-a \,|=r \\ \circlearrowleft}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}\limits_{z=a} f$.

   Доказательство.
   $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ равномерно сходится при $|\, z - a \,| = r$.

   $$\int\limits_{\substack{|\, z-a \,|=r \\ \circlearrowleft}} f(z)\, dz = \int\limits_{|\, z-a \,|=r} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\, dz = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{|\, z-a \,|=r} (z-a)^n\, dz =$$

   $z = re^{i\varphi} + a$

   $$= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_0^{2\pi} r^n e^{in\varphi} \cdot re^{i\varphi} \cdot i\, d\varphi = i \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\, d\varphi = 2\pi i c_{-1}.$$ □

2. Если a – полюс $\leqslant n$-ого порядка, то
   $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f = \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))$

   Доказательство.
   $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k$

   $(z-a)^n f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k-n} (z-a)^k$

   Нужен коэффициент при $(z-a)^{n-1}$. Это $n-1$-я производная в точке a, деленная на $(n-1)!$.
   □

3. Если a – полюс 1-го порядка, то
   $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f = \lim\limits_{z\to a} (z-a) f(z)$.

4. $f = \frac{g}{h}$ g и h голоморфны в окрестности точки a.
   $g(a) \neq 0,\ h(a) = 0,\ h'(a) \neq 0$.
   Тогда $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

   Доказательство.
   $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f = \lim\limits_{z\to a} (z-a) f(z) = \lim\limits_{z\to a} \frac{z-a}{h(z)} g(z) = \lim\limits_{z\to a} \frac{z-a}{h(z)-h(a)} g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$ □

5. Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f = \lim\limits_{z\to\infty} z(A - f(z))$.

   Доказательство.
   $f(z) = A + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \implies z(A - f(z)) = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{n+1} \to -c_{-1}$. □

6. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f = -\operatorname*{res}\limits_{z=0} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.

Доказательство.
$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{z^{n+2}}$. □

15.03.2018

Теорема 1.31 (Коши о вычетах)**.**
f – голоморфная в Ω за исключением точек $a_1, ..., a_n$.

$K \subset \Omega$ – компакт. Пусть при этом точки $a_1, ..., a_n$ не лежат на границе K.

Тогда.

$\int\limits_{\partial K} f(z)\, dz = 2\pi i \sum\limits_{a_j \in \operatorname{Int} K} \operatorname*{res}\limits_{z=a_j} f$

Доказательство.
Возьмем кружочки $|\, z - a_j \,| \leqslant r_j$. Они лежат в $\operatorname{Int} K$ и не пересекаются.

$\tilde{K} = K \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{|\, z - a_j \,| < r_j\}$

$\int\limits_{\partial \tilde{K}} f(z)\, dz = 0$ по когда-то доказанному.

С другой стороны,

$\int\limits_{\partial \tilde{K}} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial K} f(z)\, dz - \sum \int\limits_{|\, z - a_j \,| = r_j} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial K} f(z)\, dz - \sum 2\pi i \cdot \operatorname*{res}\limits_{z=a_j} f$ □

Следствие.
Если f голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением точек $a_1, ..., a_n$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=a_j} f + \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f = 0$

Доказательство.
Возьмем круг, покрывающий все точки $a_1, ..., a_n$ и посчитаем интеграл по его границе двумя способами.

С одной стороны, $\int\limits_{|\, z \,| = R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=a_j} f$.

С другой, $\int\limits_{|\, z \,| = R} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$, где $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z_n$ ряд Лорана в окрестности ∞. □

Пример.

1. $\int\limits_{|\, z \,| = 4} \frac{z^4}{e^z + 1}\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} =$

   $e^z + 1 = 0$, $|\, z \,| < 4$.

   $z = \pi i + 2\pi i k$

   $= 2\pi i(\operatorname*{res}\limits_{\pi i} f + \operatorname*{res}\limits_{-\pi i} f) = 2\pi i\left(\frac{z^4}{(e^z+1)'}\Big|_{z=\pi i} + \frac{z^4}{(e^z+1)'}\Big|_{z=-\pi i}\right) = 2\pi i(-\pi^4 - \pi^4) = -4\pi^5 i$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^{2n}}$

$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$

Добавим к отрезку $[-R, R]$ дугу c_R, чтобы получился какой-то контур Γ_R.

$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} =$

$z^{2n} = -1 \quad z = e^{\frac{\pi i}{2n}k} \quad k = 1, 3, 5, ..., 2n-1$

$\operatorname*{res}\limits_{z=e^{\frac{\pi ik}{2n}}} f = \frac{1}{(z^{2n}+1)'}\Big|_{z=e^{\frac{\pi ik}{2n}}} = \frac{z}{2nz^{2n}}\Big|_. = \frac{e^{\frac{\pi ik}{2n}}}{-2n}$

$= -\frac{\pi i}{n}\sum e^{\frac{\pi ik}{2n}} = -\frac{\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{\frac{\pi i(2n+1)}{2n}}}{1-e^{\frac{\pi i}{n}}} = -\frac{\pi i}{n}\frac{2e^{\frac{\pi i}{2n}}}{1-e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{-\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{-\frac{\pi i}{2n}} - e^{\frac{\pi i}{2n}}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

$\int\limits_{\Gamma_R} = \int\limits_{C_R} + \int\limits_{-R}^{R}$

$\left|\int\limits_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n}}\right| \leqslant \pi R \frac{1}{\min\limits_{z\in C_R} |\,1+z^{2n}\,|} \leqslant \frac{\pi R}{R^{2n}-1} \to 0$

$|\,1+z^{2n}\,| \geqslant |\,z\,|^{2n} - 1 = R^{2n} - 1$

$\implies \int\limits_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

Лемма (Жордана).

$C_{R_n} = \{z \in \mathbb{C} \ \ ;\ \ |\,z\,| = R,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $R_n \to \infty$.

Пусть g – некоторая функция, для которой верно:

$M_{R_n} := \sup\limits_{z\in C_{R_n}} |\,g(z)\,| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Тогда $\forall \lambda > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0$

Доказательство.

$z = R_n e^{i\varphi} \quad \varphi \in [0, \pi]$

$\sin\varphi \geqslant \frac{\varphi}{\pi/2} = \frac{2\varphi}{\pi}$, если $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$|\,e^{i\lambda z}\,| = \left|\,e^{i\lambda R_n e^{i\varphi}}\,\right| = \left|\,e^{i\lambda R_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,\right| = \left|\,e^{i\lambda R_n\cos\varphi - \lambda R_n\sin\varphi}\,\right| = e^{-\lambda R_n\sin\varphi} \leqslant e^{-\lambda R_n\cdot\frac{2\varphi}{\pi}}$

$\left|\int\limits_{\text{половина } C_{R_n}}\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(R_n e^{i\varphi})e^{i\lambda R_n e^{i\varphi}} R_n e^{i\varphi} i\,d\varphi\right| \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} |\,g(R_n e^{i\varphi})\,|\,e^{-\lambda R_n\frac{2\varphi}{\pi}} R_n\,d\varphi \leqslant$

$\leqslant M_{R_n} R_n \cdot \frac{e^{-\lambda R_n\frac{2\varphi}{\pi}}}{-\lambda R_n\frac{2}{\pi}}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \leqslant M_{R_n} \cdot R_n \cdot \frac{1}{\lambda R_n\cdot\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\lambda} M_{R_n} \to 0$

Аналогично оценивается вторая половинка дужки. Только пишем немного другие оценки на синус. □

Пример.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx =: I$

$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}$

Снова дополняем отрезок $[-R, R]$ дугой до контура.

$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\sum\operatorname{res} = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{i\lambda z}}{(1+z^2)'}\Big|_{z=i} = \frac{\pi}{e^{\lambda}}$

$\int\limits_{-R}^{R} \to I$

$\int\limits_{C_R} \to 0$ по теореме Жордана.

$g(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad |\,g(z)\,| \leqslant \frac{1}{|\,z\,|^2-1} = \frac{1}{R^2-1}.$

$\implies I = \frac{\pi}{e^\lambda}$

$\frac{\pi}{e^\lambda} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x + i\sin\lambda x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,dx$

Лемма (о полувычете)**.**

Пусть a – полюс первого порядка у функции f.

$C_r = \{z \in \mathbb{C} \;\;:\;\; |\,z-a\,| = r \quad \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\}$

$\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{C_r} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)\operatorname*{res}\limits_{z=a} f$

Доказательство.

Пусть $a = 0$. Иначе делаем сдвиг.

$f(z) = g(z) + \frac{c}{z}$ в окрестности $z = 0$. g голоморфная в окрестности нуля функция.

$\int\limits_{C_r} f(z)\,dz = \int\limits_{C_r} g(z)\,dz + c\int\limits_{C_r} \frac{dz}{z}$

$\int\limits_{C_r} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{re^{i\varphi}i\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = (\beta-\alpha)i$

$z = re^{i\varphi} \quad dz = re^{i\varphi}i\,d\varphi$

$\left|\int\limits_{C_r} g(z)\,dz\right| \leqslant r(\beta-\alpha)\cdot M \to 0$

$M := \max\limits_{\text{окрестность нуля}} |\,g(z)\,|$ □

1.4.1. Отступление. Главное значение интеграла.

Пусть есть отрезок $[a,b] \ni x_0$, где x_0 – особая точка функции f.

Как раньше считали интеграл по такому отрезку? Били на два по x_0, устремляли с каждой стороны, говорили, что сходится, если сходится каждый.

***Определение* 1.31.**

$\text{v. p.}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\int\limits_{a}^{x_0-\varepsilon} + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{b})$

Свойства.

1. Линейность
2. Аддитивность

Пример.

$\text{v. p.}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(-1,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,1)} \frac{dx}{x} = 0$

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx =: I \quad \lambda > 0$

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} e^{i\lambda x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} e^{i\lambda x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}\,dx$

Дополним отрезок $[-R, R]$ дугой C_R. Однако есть проблема в нуле – обойдем ее дужкой C_ε

$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z}$

$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} = 0$

$0 = \int\limits_{C_R} + \int\limits_{C_\varepsilon} + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}$

$\int\limits_{C_R} \to 0$ по лемме Жордана.

$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \to \text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}\,dx$

$\int\limits_{c_\varepsilon} \to -\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f = -\pi i$

$\implies \text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}\,dx = \pi i$

$\implies I = \frac{\pi}{2}$

22.03.2018

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \quad p \in (0,1)$

$f(z) = \frac{e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}}{z+1}$

Контур – идем по отрезку $[0, R]$, по окружности с центром в 0 и радиусом R, возвращаясь в вещественную точку R, дойти до вещественного числа ε, и сделать круг вокруг 0 с этим радиусом.

$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f = 2\pi i e^{(p-1)\operatorname{Ln}(-1)} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i} = -2\pi i e^{p\pi i}$

$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = i\pi$

$-2\pi i e^{p\pi i} = \int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{C_R} + \int\limits_{C_\varepsilon} + \int\limits_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}}$

$\left|\int\limits_{C_R}\right| \leqslant 2\pi R \cdot \max\limits_{|z|=R}\left|\frac{e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}}{z+1}\right| \leqslant 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} \to 0$

$\left|\int\limits_{C_\varepsilon}\right| \leqslant 2\pi \varepsilon \cdot \max\limits_{|z|=\varepsilon}\left|\frac{e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}}{z+1}\right| \leqslant 2\pi \varepsilon \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \to 0$

$\int\limits_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon\cdot e^{2\pi i}} f\,dz = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{x+1}\,dx = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{(p-1)\ln x} e^{2\pi i p}}{x+1}\,dx = -e^{2\pi i p}\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx \to -e^{2\pi i p} I$

$$\implies \int\limits_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{C_R} + \int\limits_{C_\varepsilon} + \int\limits_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} \to (1 - e^{2\pi i p})I$$

$$-2\pi i e^{p\pi i} = (1 - e^{2\pi i p})I$$

$$I = \frac{-2\pi i e^{p\pi i}}{1-e^{2\pi i p}} = \frac{2\pi i e^{p\pi i}}{e^{2\pi i p}-1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i p}-e^{-\pi i p}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

Теорема 1.32.

f – мероморфна в $\mathbb{C}$.

$a_1, a_2, ..., a_n$ – ее полюсы, в ∞ устранимая особая точка или полюс.

Тогда $f(z) = C + \sum\limits_{k=1}^{n} G_k(z) + G(z)$, где

$G_k(z)$ – главная часть ряда Лорана в a_k.

$G(z) = \sum\limits_{m=1}^{N} c_m z^m$ – правильная часть ряда Лорана в ∞.

В частности, f – рациональная функция.

Доказательство.

$g(z) := f(z) - G(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} G_k(z)$

g мероморфна в $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n, \infty$ – ее особые точки, и они все устранимые.

$\implies g \in H(\overline{\mathbb{C}}) \implies g \equiv const$

(целая = голоморфная во всей плоскости)

□

Теорема 1.33.

f мероморфна в $\mathbb{C}$.

$a_1, a_2, a_3, ...$ – полюсы.

$M_{R_n} := \max\limits_{|z|=R_n} |f(z)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Тогда $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{|a_k|<R_n} G_k(z)$

Доказательство.

$I_n(z) := \int\limits_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$|I_n(z)| \leqslant 2\pi R_n \cdot \max\limits_{|\zeta|=R_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right| \leqslant 2\pi R_n \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \to 0$

С другой стороны:

$\int\limits_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 2\pi i \sum \text{res} = 2\pi i (\operatorname*{res}\limits_{\zeta=z} + \sum\limits_{|a_k|<R_n} \operatorname*{res}\limits_{\zeta=a_k}) = 2\pi i (f(z) + ?)$

$\operatorname*{res}\limits_{\zeta=a_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \operatorname*{res}\limits_{\zeta=a_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z}$

$\int\limits_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 2\pi i (\operatorname*{res}\limits_{\zeta=z} + \operatorname*{res}\limits_{\zeta=a_k})$

$\operatorname*{res}\limits_{\zeta=z} = G_k(z)$

$|...| \leqslant 2\pi R \cdot \max\limits_{|\zeta|=R} \left| \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} \right| = O(\frac{1}{R}) \to 0$

$\implies \operatorname*{res}\limits_{\zeta=z} = - \operatorname*{res}\limits_{\zeta=a_k}$

$\implies \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} = -G_k(z)$

$= 2\pi i(f(z) - \sum\limits_{|a_k|<R_n} G_k(z))$ □

Пример.

$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$

Лемма.

На окружностях $|z| = \pi(n+\frac{1}{2})$ $\operatorname{ctg} z$ ограничен абсолютной константой.

Доказательство.

Все дуги сдвинем в $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ и причем $|z| \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $|\pi - z| \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Докажем, что тут $\operatorname{ctg} z$ ограничен.

Проверим, что если $|\operatorname{Im} z| \geqslant 1$, то $|\operatorname{ctg} z|$ ограничен.

На оставшейся части ограничен, т.к. непрерывная функция на компакте.

$|\operatorname{ctg} z| = \left|\frac{\cos z}{\sin z}\right| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right| = \left|\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}\right| \leqslant \frac{|e^{2iz}|+1}{1-|e^{2iz}|} = \frac{e^{-2y}+1}{1-e^{-2y}} \leqslant \frac{2}{1-e^{-2}}$

$\operatorname{Im} z = y \geqslant 1$

$z = x + iy$

$e^{2iz} = e^{2ix-2y}$

$|\operatorname{ctg} z| = \left|\frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}\right| \leqslant \frac{1+|e^{-2iz}|}{1-|e^{-2iz}|} = \frac{1+e^{2y}}{1-e^{-2y}} \leqslant \frac{2}{1-e^{-z}}$

$\operatorname{Im} z = y \leqslant -1$ $\quad |e^{-2iz}| = e^{2y}$

$\max\limits_{|z|=\pi(n+\frac{1}{2})} \left|\frac{\operatorname{ctg} z}{z}\right| \to 0 \implies \frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \lim \sum G_k(z)$

$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ в нуле $\frac{1}{z^2}$

в точке πk : $\frac{\operatorname{res}}{z-\pi k} = \frac{1}{\pi k(z-\pi k)}$

$\frac{1}{\pi k(z-\pi k)} + \frac{1}{-\pi k(z+\pi k)} = \frac{1}{\pi k}(\frac{1}{z-\pi k} - \frac{1}{z+\pi k}) = \frac{2}{z^2-(\pi k)^2}$

$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2-(\pi k)^2}$

$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(\pi k)^2}$ □

Пример.

$\operatorname{ctg} z = (\ln \sin z)'$

$(\ln \frac{\sin z}{z})' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(\pi k)^2}$

$\ln \frac{\sin z}{z} = \int\limits_0^z \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2-(\pi k)^2}\, dw = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^z \frac{2w}{w^2-(\pi k)^2}\, dw = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(w^2-(\pi k)^2)\Big|_{w=0}^{w=z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(\pi k)^2-z^2}{(\pi k)^2}$

$\frac{\sin z}{z} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi k)^2-z^2}{(\pi k)^2} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1-(\frac{z}{\pi k})^2)$

$\sin z = z \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1-(\frac{z}{\pi k})^2)$

Пример.

Вычисление суммы ряда.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\frac{f(z)}{\sin \pi z}$ – есть вычеты в целых точках

$\operatorname*{res}\limits_{z=n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} = \frac{f(z)}{(\sin \pi z)'}\Big|_{z=n} = \frac{f(n)}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}$

$\operatorname*{res}\limits_{z=n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = \frac{f(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\Big|_{z=n} = \frac{f(n)}{\pi}$

$g(z) := \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}$

$\operatorname*{res}\limits_{z=0} g(z) = \frac{1}{2}(z^3 \cdot \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2})''\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}(\frac{z \cos \pi z}{\sin \pi z})''\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{\sin^2 \pi z} \cdot z + \operatorname{ctg} \pi z)'\Big|_{z=0} =$
$= \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{\sin^2 \pi z} + \frac{2\pi^2 \cos \pi z}{\sin^3 \pi z} z - \frac{\pi}{\sin^2 \pi z})\Big|_{z=0} = \pi \frac{\pi \cos \pi z \cdot z - \sin \pi z}{\sin^3 \pi z}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi}{3}$

(Последнее равенство – аккуратно разложить в ряд Тейлора)

$\int\limits_{|\, z\,|=n+\frac{1}{2}} g(z)\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} = 2\pi i (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi k^2} - \frac{\pi}{3})$

$\left| \int\limits_{|\, z\,|=n+\frac{1}{2}} g(z)\, dz \right| \leqslant 2\pi(n + \frac{1}{2}) \cdot \max\limits_{|\, z\,|=n+\frac{1}{2}} \left| \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \right| \leqslant const \cdot (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \to 0$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi k^2} - \frac{\pi}{3} \to 0 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{3}$

$\implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

28.03.2018

Теорема 1.34.

f – мероморфная в Ω функция и контур C не проходит через нули и полюсы функции f.

Тогда $\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i (N_f - P_f)$

где N_f – кол-во нулей f внутри C с учетом кратности, а P_f – число полюсов с учетом кратности.

Доказательство.

$\int\limits_C ... = 2\pi i \sum \operatorname{res} \frac{f'}{f}$ по всем нулям и полюсам лежащим внутри C.

$f(z) = (z-a)^m g(z) \;\; g(a) \neq 0 \;\; m \neq 0$

$f'(z) = m(z-a)^{m-1} g(z) + (z-a)^m g'(z)$

$\frac{f'}{f} = \frac{m(z-a)^{m-1} g(z) + (z-a)^m g'(z)}{(z-a)^m g(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ – голоморфна в точке a.

$\implies \operatorname*{res}\limits_{z=a} \frac{f'}{f} = m$ □

Следствие.

1. Если $f \in H(\Omega)$ и C – контур в Ω, не проходящий через нули f, то
   $\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i N_f$, где N_f – кол-во нулей f внутри C с учетом кратности.

2. Принцип аргумента. Если $f \in H(\Omega)$ и C – контур в Ω, не проходящий через нули f, то
   $N_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f$

Доказательство.
$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\operatorname{Ln} f(z))' = (\ln|\, f(z)\,| + i \operatorname{Arg} f(z))'$ □

Теорема 1.35 (Руше)**.**
$f, g \in H(\Omega)$ C – контур в Ω. И $|\, f(z)\,| > |\, g(z)\,|$ при $x \in C$. Тогда f и $f+g$ внутри C имеют одинаковое число нулей с учетом кратности.

Доказательство.
Надо понять, что $\Delta_C \arg f = \Delta_C \arg(f+g)$

$\arg(f+g) = \arg(f \cdot (1+\frac{g}{f})) = \arg f + \arg(1+\frac{g}{f})$

Докажем, что $\Delta_C \arg(1+\frac{g}{f}) = 0$.

$\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ $1+\frac{g}{f}$ лежит в круге радиуса 1 с центром в 1.

□

Пример.
$\lambda > 1$ $z + e^{-z} = \lambda$

Докажем, что у уравнения в правой полуплоскости ровно один корень.

$f(z) = z - \lambda$ $g(z) = e^{-z}$

На мнимой оси $|\, f(z)\,| = |\, iy - \lambda\,| = \sqrt{\lambda^2+y^2} > 1$

$|\, g(z)\,| = |\, e^{-iy}\,| = 1$

На полуокружности $|\, f(z)\,| = |\, Re^{-i\varphi} - \lambda\,| \geqslant |\, Re^{-i\varphi}\,| - \lambda = R - \lambda$

$|\, g(z)\,| = \left| e^{-Re^{i\varphi}} \right| = \left| e^{-R\cos\varphi - iR\sin\varphi} \right| = e^{-R\cos\varphi} \leqslant 1$

Упражнение. Вывести из т. Руше основную теорему алгебры. $f(z) = z^n$.

Пример.

1. Диагонализация степенных рядов.

   $\sum\limits_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z^n w^m = f(z,w)$

   Хотим найти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nn} z^n$

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$

   $\sum\limits_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} z^n w^m \underset{l=n+m}{=} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{l} \binom{l}{n} z^n w^{l-n} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} (z+w)^l = \frac{1}{1-z-w}$

   Как перейти к диагонали?

   $\sum a_{nm} z^n (\frac{w}{z})^m = f(z, \frac{w}{z})$

   $2\pi i \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nn} w^n = \int \sum a_{nm} z^n (\frac{w}{z})^m \frac{dz}{z} = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} w^m \int a_{nm} z^{n-m-1}\, dz = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} w^m \cdot 2\pi i a_{nn}$

   $|\, z\,|$ мало, $\left|\frac{w}{z}\right|$ мало.

   $\int\limits_{|\, z\,|=r} f(z, \frac{w}{z}) \frac{dz}{z} = 2\pi i \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nn} w^n$

   $\int\limits_{|\, z\,|=r} \frac{1}{1-z-\frac{w}{z}} \cdot \frac{dz}{z} = \int\limits_{|\, z\,|=r} \frac{dz}{z-z^2-w} =$

$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4w}}{2}$ эта штука при $+ - \approx 1$, при $- - \approx w$, при маленьких w.

$= 2\pi i \underset{z=\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}}{\operatorname{res}} \frac{1}{z-z^2-w} = 2\pi i \frac{1}{(1-2\cdot(\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}))} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{1-4w}}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}$

2. Произведение Адамара.

$A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$(A \cdot B)(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

$f(z, w) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m z^n w^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m w^m = A(z)B(w)$

А эта штука из предыдущего примера. –Диагонализация таблички.

3. Счастливые билеты.

$\overline{abcdef} \quad a+b+c = d+e+f$

$\overline{abc} \quad a+b+c = n$ – пусть число таких a_n.

Если смогли в такую функцию, то хотим получить $\sum a_n^2 z^n$.

$(1+z+...+z^9)(1+z+z^2+...+z^9) = \sum z^a z^b$

$\overline{x_1 x_2 ... x_k} \quad x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ кол-во a_n

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1+z+z^2+...+z^9)^k = (\frac{z^{10}-1}{z-1})^k$

$\int\limits_{|z|=1} f(z, \frac{1}{z}) \frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=1} (\frac{z^{10}-1}{z-1})^k (\frac{z^{-10}-1}{z^{-1}-1})^k \frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=1} \frac{(2-z^{10}-z^{-10})^k}{(2-z-z^{-1})^k} \frac{dz}{z} = i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(2-e^{10i\varphi}-e^{-10i\varphi})}{(2-e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^k} \, d\varphi =$

$= i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\cos 10\varphi)^k}{(1-\cos\varphi)^k} \, d\varphi = i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sin 5\varphi)^{2k}}{(\sin \frac{\varphi}{2})^{2k}} \, d\varphi = 2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin 10t)^{2k}}{(\sin t)^{2k}} \, dt$

$z = e^{i\varphi} \quad dz = ie^{i\varphi} \, d\varphi$

Теперь поймем, как устроена полученная нами функция.

$2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin 10t)^{2k}}{(\sin t)^{2k}} \, dt = 2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} g(t)^{2k} \, dt$

$g(t) = \frac{\sin 10t}{\sin t}$

$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} g^{2k}(t) \, dt = \int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} + 2 \int\limits_{\pi/10}^{\pi/2} =$

$\int\limits_{\pi/10}^{\pi/2} \leqslant (\frac{1}{\sin \frac{\pi}{10}})^{2k} \cdot \frac{\pi}{2}$ – растет медленнее, чем 4^{2k}. Мелочь по сравнению с тем, что будет в ответе.

$= \int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} + (\leqslant \pi \cdot (\frac{1}{\sin \frac{\pi}{10}})^{2k})$

$\int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + 2 \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/10}$

Надо оценить $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/10}$

$\frac{\sin(10t)}{\sin t}$ убывает на $(\varepsilon, \frac{\pi}{10})$, поэтому наибольшее значение в точке ε. Т.е. получается, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/10} \leqslant \frac{\pi}{10}(\frac{\sin(10\varepsilon)}{\sin\varepsilon})^{2k} = \frac{\pi}{10}g(\varepsilon)^{2k}$

Эта штука будет далее посчитана, она равна $10^{2k}e^{-33k\varepsilon^2}(1+O(k\varepsilon^4))$, но это тоже будет мелочь по сравнению с главным слагаемым, поскольку $k\varepsilon^2$ стремится к бесконечности как какая-то степень и тогда $e^{-33k\varepsilon^2}$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g^{2k}(t)\,dt = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{2k\ln g(t)}\,dt =$

$\frac{\sin 10t}{\sin t} = \frac{10t - \frac{10^3 t^3}{6} + O(t^5)}{t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)} = (10 - \frac{10^3}{6}t^2 + O(t^4))(1 - \frac{t^2}{6} + O(t^4))^{-1} = (10 - \frac{10^3}{6}t^2 + O(t^4))(1 + \frac{t^2}{6} + O(t^4)) =$
$= 10 - (\frac{10^3}{6} - \frac{10}{6})t^2 + O(t^4) = 10(1 - \frac{33}{2}t^2 + O(t^4))$

$\ln g(t) = \ln(10(1 - \frac{33}{2}t^2 + O(t^4))) = \ln 10 + \ln(1 - \frac{33}{2}t^2 + O(t^4)) = \ln 10 - \frac{33}{2}t^2 + O(t^4)$

$e^{2k\ln g(t)} = e^{2k\ln 10}e^{-2k\cdot\frac{33}{2}t^2}e^{O(kt^4)} = 10^{2k}e^{-33t^2k}(1 + O(kt^4))$

Надо, чтобы $k\varepsilon^4 \to 0$

$= (1 + O(k\varepsilon^4))10^{2k}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-33kt^2}\,dt = (1 + O(k\varepsilon^4))10^{2k}\int\limits_{-\sqrt{66k}\varepsilon}^{\sqrt{66k}\varepsilon} e^{-s^2/2}\frac{ds}{\sqrt{66k}}$

Заметим, что $\int\limits_{-\sqrt{66k}\varepsilon}^{\sqrt{66k}\varepsilon} e^{-s^2/2}\,ds \to \sqrt{2\pi}$, если $\varepsilon\sqrt{k} \to \infty$

$2\pi i\cdot$кол-во$\sim 2i10^{2k}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{66k}}$

кол-во $\sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}10^{2k}\cdot\frac{1}{\sqrt{66k}} = \frac{10^{2k}}{\sqrt{33\pi k}}$

(Трюк с интегралами – метод Лапласа)

29.03.2018

Пример. Метод Дарбу.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$

Если ряд сходится в круге $|\,z\,| < R$, то он сходится в круге $|\,z\,| \leqslant R - \varepsilon$. В частности, сходится при $z = R - \varepsilon$.

$\implies a_n(R-\varepsilon)^n \to 0 \implies a_n = o((R-\varepsilon)^{-n})$

На границе круга сходимости всегда есть особая точка. Пусть эта особая точка – b.

$\frac{1}{(b-z)^m} = \frac{1}{b^m(1-\frac{z}{b})^m} = \frac{1}{b^m}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}(\frac{z}{b})^n$

$g(z) = \frac{c_{-m}}{(b-z)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(b-z)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{b-z}$

$\binom{n+m-1}{n} \sim \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$

$\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{1}{b^n}$

Т.е. самая быстро растущая часть в $g(z)$ – то, которое с коэффициентом c_{-m}.

Разберем пример применения метода Дарбу.

$f(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha z}}{(1-z)^2}$ $0 < \alpha < 1$ – пусть получилась такая производящая функция. Оно сходится в круге $|\,z\,| < 1$ и $z = 1$ полюс второго порядка.

$g(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{1-\alpha}(n+1)z^n$

$f(z) - g(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha z} - \sqrt{1-\alpha}}{(1-z)^2} = \frac{(1-\alpha z)-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha z}+\sqrt{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha z}+\sqrt{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{1-z}$ – у этой штуки $z = 1$ – полюс первого порядка. Тогда можно повторить:

$h(z) = \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} z^n$

$f(z) - g(z) - h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ – голоморфна в круге радиуса $\frac{1}{\alpha}$, т.к. проблему в 1 убрали, а дальше проблема только у корня у f.

$\implies b_n = o((\frac{1}{\alpha} - \varepsilon)^{-n}) = o(1)$

$a_n = \sqrt{1-\alpha}(n+1) + \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} + b_n = \sqrt{1-\alpha}(n+1) + \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} + o(1)$

Пример.

Число регулярных графов на n вершинах степени 2 $=: a_n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}} e^{-\frac{z^2+2z}{4}} =: f(z)$

Радиус сходимости 1.

$g(z) = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{1-z}}$

$f(z) - g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}(e^{-\frac{z^2+2z}{4}} - e^{-\frac{3}{4}}) = \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-z}}(e^{-\frac{z^2+2z-3}{4}} - 1) = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{1-z}}(e^{-\frac{(z-1)(z+3)}{4}} - 1) = e^{-3/4}\sqrt{1-z} \cdot h(z)$

Последнее равенство – т.к. $e^{-\frac{(z-1)(z+3)}{4}} - 1 = (1-z)h(z)$, где h – голоморфная. Т.к. при подстановке $z = 1$ получаем ноль (нулевой коэффициент – ноль).

$\sqrt{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{n!} z^n$

$\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n! 2^n n!(2n-1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$

$\sqrt{1-z}h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}) z^n$

$v_n = O(R^{-n})$ $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{R^{n-k}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$ – упражнение на теорему Штольца.

$\implies$ коэффициенты $\sqrt{1-z}h(z) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$

$g(z) = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{1-z}} = e^{-3/4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} z^n$

$\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{(2n!)}{2^n n! 2^n n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

$\implies$ коэффициенты $g(z) \sim \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{\pi n}}$

$\frac{a_n}{n!} \sim \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{\pi n}}$

1.5. §5. Конформные отображения.

***Определение* 1.32.**

$f \ : \ \Omega_1 \to \Omega_2$ – конформные отображения из Ω_1 в Ω_2, если f – биекция и сохраняет углы между кривыми.

Угол между кривыми = угол между касательными к кривым.

Пусть γ_1 и γ_2 – кривые, начинающиеся в точке a.

$\gamma_1, \gamma_2 \ : \ [0,1] \to \Omega_1 \ \ \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$

Угол между $\gamma_1'(0)$ и $\gamma_2'(0)$.

$\frac{d}{dt}((f \circ \gamma_j)(t))\Big|_{t=0} = d_{\gamma_j(0)} f(\gamma_j'(0)) = d_a f(\gamma_j'(0))$

$d_a f$ – растяжение плюс поворот $\implies$ умножение на комплексное число $\implies$ комплексно-линейное $\implies$ есть голоморфность.

$f \ : \ \Omega_1 \to \Omega_2$ – конформные отображения из Ω_1 в $\Omega_2 \iff f \in H(\Omega_1)$ и биекция между Ω_1 и Ω_2.

***Определение* 1.33.**

$f \ : \ \Omega \to \mathbb{C}$ – однолистная, если $f \in H(\Omega)$ и f – инъекция.

Теорема 1.36.

$f \in H(\Omega) \ \ f \not\equiv const \implies f(\Omega)$ – область

Доказательство.

Линейная связность, очевидно, сохраняется.

Проверим, что $f(\Omega)$ – открыто. Пусть $b \in f(\Omega) \implies b = f(a)$

$f(z) - b$ – не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки a.

$\implies \exists \varepsilon > 0$, т.ч. $f(z) - b$ не обращается в ноль на $0 < |\, z - a \,| \leqslant \varepsilon$

$r := \min\limits_{|\, z-a \,| = \varepsilon} |\, f(z) - b \,| > 0$

Докажем, что $B_{r/2}(b) \subset f(\Omega)$. Возьмем $w \in B_{r/2}(b)$.

Надо показать, что $f(z) - w$ имеет ноль.

$f(z) - w = f(z) - b + b - w$

На $|\, z - a \,| = \varepsilon \quad |\, f(z) - b \,| \geqslant r > \frac{r}{2} \geqslant |\, b - w \,|$

$\implies$ по теореме Руше в круге $|\, z - a \,| < \varepsilon$ у уравнения $f(z) - w = 0$ столько же решений, сколько у $f(z) - b = 0$.

$\implies$ хотя бы одно.

$\square$

Следствие.

$f \ : \ \Omega \to \mathbb{C}$ – однолистная $\implies f$ – конформное отображение из Ω в $f(\Omega)$.

Теорема 1.37.

$f \ : \ \Omega \to \mathbb{C}$ – однолистна $\implies f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega$

Замечание.

Обратное неверно. $f(z) = e^z \ \ f'(z) \neq 0$, но точки склеиваются.

Доказательство.

Пусть $f'(a) = 0$. $b := f(a)$.

Проделаем те же действия, что и в предыдущем доказательстве.

В круге $|\, z - a \,| < \varepsilon \quad N_{f-w} = N_{f-b} \geqslant 2$, т.к. a – ноль $\geqslant 2$ порядка.

$\implies f(z) = w$ имеет $\geqslant 2$ решений.

Но f – однолистна $\implies$ это корень с кратностью.

$\implies f'(f^{-1}(w)) = 0 \implies$ (по т. единственности) $f' \equiv 0 \implies f \equiv const$ и не является однолистной. □

Следствие.

1. $f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + ...$ – однолистная в окрестности ∞.
   $\implies c_{-1} \neq 0$
2. f имеет полюс в точке a и однолистная в проколотой окрестности точки $a \implies$ это полюс первого порядка.

Доказательство.

1. $f(\frac{1}{z}) = c_0 + c_{-1}z + c_{-2}z^2 + ...$ – однолистная в проколотой окрестности 0.
   $\implies$ однолистна в окрестности 0. (Если есть две точки с одинаковыми значениями, то есть отрезок, на котором есть производная ноль)
   $\implies c_{-1} = f'(0) \neq 0$
2. $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ – голоморфна в окрестности точки a и однолистна в проколотой окрестности a.
   $\implies$ однолистна в окрестности точки a.
   $\implies g'(a) \neq 0$
   $\implies g$ имеет ноль первого порядка $\implies$ у f был полюс первого порядка.

□

05.04.2018

***Определение* 1.34.**
Ω_1 и Ω_2 – области в $\overline{\mathbb{C}}$.

Ω_1 и Ω_2 конформно эквивалентны, если $\exists f : \Omega_1 \to \Omega_2$ – конформное отображение.

Замечание.
Это отношение эквивалентности.

Теорема 1.38.
$\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ не являются конформно эквивалентными.

Доказательство.
От противного. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ конформно.

$\implies f \in H(\mathbb{C})$ и $|f| \leqslant 1 \implies$ по теореме Лиувилля $f \equiv const$. Противоречие. □

Лемма (Шварца).
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ f \in H(\mathbb{D})$ и $f(0) = 0$.

Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$. И если в какой-то точке $0 \neq a \in \mathbb{D}$ $|f(a)| = |a|$, то $f(z) = e^{i\varphi}z$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

$g(z) = \frac{f(z)}{z}$, 0 – устранимая особая точка.

$\implies g \in H(\mathbb{D})$ и $|\,g(z)\,| \leqslant \frac{1}{r}$ при $|\,z\,| = r < 1$.

$\implies$ по принципу максимума $|\,g(z)\,| \leqslant \frac{1}{r}$ при $|\,z\,| \leqslant r \implies g(z) \leqslant 1$ при $|\,z\,| < 1$.

$\implies \frac{|\,f(z)\,|}{|\,z\,|} \leqslant 1 \implies |\,f(z)\,| \leqslant |\,z\,|$

Если $|\,f(a)\,| = |\,a\,|$, то $|\,g(a)\,| = 1$, т.е. во внутренней точке достигается $\max g \implies$ по принципу максимума $g \equiv const \implies f(z) = cz$

$\implies |\,a\,| = |\,f(a)\,| = |\,c\,| \cdot |\,a\,| \implies |\,c\,| = 1.$ □

Теорема 1.39 (Римана о конформных отображениях)**.**

Ω и $\tilde{\Omega}$ – односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$, у которых граница состоит больше, чем из одной точки.

$z_0 \in \Omega, \tilde{z}_0 \in \tilde{\Omega}$ и $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Тогда существует единственная $f\ :\ \Omega \to \tilde{\Omega}$ – конформное отображение, т.ч. $f(z_0) = \tilde{z}_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha_0$.

Доказательство.

Существование доказывать сложно. Будем доказывать только единственность.

1. $\Omega = \tilde{\Omega} = \mathbb{D} \quad z_0 = \tilde{z}_0 = \alpha_0 = 0.$

   Одно такое отображение знаем – тождественное.

   Докажем, что если $f\ :\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, конформно и $f(0) = 0,\ f'(0) > 0$, то $f(z) = z$.

   Воспользуемся леммой Шварца. Тогда $|\,f(z)\,| \leqslant |\,z\,|$. Применим ее же к f^{-1}. Получим $|\,f^{-1}(z)\,| \leqslant |\,z\,| \implies |\,z\,| \leqslant |\,f(z)\,|$

   $\implies |\,f(z)\,| = |\,z\,| \implies$ по лемме Шварца $f(z) = e^{i\varphi}z$

   Но $f'(0) = e^{i\varphi} > 0 \implies e^{i\varphi} = 1$

2. Общий случай. Т.к. считаем, что существование есть, то

   $\exists \varphi\ :\ \mathbb{D} \to \Omega \;\; \varphi(0) = z_0 \;\; \varphi'(0) > 0.$

   $\exists \psi\ :\ \tilde{\Omega} \to \mathbb{D} \;\; \psi(\tilde{z}_0) = 0 \;\; \arg \psi'(\tilde{z}_0) = -\alpha_0$

   Пусть существуют f_1 и $f_2\ :\ \Omega \to \tilde{\Omega}$ конформные и $f_j(z_0) = \tilde{z}_0 \;\; \arg f_j'(z_0) = \alpha_0$

   $g_j := \psi' \circ f_j \circ \varphi\ :\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – конформно.

   $g_j(0) = 0 \;\; g_j'(0) = \varphi'(0) \cdot f_j'(\varphi(0)) \cdot \psi'(f_j(\varphi(0))) = \varphi'(0) f_j'(z_0) \psi'(\tilde{z}_0) \implies \arg g_j'(0) = 0$

   $\implies g_j(z) \equiv z \implies \psi \circ f_1 \circ \varphi \equiv \psi \circ f_2 \circ \varphi \implies f_1 \equiv f_2.$

□

Следствие (версия теоремы Лиувилля).

$f \in H(\mathbb{C})$ и не принимает значения на некоторой кривой γ.

$\implies f \equiv const$

Доказательство.

$g\ :\ \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma \to \mathbb{D}$ – конформное отображение. Такое отображение существует.

Тогда $g \circ f\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ и $g \circ f \in H(\mathbb{C})$.

$\underset{\text{т. Лиувилля}}{\implies} g \circ f \equiv const \implies f \equiv const$ (т.к. g – биекция) □

Замечание от Ани. У нас было две теоремы Лиувилля. Тут пользуемся теоремой 1.11.

***Определение* 1.35.**

Дробно-линейное отображение $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$.

Упражнение.

$\tilde{f}(z) = \frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$. Доказать, что $\tilde{f} \circ f = \frac{Az+B}{Cz+D}$, где

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Теорема 1.40.

$f\ :\ \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – конформное отображение $\iff$ f – дробно-линейная.

Доказательство.

"$\Longleftarrow$"

f – биекция, f – мероморфна, особая точка $z = -\frac{d}{c}$, это полюс первого порядка.

"$\implies$"

Докажем более общее утверждение.

Теорема 1.41.

$f \in H(\overline{C} \setminus \{z_0\})$ и инъективна $\implies$ f – дробно-линейная.

Доказательство.

1. Пусть z_0 – устранимая особая точка $\implies$ $f \in H(\overline{\mathbb{C}})$ $\implies$ $f \equiv const$
2. Пусть z_0 – существенная особая точка. Возьмем $a \neq z_0$ и $b = f(a)$. B – круг с центром в точке a $\implies$ $f(B)$ – открытое и $b \in f(B)$.

   По теореме Сохоцкого в круге $0 < |\,z - z_0\,| < \varepsilon$ есть последовательность $\{z_n\}$, т.ч. $f(z_n) \to b$

   $\implies$ $f(z_n) \in f(B)$ начиная с некоторого места $\implies$ противоречие с инъективностью.
3. z_0 – полюс. $\implies$ z_0 – полюс первого порядка.

   Если $z_0 \in \mathbb{C}$ $g(z) = f(z) - \frac{c}{z-z_0} \in H(\overline{C})$ $\implies$ $g(z) \equiv const$

   $\implies$ $f(z) = A + \frac{C}{z-z_0}$ – дробное линейное отображение.

   Если $z_0 = \infty$ $g(z) = f(z) - cz \in H(\overline{C})$

   $\implies$ $g(z) = const$ $\implies$ $f(z) = A + cz$ – дробное линейное.

□

□

2. 14. Ряды Фурье

2.1. §1. Пространства Лебега

***Определение* 2.1.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $E \subset X$ – измеримо.

$1 \leqslant p < +\infty$

$L^p(E, \mu) := \{f \ : \ E \to \overline{\mathbb{R}}$(или $\overline{\mathbb{C}}$) измеримые и т.ч. $\int\limits_E |\, f \,|^p \ d\mu < +\infty\}$

$\|f\|_{L^p(E,\mu)} := (\int\limits_E |\, f \,|^p \ d\mu)^{1/p}$. – с точностью до почти везде это норма. Т.е. рассматриваем классы эквивалентности по отношению почти везде.

***Определение* 2.2.**

Существенный супремум – $\inf\{A \ : \ |\, f(x) \,| \leqslant A$ при почти всех $x\}$

$\operatorname{ess\,sup} f$

$\operatorname{vrai\,sup} f$

Свойства.

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \leqslant \sup\limits_E f$
2. $f(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при почти всех $x \in E$.

   Доказательство.

   $B := \operatorname{ess\,sup} f < +\infty$

   $\implies B + \frac{1}{n} \geqslant f(x)$ при почти всех $x \in E \implies \exists e_n \ \ \mu e_n = 0$

   $B + \frac{1}{n} \geqslant f(x)$ при $x \in E \setminus e_n$.

   $\implies e = \bigcup e_n \ \ \mu e = 0$

   На $E \setminus e \ \ f(x) \leqslant B + \frac{1}{n} \ \ \forall n$

   $\implies$ на $E \setminus e \ \ f(x) \leqslant B$. □

***Определение* 2.3.**

$L^\infty(E, \mu) := \{f \ : \ E \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$ измеримые, $\operatorname*{ess\,sup}_E |\, f \,| < +\infty\}$

$\|f\|_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |\, f \,|$

Замечание. (Важный частный случай)

$E = \mathbb{N}, \ \ \mu$ – считающая мера.

$L^p(\mathbb{N}, \mu) := \{(x_n) \ : \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, x_n \,|^p < +\infty\}$

$\|x\| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, x_n \,|^p)^{1/p}$

Обозначают $l^p := L^p(\mathbb{N}, \mu)$.

$l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu) := \{(x_n) \ : \ \sup |\, x_n \,| < +\infty\}$

$\|x\| := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\, x_n \,|$

$\|\cdot\|_p$ – обозначение далее.

Замечание. (Неравенство Гельдера)

$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

При $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p, q \geqslant 1$.

Теорема 2.1 (вложения для пространств L^p)**.**

Пусть $\mu E < +\infty$ и $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Тогда

$L^q(E,\mu) \subset L^p(E,\mu)$ и $\|f\|_p \leqslant (\mu E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$

Доказательство.

$q \neq \infty$

$\|f\|_p^p = \int\limits_E |\, f\,|^p \, d\mu = \int\limits_E |\, f\,|^p \cdot 1 \, d\mu \underset{\text{Гёльдер}}{\leqslant}$

$(|\, f\,|^p)^r = |\, f\,|^q \quad r = \frac{q}{p} > 1 \quad s = \frac{q}{q-p}$

$\leqslant (\int\limits_E |\, f\,|^q \, d\mu)^{p/q} (\int\limits_E 1^s \, d\mu)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p (\mu E)^{\frac{q-p}{q}}$

Если же $q = \infty$

$\|f\|_p^p = \int\limits_E |\, f\,|^p \, d\mu \leqslant \mu E \operatorname{ess\,sup}\limits_E |\, f\,| = \mu E \cdot \|f\|_\infty^p$ □

Замечание.

Если $\mu E = +\infty$, то включений нет.

Упражнение.

1. Придумать примеры для $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$.
2. $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty \implies l^p \subset l^q$.

Теорема 2.2.

$L^p(E,\mu)$ – полное пространство, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

Замечание.

Полное – любая фундаментальная последовательность сходится.

Доказательство.

Для $1 \leqslant p < +\infty$. (Т.к. пользоваться $p = +\infty$ не будем)

Пусть f_n – фундаментальная последовательность.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m \geqslant N \;\; \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.

$\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ Берем n_k, т.ч. $\forall n, m \geqslant n_k \;\; \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k}$

Можно выбрать так, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2_k} \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$.

$S(t) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \,|$

$S_m(t)$ – частичная сумма $S_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} |\, f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \,|$

$\|S_m\|_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$

$\int\limits_E |\, S_m(t)\,|^p \, d\mu < 1 \implies$ по лемме Фату

$\int\limits_E \lim\limits_{m\to\infty} |\, S_m(t)\,|^p \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \int\limits_E |\, S_m(t)\,|^p \, d\mu \leqslant 1$

$\int\limits_E \lim\limits_{m\to\infty} |\, S_m(t)\,|^p \, d\mu = \int\limits_E |\, S(t)\,|^p \, d\mu = \|S\|_p^p$

$\implies S(t)$ почти везде конечно. $\implies$ ряд сходится при почти всех t.

$\implies f_{n_1}(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$ абсолютно сходится при почти всех t.

$\implies$ сходится при почти всех t.

$\implies$ его частичные суммы имеют предел при почти всех t.

$f_{n_1}(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)) = f_{n_{m+1}}(t)$

$\implies$ существует f_0, т.ч. $f_{n_k} \to f_0$ почти везде.

Докажем, что $\|f_n - f_0\|_p^p \to 0$.

$\int\limits_E \left|\, f_{n_j}(t) - f_n(t)\,\right|^p \, d\mu(t) < \frac{1}{2^k}$ при $n \geqslant n_k, \;\; j \geqslant k$

Устремим $j \to \infty$

$f_{n_j}(t) \to f_0(t)$ почти везде

$\frac{1}{2^k} > \int\limits_E \left|\, f_{n_j} - f_n(t)\,\right|^p \, d\mu \to \int\limits_E |\, f_0(t) - f_n(t)\,|^p \, d\mu = \|f_0 - f_n\|_p^p$

$\frac{1}{2^k} > \varliminf\limits_{j\to\infty} \int\limits_E \left|\, f_{n_j} - f_n(t)\,\right|^p \, d\mu \geqslant \int\limits_E \varliminf\limits_{j\to\infty} \left|\, f_{n_j}(t) - f_n(t)\,\right|^p \, d\mu = \int\limits_E |\, f_0(t) - f_n(t)\,|^p \, d\mu = \|f_0 - f_n\|_p^p$

□

***Определение* 2.4.**

$f \; : \; E \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ – ступенчатая, если f принимает лишь конечное число значений.

Лемма.

f – ступенчатая, $1 \leqslant p < +\infty, \; f \in L^p(E, \mu) \iff \mu\{f \neq 0\} < +\infty$

Доказательство.

f – ступенчатая $\implies f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$

Можем считать, что A_k дизъюнктны.

$\|f\|_p^p = \int\limits_E \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k} \right|^p d\mu = \int\limits_E \sum\limits_{k=1}^{n} |\, a_k\,|^p \, \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} |\, a_k\,|^p \, \mu A_k$

Сумма конечна $\iff$ все слагаемые конечны $\iff$ $\mu A_k = +\infty$ лишь если $a_k = 0$. □

***Определение* 2.5.**

(X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – всюду плотно (плотно в X), если $\operatorname{Cl} A = X$.

Пример.

$\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Теорема 2.3.

$1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Множество ступенчатых функций из $L^p(E,\mu)$ плотно в $L^p(E,\mu)$.

Доказательство.

Если $f \geqslant 0$ приближается простыми, то $f = f_+ - f_-$ приближается разностью простых = ступенчатыми.

1. Случай $p = +\infty$

   $\operatorname*{ess\,sup}_E f < +\infty$

   Подправим функцию на множестве нулевой меры, т.ч. $\sup\limits_E f < +\infty$

   Тогда $\exists \varphi_n : E \to \mathbb{R}$ простые, т.ч. $\varphi_n \rightrightarrows f$.

   Т.е. $\|\varphi_n - f\|_\infty \leqslant \sup\limits_E |\varphi_n - f| \to 0$

2. Случай $1 \leqslant p < +\infty$.

   Тогда $\exists \varphi_n \nearrow f \quad \varphi_n$ – простые.

   $\|f - \varphi_n\|_p^p = \int\limits_E |f - \varphi_n|^p \, d\mu = \int\limits_E (f - \varphi_n)^p \, d\mu \to 0$

   $\lim\limits_{n\to\infty} (f - \varphi_n) = 0 \quad f^p$ – суммируемая мажоранта.

$\square$

***Определение* 2.6.**

f – финитная, если она обращается в 0 вне некоторого шара.

Теорема 2.4.

Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, λ – мера Лебега в $\mathbb{R}^m$.

Тогда финитные бесконечно дифференцируемые функции плотны в $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda)$

Доказательство.

Без четкого доказательства.

$\square$

***Определение* 2.7.**

$f : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}} \quad h \in \mathbb{R}^m$.

$f_h(t) := f(t+h)$.

Замечание.

$\|f_h\|_{L^p(\mathbb{R}^m,\lambda)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^m,\lambda)}$

Теорема 2.5 (о непрерывности сдвига)**.**

1. Если f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$, то $\|f_h - f\|_\infty \underset{h\to 0}{\to} 0$

2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^m, \lambda)$ $1 \leqslant p < +\infty$, то $\|f_h - f\|_p \underset{h\to 0}{\to} 0$

Доказательство.

1. $\|f_h - f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^m} |f(t+h) - f(t)| \leqslant \sup\limits_{t\ \in\mathbb{R}^m} |f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$

   Если $|h| < \delta$. Но это определение равномерной непрерывности.

2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и будем искать подходящее $\delta > 0$, т.ч. $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ при $|\,h\,| < \delta$.
   Возьмем финитную непрерывную функцию $g\;:\;\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, т.ч. $\|f - g\|_p < \varepsilon \implies \|f_h - g_h\|_p < \varepsilon$
   $\|f - f_h\|_p = \|f - g + g - g_h + g_h - f_h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leqslant 2\varepsilon + \|g - g_h\|_p$
   Т.е. надо найти такое $\delta > 0$, что $\|g - g_h\|_p < \varepsilon$ при $|\,h\,| < \delta$.
   g обращается в 0 при $|\,t\,| \geqslant R$
   g_h обращается в 0 при $|\,t\,| \geqslant R + 1$, если $|\,h\,| < 1$.
   $g_h(t) = g(h + t)$
   $\|g - g_h\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\,g - g_h\,|^p\; d\lambda = \int\limits_{|\,t\,| \leqslant R+1} |\,g(t) - g_h(t)\,|^p\; d\lambda(t) \leqslant \lambda B_{R+1}(0) \cdot (\operatorname*{ess\,sup}_{|\,t\,|\leqslant R+1} |\,g(t) - g_h(t)\,|^p)$
   На $B_{R+1}(0)$ g непрерывна $\implies$ равномерно непрерывна $\implies$ $\|g - g_h\|_p < \varepsilon$ при $|\,h\,| < \delta$.

$\square$

Упражнение.

$L^p_{2\pi} := \{f\;:\;\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримые, 2π-периодичные и $\int\limits_0^{2\pi} |\,f\,|^p\; d\lambda < +\infty\}$

$\|f\|_p := (\int\limits_0^{2\pi} |\,f\,|^p\; d\lambda)^{1/p}$

Доказать, что если $1 \leqslant p < +\infty$, то $\|f_h - f\|_p \underset{h\to 0}{\to} 0$

2.2. §2. Гильбертовы пространства

Замечание. (Напоминание)

Скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle\;:\;X \times X \to \mathbb{C}$

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\,\langle x, z\rangle + \mu\,\langle y, z\rangle$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ – норма.

***Определение* 2.8.**

H – гильбертово пространство, если в нем есть скалярное произведение и оно полное относительно нормы, задаваемой скалярным произведением.

Пример.

1. $L^2(E, \mu)$
   $\langle f, g\rangle := \int\limits_E f\overline{g}\,d\mu$
2. l^2
   $\langle x, y\rangle := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$

Лемма.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходящийся ряд в H, то

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\langle S_n, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, y\rangle$$

$$\langle S_n, y\rangle \to \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x_k, y\rangle \to \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y\rangle$$

$\square$

***Определение* 2.9.**

$x, y \in H$, x и y ортогональны, если $\langle x, y\rangle = 0$

Обозначение – $x \perp y$.

***Определение* 2.10.**

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_n$ – ортогональный ряд, если $x_j \perp x_k \quad \forall j \neq k$.

Замечание.

Если $x_1, ..., x_n$ ненулевые попарно ортогональные, то они линейно независимые.

$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0 \implies \langle c_1x_1 + ... + c_nx_n, x_k\rangle = 0$

$\langle c_1x_1 + ... + c_nx_n, x_k\rangle = c_1\langle x_1, x_k\rangle + ... + c_n\langle x_n, x_k\rangle = c_k\langle x_k, x_k\rangle = c_k\|x_k\|^2$

Но $\|x_k\| \neq 0$

$\implies c_k = 0 \implies$ линейно независимы.

Теорема 2.6.

$\sum x_n$ – ортогональный ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ – сходится.

И в этом случае $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \quad C_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

Пусть $n > m$:

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} x_k, \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2 = |\,C_n - C_m\,|$$

$\implies$ (фундаментальность $S_n \iff$ фундаментальность C_n) $\implies$ (сходимость $S_n \iff$ сходимость C_n)

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle x_n, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, x_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$$

Т.к. $\langle x_n, x_k \rangle = 0 \;\; \forall k \neq n.$ $\square$

11.04.2018

Следствие.

$\sum x_n$ – сходящийся ортогональный ряд и $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – перестановка индексов, то $\sum x_{\varphi(n)}$ сходится и $\sum x_{\varphi(n)} = \sum x_n$

Доказательство.

$\sum x_n$ – сходится $\iff$ $\sum \|x_n\|^2 < +\infty$. Но этот ряд со всеми положительными элементами, т.е. можем переставлять как хотим. $\iff$ $\sum \|x_{\varphi(n)}\|^2$ сходится $\iff$ $\sum x_{\varphi(n)}$ сходится.

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{\varphi(n)}), \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_{\varphi(k)}) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x_n - x_{\varphi(n)}, x_k - x_{\varphi(k)} \right\rangle =$$

$$\left\langle x_n - x_{\varphi(n)}, x_k - x_{\varphi(k)} \right\rangle = \langle x_n, x_k \rangle - \left\langle x_{\varphi(n)}, x_k \right\rangle - \left\langle x_n, x_{\varphi(k)} \right\rangle + \left\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(k)} \right\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle x_n, x_n \rangle - \left\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \right\rangle - \langle x_n, x_n \rangle + \left\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \right\rangle) = 0$$ $\square$

Пример ортогональных систем.

1. $l^2 \;\; \{e_n\} \;\; e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$
2. $L^2(0, 2\pi) \;\; \{e^{int}\} \;\; n \in \mathbb{Z}$
3. $L^2(0, 2\pi) \;\; 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t...$
4. $L^2(0, \pi) \;\; 1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t...$
5. $L^2(0, \pi) \;\; \sin t, \sin 2t, \sin 3t...$
6. $L^2(\mathbb{T}) \;\; \{z^n\} \;\; n \in \mathbb{Z}$

   $z = e^{it} \;\; dz = ie^{it}\, dt$

Теорема 2.7.

$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $\{e_n\}$ – ортогональная система.

Тогда $c_n = \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$

Доказательство.

$$\langle x, e_n \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_k e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_k e_k, e_n \rangle = c_n \langle e_n, e_n \rangle = c_n \|e_n\|^2$$ $\square$

***Определение* 2.11.**

$\{e_n\}$ – ортогональная система в H, $x \in H$.

Коэффициенты Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_n\}$.

$c_n(x) := \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$

Ряд Фурье – $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$

Замечание.

Если $x = \sum c_n e_n$, то это его ряд Фурье.

Теорема 2.8 (О частичных суммах ряда Фурье).

$\{e_n\}$ – ортогональная система. $x \in H$

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)e_k,\ \ \mathcal{L}_n := Lin\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

Тогда

1. S_n ортогональная проекции на $\mathcal{L}_n$, т.е. $\forall y \in \mathcal{L}_n \quad (x - S_n) \perp y$
2. S_n – наилучшее приближение к x в $\mathcal{L}_n$

   $\|x - S_n\| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$
3. $\|S_n\| \leqslant \|x\|$

Доказательство.

1. $x = S_n + z$. Надо доказать, что $z \perp y\ \ \forall y \in \mathcal{L}_n$

   Достаточно доказать, что $z \perp e_k\ \ \forall k = 1, ..., n$

   $\langle z, e_k\rangle = \langle x - S_n, e_k\rangle = \left\langle x - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x)e_j, e_k \right\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x) \langle e_j, e_k\rangle =$

   $= \langle x, e_k\rangle - c_k(x) \langle e_k, e_k\rangle = 0$ по определению $c_k(x)$.
2. $x - y = S_n + z - y = z + (S_n - y),\ \ y \in \mathcal{L}_n$

   Заметим, что тогда и $S_n - y \in \mathcal{L}_n$, а значит по первому свойству $z \perp (S_n - y)$.

   $\|x - y\|^2 = \|z\|^2 + \|S_n - y\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \|S_n - x\|^2$

   Т.е. $\|x - y\| \geqslant \|S_n - x\|$, что и хотели.
3. $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|S_n\|^2 \geqslant \|S_n\|^2$

□

Следствие Неравенство Бесселя.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ c_n(x)\ |^2\ \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$

Доказательство.

$\|S_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$

$\|S_n\|^2 = \|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)e_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|c_k(x)e_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |\ c_k(x)\ |^2\ \|e_k\|^2$

И переходим к пределу $n \to \infty$. □

Теорема 2.9 (Рисса-Фишера).

$\{e_n\}$ – ортогональная система.

$x \in H$. Тогда

1. Ряд Фурье для x сходится. ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ – сходится)
2. $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n + z$, где $z \perp e_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

3. $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n \iff \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, c_k(x)\,|^2 \, \|e_n\|^2$

Доказательство.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, c_n(x)\,|^2 \, \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2 < +\infty$

   $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$ – сходится.

2. $z := x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$

   $\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \langle e_n, e_n \rangle = 0$

3. "$\implies$" уже была

   "$\impliedby$"

   $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n + z \quad z, e_1, e_2, ...$ – ортогональная система.

   $\implies \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, c_n(x)\,|^2 \, \|e_n\|^2 + \|z\|^2$

   $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, c_n(x)\,| \, \|e_n\|^2 \implies \|z\| = 0$

$\square$

Замечание.

1. $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, c_k(x)\,|^2 \, \|e_k\|^2$ – тождество Парсеваля.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ – проекция на $\mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\}$

   Т.е. $(x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k) \perp y \ \ \forall y \in \mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\}$.

3. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\, c_k\,|^2 \, \|e_k\|^2 < +\infty$, то $\exists x \in H$, т.ч. $c_k = c_k(x)$.

   $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – просто возьмем такой x.

***Определение* 2.12.**

$\{e_n\}$ – ортогональная система.

$\{e_n\}$ – базис, если $\forall x \in H \ \ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$

$\{e_n\}$ – полная, если $z \perp e_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $z = 0$.

$\{e_n\}$ – замкнутая, если $\forall x \in H$ выполняется тождество Парсеваля.

Теорема 2.10.

$\{e_n\}$ – ортогональная система. Следующие условия равносильны.

1. $\{e_n\}$ – базис
2. $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)}\|e_n\|^2$
3. $\{e_n\}$ – замкнутая.
4. $\{e_n\}$ – полная
5. $\mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\} = H$

Доказательство.

"$1 \implies 2$"

$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n \quad y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(y)e_k$

$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n, \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(y)e_k \right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle c_n(x)e_n, c_k(y)e_k\rangle =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_k(y)}\,\langle e_n, e_k\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)}\|e_n\|^2$

"$2 \implies 3$"

$x = y$ дает тождество Парсеваля.

"$3 \implies 4$"

Напишем для $z \perp e_n$ тождество Парсеваля.

$\|z\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, c_n(z)\,|^2\, \|e_n\|^2 = 0 \implies z = 0$

"$4 \implies 1$"

$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n + z$, где $z \perp e_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies z = 0$

$\implies x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$

"$1 \implies 5$"

$x \in H \implies x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n \in \mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\}$

"$5 \implies 4$"

Пусть $z \perp e_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \implies z \perp \mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\} = H$

$\implies z \perp z \implies \|z\|^2 = 0 \implies z = 0$ □

Пример.

Функции Радемахера

$r_n(t) := (-1)^{[2^n t]} \quad t \in [0, 1]$

На самом деле $r_n(t) = 1 - 2a_n(t)$ a_n – n-ая двоичная цифра, при условии, что t не двоично рациональные.

$\{r_n\}$ – ортогональная система в $L^2[0, 1]$.

$k > n$

$\langle r_n, r_k\rangle = 0$

Это не полная система. Т.к. $r_1 r_2 \perp r_n$

Подправим до полной.

Функции Уолша $A \subset \mathbb{N}$ $\#A < +\infty$

$w_A(t) := \prod\limits_{k \in A} r_k(t)$ $w_\varnothing(t) \equiv 1$

– полная ортонормированная система.

$A \neq B$

$\langle w_A, w_B \rangle = \left\langle w_{A \setminus B}, w_{B \setminus A} \right\rangle = 0$

Надо проверить, что $\mathrm{Cl}\, Lin\{w_A\} = H$

$Lin\{w_A \ : \ A \subset \{1, 2, ..., n\}\} \subset Lin\{\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\}$

С другой стороны, размерности совпали. (2^n линейно независимых векторов)

Значит, $Lin\{w_A \ : \ A \subset \{1, 2, ..., n\}\} = Lin\{\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\}$

$\mathrm{Cl}\, Lin\{\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}\} \supset$ все ступенчатые функции.

Ступенчатые функции плотны, т.е. получили все.

19.04.2018

Теорема 2.11 (Ортогонализация Грамма-Шмидта)**.**

$x_1, x_2, x_3, ... \in H$ – линейно независимы

$L_n := Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда

$\exists e_1, e_2, e_3, ...$ ортонормированная система, т.ч. $Lin\{e_1, e_2, ..., e_n\} = L_n$

И если $f_1, f_2, ...$ ортонормированная система, т.ч. $Lin\{f_1, f_2, ..., f_n\} = L_n$, то $f_n = \lambda_n e_n$, где $|\,\lambda_n\,| = 1$.

***Определение* 2.13.** Ортонормированные многочлены

$\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ μ – мера на $\langle a, b \rangle$

$\int\limits_a^b x^k \, d\mu(x) < +\infty$. Тогда можно взять последовательность мономов $1, x, x^2, x^3, ...$ в $L^2(\langle a, b \rangle, \mu)$ и ортонормировать ее по Граму-Шмидту по заданному скалярному произведению.

$\langle f, g \rangle := \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)} \, d\mu(x)$

Пример.

1. Многочлены Лежандра

   $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$

   Ортонормированная система в $L^2[-1, 1]$

2. Многочлены Чебышева первого рода.

   $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ ортогональная система в $L^2([-1, 1], \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - x^2}})$

3. Многочлены Чебышева второго рода.

   $U_n(x) := \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin x}$ ортогональная система в $L^2([-1, 1], \sqrt{1 - x^2} \, d\lambda)$

***Определение* 2.14.**

(X, ρ) – метрическое пространство, $x \in X$ и $A \subset X$.

Расстояние от x до A = наилучшее приближение к x элементами множества A:

$\rho(x,A) := \inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$

Такой y^*, для которого $\rho(x,y^*)=\rho(x,A)$ – элемент наилучшего приближения.

Теорема 2.12 (О наилучшем приближении в гильбертовом пространстве)**.**
A – выпуклое, замкнутое непустое подмножество H, $x\in H$.

Тогда существует единственный элемент наилучшего приближения.

Лемма.
$2(\|u\|^2+\|v\|^2)=\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$

Доказательство. (теоремы)
Пусть y и $z\in A \implies \frac{y+z}{2}\in A$.

$d:=\rho(x,A) \implies d^2\leqslant \|x-\frac{y+z}{2}\|^2$

$\implies 2(\|x-y\|^2+\|x-z\|^2)=\|2x-(y+z)\|^2+\|y-z\|^2$

Заметим, что $\|2x-(y+z)\|^2=4\|x-\frac{y+z}{2}\|^2\geqslant 4d^2$

$\implies \|y-z\|^2\leqslant 2(\|x-y\|^2+\|x-z\|^2-2d^2)$

Т.к. $d=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\| \implies \exists y_n\in A\ :\ \|x-y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} d$

$\|y_n-y_m\|^2\leqslant 2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2-2d^2)$

$\implies y_n$ – фундаментальная последовательность $\implies \exists y^*=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in A$, т.к. замкнуто.

$\implies \|x-y^*\|=d$ □

Теорема 2.13 (о проекции)**.**
$x\in H$ и L – замкнутое подпространство.

Тогда существует единственный $y\in L$ и $z\perp L$, т.ч. $x=y+z$. И y – элемент наилучшего приближения к x в L.

Доказательство.
Существование. Возьмем элемент наилучшего приближения к x в L.

$\forall l\in L\ \ y+\lambda l\in L$

$\implies \|y+\lambda l-x\|^2\geqslant\|y-x\|^2$

$z:=y-x$

$\langle z+\lambda l, z+\lambda l\rangle\geqslant\langle z,z\rangle$

$\langle z,z\rangle+\lambda\langle l,z\rangle+\langle z,\lambda l\rangle+\langle\lambda l,\lambda l\rangle=\langle z,z\rangle+\lambda\langle l,z\rangle+\overline{\lambda}\langle z,l\rangle+|\lambda|^2\langle l,l\rangle$

$\implies \lambda\langle l,z\rangle+\overline{\lambda}\langle z,l\rangle+|\lambda|^2\langle l,l\rangle\geqslant 0$

Подставим $\lambda:=\frac{-\overline{\langle l,z\rangle}}{\|l\|^2}$

$\lambda\langle l,z\rangle+\overline{\lambda}\langle z,l\rangle+|\lambda|^2\|l\|^2\geqslant 0$

$-\frac{|\langle l,z\rangle|^2}{\|l\|^2}-\frac{|\langle l,z\rangle|^2}{\|l\|^2}+\frac{|\langle l,z\rangle|^2}{\|l\|^4}\|l\|^2=-\frac{|\langle l,z\rangle|}{\|l\|^2}\leqslant 0$

$\implies |\langle l,z\rangle|^2=0 \implies z\perp l$

Единственность. $x=y+z=y'+z'$

$y-y'=z'-z\ \ z'$ и $z\perp L$, в частности $y-y'$

$0=\langle y-y',z'-z\rangle=\langle y-y',y-y'\rangle=\|y-y'\|^2 \implies y=y' \implies z=z'$

□

***Определение* 2.15.**

Ортогональная проекция x на L – тот y из теоремы.

Ортогональный проектор $P_L \ : \ H \to H \ \ P_L x = y$

Ортогональное дополнение $L^{\perp} := \{z \in H \ : \ z \perp L\}$

Свойства.

1. P_L – линейный оператор.

2. Если $L \neq \{0\}$, то $\|P_L\| = 1$

3. $P_{L^{\perp}} = Id - P_L$

4. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

Доказательство.

1. Очевидно.

2. $\|P_L x\|^2 = \|y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$
   $\implies \frac{\|P_L x\|}{\|x\|} \leqslant 1 \implies \|P_L\| \leqslant 1$
   Поскольку вектора из L переходят в себя $P_L y = y \ \ \forall y \in L$, то получили что 1 достигается. Значит, $\|P_L\| = 1$.

3. $L^{\perp} \quad P_{L^{\perp}} x = z$

   $x = y + z = P_L x + P_{L^{\perp}} x$

4. $P_{(L^{\perp})^{\perp}} = Id - P_{L^{\perp}} = Id - (Id - P_L) = P_L$
   $\implies L = P_L H = P_{(L^{\perp})^{\perp}} H = (L^{\perp})^{\perp}$

□

***Определение* 2.16.**

(X, ρ) – метрическое пространство – сепарабельное, если существует такое счетное множество $A \subset X$, что $\operatorname{Cl} A = X$.

Обычно такое множество A называют всюду плотным.

Пример.

$\mathbb{R}^n$ сепарабельно, т.к. можно взять $A = \mathbb{Q}^n$.

Теорема 2.14.

В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует не более чем счетный ортонормированный базис.

Доказательство.

Берем счетное $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \quad \operatorname{Cl} A = H$.

Проредим эти x_i так, что останется линейно независимое подмножество. (Идем, встретили выражающийся через предыдущие – выкинули).

$\{y_1, y_2, y_3, ...\} \implies Lin\{x_n\} = Lin\{y_n\}$

По Граму-Шмидту $\exists e_1, e_2, ...$ – ортонормированная система.

$Lin\{e_1, e_2, ..., e_n\} = Lin\{y_1, y_2, ..., y_n\}$

$\implies Lin\{e_n\} = Lin\{y_n\} = Lin\{x_n\}$

$\implies \mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\} = \mathrm{Cl}\, Lin\{x_n\} \supset \mathrm{Cl}\{x_n\} = H$

$\implies \{e_n\}$ – базис. $\square$

Теорема 2.15.

Бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изоморфно l^2. (Т.е. есть такое отображение в l^2, что оно биекция и сохраняет скалярное произведение)

Доказательство.

$x \in H \mapsto \{c_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

Берем базис $\{e_n\}$. Знаем, что $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)} = \langle\{c_n(x)\}, \{c_n(y)\}\rangle_{l^2}$ $\square$

2.3. §3. Тригонометрические ряды Фурье

***Определение* 2.17.**

$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

– тригонометрический многочлен степени $\leqslant n$.

Если $|\, a_n\,| + |\, b_n\,| \neq 0$, то тригонометрический многочлен степени n.

Замечание.

$\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$ $\quad \sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$

$T_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

***Определение* 2.18.**

Тригонометрический ряд

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Комплексная запись $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

Сходимость в понимании $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \underset{n\to\infty}{\to} ...$

Лемма.

Пусть тригонометрический ряд сходится в пространстве $L^1[0, 2\pi]$ к функции f.

Тогда

$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx$

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$

Доказательство.

S_n – частичная сумма. Пусть $n \geqslant k$.

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} S_n(x)\cos kx\,dx - \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |\,S_n(x)\cos kx - f(x)\cos kx\,|\;dx \leqslant \|S_n - f\|_{L^1(0,2\pi)} \to 0$$

Заметим, что $\int\limits_0^{2\pi} S_n(x)\cos kx\,dx = \pi a_k$, т.е. получили, что надо.

Для остальных коэффициентов доказывается аналогично. □

***Определение* 2.19.**

Пусть $f \in L^1[0, 2\pi]$. Тогда

$a_k := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$

$b_k := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$

$c_k := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$

Коэффициенты Фурье для f.

Ряд Фурье для функции f

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

Замечание.

$|\,a_k\,| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\pi}$ $\quad |\,b_k\,| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\pi}$

$|\,c_k\,| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}$

03.05.2018

***Определение* 2.20.** (Всякие обозначения)

$C_{2\pi}$ – непрерывные 2π-периодические функции.

$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|\,f(x)\,| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|\,f(x)\,|$

$L^p_{2\pi} = \{f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, измеримые, 2π-периодичные $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\,f(x)\,|^p\;dx < +\infty\}$

$\|f\|_{L^p_{2\pi}} = (\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\,f(x)\,|^p\;dx)^{1/p}$

Если $f \in L^p(0, 2\pi)$, то можно продолжить по периоду и попасть в $L^p_{2\pi}$

Если $f \in C[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$, то можно продолжить по периоду и попасть в $L^p_{2\pi}$

$$A_k(f, x) := \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{при } k = 0 \\ a_k\cos kx + b_k\sin kx & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$ – ряд Фурье.

Замечание.

$$A_k(f,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,dt & k=0 \\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos kt\,dt & k\neq 0 \end{cases}$$

При $k=0$ $A_0(f,x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$

При $k>0$, $A_k(f,x) = a_k\cos kx + b_k\sin kx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cdot\cos kx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\cdot\sin kx =$
$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\cos ks\,ds$

Пример.

Хотим понять, что происходит с рядом Фурье. Когда он сходится/расходится.

1. Дюбуа-Реймон

   $\exists f\in C_{2\pi}$, т.ч. ряд Фурье расходится в некоторой точке

2. Лебег

   $\exists f\in C_{2\pi}$, т.ч. ряд Фурье сходится во всех точках, но не равномерно.

3. Колмогоров

   $\exists f\in L^1_{2\pi}$, т.ч. ряд Фурье расходится во всех точках.

4. Карлесон

   $\forall f\in L^2_{2\pi}$ ряд Фурье сходится почти везде.

5. Рисс

   $1<p<+\infty$ $\forall f\in L^p_{2\pi}$ ряд Фурье сходится к f в $L^p_{2\pi}$

Лемма (Римана-Лебега)**.**

$E\subset\mathbb{R}$ $f\in L^1(E)$

Тогда $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int\limits_E f(x)e^{i\lambda x}\,dx = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int\limits_E f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int\limits_E f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$

Лемма.

В $L^p(\mathbb{R})$ при $1\leqslant p<+\infty$ плотны ступенчатые функции на ячейках.

Доказательство.

Пусть A – измеримое множество, $\lambda A<+\infty$. Накроем его открытым $G\supset A$, что $\lambda(G\setminus A)<\varepsilon$.

$G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k,\beta_k)$

$\implies \exists n$ $\lambda(G\setminus\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[\alpha_k,\beta_k))<\varepsilon$

$\implies \lambda(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[\alpha_k,\beta_k)\triangle A)<2\varepsilon$ – именно так выглядит норма разности двух ступенчатый функций. $\square$

Доказательство. (леммы Римана-Лебега)

ШАГ 1. $f = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta)}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda x}\,dx = \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \frac{e^{i\lambda\beta}-e^{i\lambda\alpha}}{i\lambda}$$

$$|\ldots| \leqslant \frac{|e^{i\lambda\beta}-e^{i\lambda\alpha}|}{|i\lambda|} \leqslant \frac{2}{\lambda} \to 0$$

ШАГ 2. f – ступенчатая функция на ячейках.

ШАГ 3. f – произвольная суммируемая функция.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ступенчатая на ячейках $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\,dx \to 0 \implies \exists N\ \ \forall \lambda \geqslant N \quad \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{i\lambda x} - g(x)e^{i\lambda x}|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\,dx =$$
$$= \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$$

$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|$, где каждое слагаемое $< \varepsilon$.

$$\implies < 2\varepsilon$$

$$\implies \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0$$

$\square$

Следствие.

Если $f \in L^1_{2\pi}$, то $a_k(f), b_k(f), c_k(f), c_{-k}(f) \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Доказательство.

$E = [-\pi, \pi] \quad \lambda = k$ $\square$

Замечание Напоминание.

Липшицевы функции $Lip_M\alpha$

$\forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$

Модуль непрерывности $w_f(\delta) := \sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|$

Липшицевость $\implies w_f(\delta) \leqslant M\delta^{\alpha}$

Теорема 2.16.

Если $f \in C_{2\pi}$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, 2|c_k(f)| \leqslant w_f(\frac{\pi}{k})$

Доказательство.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tfrac{\pi}{k})\cos kx\,dx$$

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tfrac{\pi}{k})\cos kx\,dx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{k}))\cos kx\,dx$$

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{k})||\cos kx|\,dx \leqslant w_f(\tfrac{\pi}{k})$$ $\square$

Следствие.

Если $f \in Lip_M\alpha$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, 2|c_k(f)| \leqslant M(\frac{\pi}{k})^{\alpha}$

Лемма.
$f \in C^1_{2\pi}\;\; a_k(f') = kb_k(f) \quad b_k(f') = -ka_k(f)$

Доказательство.
$a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(-k\sin kx)\,dx = kb_k(f)$ □

Следствие.
Если $f \in C^r_{2\pi}$ и $f^{(r)} \in Lip_M\alpha \quad 0 \leqslant \alpha < 1$, то $|\,a_k(f)\,|, |\,b_k(f)\,|, 2\,|\,c_k(f)\,| \leqslant M\frac{\pi^\alpha}{k^{\alpha+r}}$

Доказательство.
$a_k(f^{(r)}) = \pm_{b_k(f)k^r}^{a_k(f)k^r}$

$\left|\,a_k(f^{(r)})\,\right| \leqslant M\frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}$ □

***Определение* 2.21.**
$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$ – ядро Дирихле.

Свойства.

1. $D_n(t)$ – четная, 2π-периодичная функция.
2. $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi$
4. Если $t \neq 2\pi k$, то $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

   Доказательство.
   $2\sin\frac{t}{2}D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t) = \sin(n+\frac{1}{2})t$ □

Лемма.
$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x\pm t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt$

Доказательство.
$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$

$S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$ □

Следствие.
$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t) + o(1)$ при $0 < \delta < \pi$, $n \to +\infty$

Доказательство.
$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\ldots = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\ldots + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\ldots$

Надо понять, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\ldots \to 0$.

$\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x+t)-f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$

Нужна суммируемость $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ на $[\delta,\pi]$

$|\dots| \leqslant \frac{|f(x+t)|+|f(x-t)|}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ – суммируема.

$\implies$ по лемме Римана-Лебега $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt \to 0$ □

Теорема 2.17 (Принцип локализации)**.**

$f;g\in L^1_{2\pi}\quad x\in\mathbb{R}\ \ \delta>0$

Если f и g совпадают на $(x-\delta,x+\delta)$, то ряды Фурбе функций f и g в точке x ведут себя одинаково.

Более того $S_n(f,x)-S_n(g,x)\underset{n\to+\infty}{\to}0$

Доказательство.

$h=f-g\implies h(t)=0$ при $t\in(x-\delta,x+\delta)$

$S_n(h,x)=o(1)$

$S_n(h,x)=S_n(f,x)-S_n(g,x)$ □

Лемма.

$f\in L^1_{2\pi}$, $0<\delta<\pi$. Тогда $\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(t)|}{t}\,dt$ и $\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$\frac{2}{\pi}s\leqslant\sin s\leqslant s$ при $s\in(0,\frac{\pi}{2}]$

$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}\leqslant\sin\frac{t}{2}\leqslant\frac{t}{2}\implies\frac{|f(t)|}{t}\leqslant\frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{|f(t)|}{t}$ □

***Определение* 2.22.**

x – регулярная точка функции f, если $f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

$f'_+=\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}$

$f'_-=\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}$

***Определение* 2.23.** Обозначение.

$f^*_x(t):=f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)$

Если точка регулярная, то $f^*_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$

Теорема 2.18 (признак Дини)**.**

$f\in L^1_{2\pi}\ \ x\in\mathbb{R}$, x – точка непрерывности или разрыва первого рода.

$0<\delta<\pi$

Тогда если $\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f^*_x(t)|}{t}\,dt$ – сходится, то ряд Фурье для f в точке x сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Доказательство.

$S_n(f,x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+0)-f(x-0))D_n(t)\,dt=$

$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f^*_x(t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{f^*_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\to0$ по Римана-Лебега.

Если $\int\limits_0^\pi \left| \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt < +\infty$

$\int\limits_0^\pi \left| \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt = \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi$

$\int\limits_\delta^\pi |\dots| \, dt \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \int\limits_\delta^\pi |\, f_x^*(t) \,| \, dt < +\infty$

По лемме $\int\limits_0^\delta \left| \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt$ и $\int\limits_0^\delta \left| \frac{f_x^*(t)}{t} \right| dt$ ведут себя одинаково.

$\implies$ сходится □

10.05.2018

Следствие.

1. В точках регулярности в условии теоремы ряд Фурье сходится к значению в точке, в частности, в точке непрерывности.
2. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ и существует конечное $f'_\pm(x)$, то ряд Фурье сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

   В частности, в регулярных точках стремится к значению функции.
3. Если функция f кусочно дифференцируема, то ряд Фурье сходится во всех точках.

Доказательство.

1. Ничего нового не утверждает.
2. $\int\limits_0^\delta \frac{f_x^*(t)}{t} \, dt = \int\limits_0^\delta \left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \right) dt$

   При $t \to 0$ оба подинтегральных слагаемых стремятся к чему-то конкретному. $\implies$ вблизи нуля ограничены.

   $\implies \int\limits_0^\delta$ сходится.
3. Кусочно дифференцируемость $\implies$ непрерывность и $f'_\pm(x) \ \ \forall x$.

□

Пример.

$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad x \in [0, 2\pi]$ и продолжим по периоду. Получилась нечетная функция.

$\implies a_n = 0 \ \ \forall n$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{1}{2\pi} \left(x \cdot \frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) =$

$= -\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{2\pi}{2\pi n} = \frac{1}{n}$

$\frac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ при $0 < x < 2\pi$

$\frac{\pi-2x}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n}$ при $0 < x < \pi$

$\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ при $0 < x < \pi$

$\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$ при $0 < x < \pi$.

$x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$ при $0 < x < \pi$. Более того, это верно $-\pi < x < \pi$, т.к. верно для нуля и функции обе нечетные.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } (0,\pi) \\ -1 & \text{на } (-\pi, 0) \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Функция нечетная, значит $a_n = 0$.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}(-\frac{\cos nx}{n})\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\frac{1-(-1)^n}{n})$

$b_{2n} = 0 \quad b_{2n-1} = \frac{4}{\pi n}$

$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ при $x \neq \pm\pi$

Замечание Эффект Гиббса.

$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

$S_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$

$S_n'(x) = 0 \iff \sin 2nx = 0 \iff x = \frac{\pi}{2n}\cdot m$

Ближайшая к 0 точка $x = \frac{\pi}{2n}$

$S_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = \frac{1}{4n}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt =$

$\sin\frac{t}{2n} = \frac{t}{2n} + O(\frac{t^3}{8n^3})$

$= \frac{1}{4n}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{\frac{t}{2n}}(1 + O(\frac{t^2}{n^2}))\,dt = (1 + O(\frac{1}{n^2}))\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$

Частичная сумма для f $\quad \frac{2}{\pi}(1 + O(\frac{1}{n^2}))\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1,17898$

Т.е. после скачка идет ошибка около 17%.

2.4. §4. Суммирование рядов Фурье

***Определение* 2.24.**

$A_0, A_1, A_2, \ldots$

Будем считать предел по-новому.

$\alpha_n := \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1}$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$, то последовательность $\{A_n\}$ сходится к α по Чезаро.

Свойства.

1. Если $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то A_n сходится к A по Чезаро. (Это следствие теоремы Штольца)
2. Предел по Чезаро линеен.

Определение 2.25. Сумма ряда по Чезаро

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\alpha_n = \frac{A_0+A_1+...+A_n}{n+1}$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, то $(c)\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$

Пример.

$1 - 1 + 1 - 1 + ...$

$A_{2n} = 1$

$A_{2n-1} = 0$

$\frac{A_0+A_1+...+A_{2n-1}}{2n} = \frac{1}{2}$

$\frac{A_0+A_1+...+A_{2n}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$

Свойства.

3. Если ряд суммируем по Чезаро, то $a_n = o(n)$
4. $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(1 - \frac{k}{n+1})a_k$

Доказательство.

3. $\alpha_n \to \alpha \implies \frac{n+1}{n}\alpha_n \to \alpha$

   $\implies \frac{n+1}{n}\alpha_n - \alpha_{n-1} \to 0 \implies \frac{A_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \to 0$

   $\implies \frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n} \to 0$
4. Упражнение.

□

Замечание.

Теорема Харди. Если ряд $\sum a_n$ суммируем по Чезаро, и $a_n = O(\frac{1}{n})$ (или даже $a_n \geqslant -\frac{c}{n}$), то ряд сходится.

Пример.

$\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nt$

Частичные суммы $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

$\Phi_n(t) := \frac{D_0(t)+D_1(t)+...+D_n(t)}{n+1}$ – ядро Фейера.

Свойства ядра Фейера.

1. Φ_n – четная 2π-периодичная функция.
2. $\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$
3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \pi$

4. $\Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$

   Доказательство.
   $\Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k+\frac{1}{2})t = \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}} \cdot (\frac{1-\cos(n+1)t}{2\sin\frac{t}{2}}) = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ □

5. $\Phi_n(t) \geqslant 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} \Phi_n(t) = 0$

   Доказательство.
   $\max\limits_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} \Phi_n(t) = \max\limits_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant \frac{\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}}{n+1} \to 0$ □

Замечание Суммирование рядов Фурье по Чезаро.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{D_0(t)+D_1(t)+\ldots+D_n(t)}{n+1}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)\,dt$$

***Определение* 2.26.**

$$f, g \in L^1_{2\pi} \quad f*g(x) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

– свертка функций f и g.

Свойства.

1. $f*g \in L^1_{2\pi}$
2. $f*g = g*f$
3. $c_k(f*g) = 2\pi c_k(f)c_k(g)$ – коэффициенты Фурье для экспонент.
4. $1 < p < +\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ $\;f \in L^p_{2\pi}, g \in L^q_{2\pi}$
   $\implies f*g \in C_{2\pi}$ и $\|f*g\|_{L^\infty_{2\pi}} \leqslant \|f\|_{L^p_{2\pi}}\|g\|_{L^q_{2\pi}}$
5. $1 \leqslant p \leqslant +\infty \quad f \in L^p_{2\pi}, g \in L^1_{2\pi} \implies \|f*g\|_{L^p_{2\pi}} \leqslant \|f\|_{L^p_{2\pi}}\|g\|_{L^1_{2\pi}}$

Доказательство.

1. $F(x,t) = f(x-t)g(t)$ – измерима на $[-\pi,\pi]^2$

   $$\int\limits_{[-\pi,\pi]^2} |\,F(x,t)\,|\,dx\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\,f(x-t)\,|\,d(x-t) \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\,g(t)\,|\,dt = \|f\|_{L^1_{2\pi}}\|g\|_{L^1_{2\pi}}$$

   $\implies$ по теореме Фубини $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f*g(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\,dx$ – внутренняя часть измерима в широком смысле.

   $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\,f*g(x)\,|\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\ldots|\,dt\,dx \leqslant \|f\|\|g\|$$

2. Замена $x - t = s$.
   $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)g(x-s)\,ds$, но это верно по любому периоду.

3. $c_k(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f*g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-ikt}e^{-ik(x-t)}\,dt\,dx =$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t)e^{-ikt}e^{-iks}\,dt\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}\,ds\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}\,dt = 2\pi c_k(f)c_k(g)$

□

17.05.2018

Доказательство.

4. $|\, f*g(x)\,| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right| \leqslant (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t)\,|^p\ dt)^{1/p}\cdot(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, g(t)\,|^q\ dt)^{1/q} = \|f\|_{L^p_{2\pi}}\|g\|_{L^q_{2\pi}}$

   Непрерывность:

   $f*g(x+h) - f*g(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+h-t)g(t)\,dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt =$

   $= \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+h-t) - f(x-t))g(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)g(t)\,dt$

   $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$

   $|\, f*g(x+h) - f*g(x)\,| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)g(t)\,dt\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^p_{2\pi}}\|g\|_{L^q_{2\pi}} = \|f_h - f\|_{L^p_{2\pi}}\|g\|_{L^q_{2\pi}}$

   Но $\|f_h - f\|_{L^p_{2\pi}} \to 0$ при $h \to 0$.

   $f_h(x) := f(x+h)$

   Значит, непрерывность есть.

5. $\|f*g\|^p_{L^p_{2\pi}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right|^p dx \leqslant$

   $\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t)\,|\,|\, g(t)\,|^{\frac{1}{p}}\,|\, g(t)\,|^{\frac{1}{q}}\ dt \leqslant (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t)\,|^p\,|\, g(t)\,|\ dt)^{1/p}(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, g(t)\,|\ dt)^{1/q}$

   $\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t)\,|^p\,|\, g(t)\,|\ dt\,dx\cdot\|g\|^{p/q}_{L^1_{2\pi}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(y)\,|^p\,|\, g(t)\,|\ dt\,dy\cdot\|g\|^{p/q}_{L^1_{2\pi}} =$

   $= \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, g(t)\,|\ dt\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(y)\,|^p\ dy\cdot\|g\|^{p/q}_{L^1_{2\pi}} = \|g\|^{1+\frac{p}{q}}_{L^1_{2\pi}}\cdot\|f\|^p_{L^p_{2\pi}}$

□

***Определение* 2.27.** Аппроксимативная единица

Множество параметров имеет предельную точку h_0.

$K_h(x)$ – аппроксимативная единица, если

1. $K_h \in L^1_{2\pi}\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h(x)\,dx = 1$

2. $\|K_h\|_{L^1_{2\pi}} \leqslant M$

3. $\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,K_h(x)\,|\; dx \underset{h\to h_0}{\to} 0$ при любом $\delta \in (0,\pi)$

Если вместо 3 написать

3'. $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,K_h(x)\,| \underset{h\to h_0}{\to} 0$

– усиленная аппроксимативная единица.

Теорема 2.19 (об аппроксимативной единице)**.**

K_h – аппроксимативная единица.

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $K_h * f \underset{h\to h_0}{\rightrightarrows} f$
2. Если $f \in L^p_{2\pi}$ при $1 \leqslant p < +\infty$, то $\|K_h * f - f\|_{L^p_{2\pi}} \underset{h\to h_0}{\to} 0$
3. Если K_h – усиленная аппроксимативная единица,

   $f \in L^1_{2\pi}$ и непрерывна в точке x, то

   $K_h * f(x) \underset{h\to h_0}{\to} f(x)$

Доказательство.

$$K_h * f(x) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_h(t)\,dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_h(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)\,dt$$

1. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ из равномерной непрерывности f

   $I_x = \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}$

   $\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ldots\right| \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\,f(x-t) - f(x)\,|\,|\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon \|K_h\|_{L^1_{2\pi}} \leqslant M\varepsilon$

   $\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \ldots\right| \leqslant \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,f(x-t) - f(x)\,|\,|\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant 2\tilde{M} \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,K_h(t)\,|\; dt \to 0$

   $\Longrightarrow$ в некоторой окрестности h_0 $\quad |\ldots| < \varepsilon$

   $|\,I_x\,| \leqslant (M+1)\varepsilon$

3. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ из непрерывности f в точке x.

   $I_x = \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}$

   $\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ldots\right| \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\,f(x-t) - f(x)\,|\,|\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon \|K_h\|_{L^1_{2\pi}} \leqslant M\varepsilon$

   $\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \ldots\right| \leqslant \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,f(x-t) - f(x)\,|\,|\,K_h(t)\,|\; dt \leqslant$

   $\leqslant \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,K_h(t)\,| \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,f(x-t) - f(x)\,|\; dt \leqslant$

   $\leqslant \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\,K_h(t)\,| \cdot (2\pi\,|\,f(x)\,| + \|f\|_{L^1_{2\pi}}) \to 0$

2. $\|K_h * f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} \to 0$

$$\int\limits_{\pi}^{\pi} |\, I_x\,|^p\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\, dt \right|^p dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t) - f(x)\,|\,|\,K_h(t)\,|\, dt \right)^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t) - f(x)\,|^p\, |\,K_h(t)\,|\, dt) \|K_h\|^{p/q}_{L^1_{2\pi}}\, dx =$$

$$g(t) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x+t) - f(x)\,|^p\, dx \in C_{2\pi}$$

$$g^{\frac{1}{p}}(t+h) - g^{\frac{1}{p}}(t) = \big|\, \|f_{t+h} - f\|_{L^p_{2\pi}} - \|f_t - f\|_{L^p_{2\pi}} \big| \leqslant \|f_{t+h} - f_t\|_{L^p_{2\pi}} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

$$= \|K_h\|^{p/q}_{L^1_{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\, f(x-t) - f(x)\,|^p\, dx\, |\,K_h(t)\,|\, dt = \|K_h\|^{\frac{p}{q}-1}_{L^1_{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(-t) \cdot \frac{|\,K_h(t)\,|}{\|K_h\|_{L^1_{2\pi}}}\, dt =$$

$$= \|K_h\|^{\frac{p}{q}-1}_{L^1_{2\pi}} \cdot \frac{|\,K_h\,|}{\|K_h\|} * g(0)$$

Заметим, что $\frac{|\,K_h\,|}{\|K_h\|}$ – аппроксимативная единица.

Поэтому,

$$\|K_h\|^{\frac{p}{q}-1}_{L^1_{2\pi}} \cdot \frac{|\,K_h\,|}{\|K_h\|} * g(0) \to \|K_h\|^{\frac{p}{q}-1}_{L^1_{2\pi}} g(0) = 0$$

□

Пример усиленной аппроксимативной единицы. – ядро Фейера

$\frac{\Phi_n(x)}{2\pi}$

$$\Phi_n(x) \geqslant 0 \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi_n(x)}{2\pi}\, dx = \|\tfrac{\Phi_n}{2\pi}\|_{L^1_{2\pi}} = 1$$

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

Теорема 2.20 (Фейера)**.**

1. $f \in C_{2\pi} \quad \sigma_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L^p_{2\pi} \;\; 1 \leqslant p < +\infty \quad |\,\sigma_n(f) - f\,|_{L^p_{2\pi}} \to 0$
3. Если $f \in L^1_{2\pi}$ и непрерывная в точке x, то $\sigma_n(f)(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$

Доказательство.
$\sigma_n(f) = f * \frac{1}{2\pi}\Phi_n$ и предыдущая теорема. □

Следствие.

1. $f \in L^1_{2\pi}$ и непрерывно в точке x.

   Если ряд Фурье в точке x сходится, то он обязательно сходится к $f(x)$.

   Доказательство.
   Если сходится ряд Фурье, то он сходится и по Чезаро, т.е. сходится $\sigma_n(f,x)$ и предел тот же, но $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ □

2. Если $f \in C_{2\pi}$ и ряд Фурье сходится равномерно, то он сходится к f.

3. (теорема единственности) $f \in L^1_{2\pi}$

   Если все коэффициента Фурье равны ноль, то $f = 0$ почти везде.

   Доказательство.

   Ряд Фурье нулевой $\implies \sigma_n(f) \equiv 0$

   $\|f\|_{L^1_{2\pi}} = \|\sigma_n(f) - f\|_{L^1_{2\pi}} \to 0 \implies \|f\|_{L^1_{2\pi}} = 0 \implies f = 0$ почти везде. □

4. $f \in L^2_{2\pi}$. Тогда ряд Фурье функции f сходится к f в $L^2_{2\pi}$

   Доказательство.

   Пусть ряд Фурье f сходится в $L^2_{2\pi}$ функции g.

   $\implies \|\sigma_n(f) - g\|_{L^2_{2\pi}} \to 0$, но $\|\sigma_n(f) - f\|_{L^2_{2\pi}} \to 0$

   $\implies \|f - g\|_{L^2_{2\pi}} = 0 \implies f = g$ почти везде $\implies$ ряд Фурье сходится в $L^2_{2\pi}$ к f. □

5. Тригонометрическая система – базис в $L^2_{2\pi}$.

6. (тождество Парсеваля) $f, g \in L^2_{2\pi} \implies$

   $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}$

Теорема 2.21 (Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами)**.**
$f \in C_{2\pi}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует тригонометрический многочлен T,
т.ч. $|\, f(x) - T(x)\,| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

$\sigma_n(f) \rightrightarrows f \implies \exists n$, т.ч.

$|\,\sigma_n(f,x) - f(x)\,| < \varepsilon \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Но $\sigma_n(f,x)$ – это тригонометрический многочлен степени n. □

Теорема 2.22 (Вейерштрасса о приближении многочленами)**.**
$f \in C[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой многочлен P, т.ч. $|\, f(x) - P(x)\,| < \varepsilon \;\; \forall x \in [a,b]$

Доказательство.

$[a,b] \to [0,\pi] \quad \pi \cdot \frac{x-a}{x-b} \;:\; [a,b] \to [0,\pi]$

$a + \frac{b-a}{\pi}t \;:\; [0,\pi] \to [a,b]$.

Т.е. достаточно найти приближение на отрезке $[0,\pi]$. (Т.е. из $C[0,\pi]$)

$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,\pi] \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$ – непрерывна и $g(\pi) = g(-\pi)$

Продолжим по периоду и получим функцию из $C_{2\pi}$

Возьмем T – тригонометрический многочлен из предыдущей теоремы.

$|\, g(x) - T(x)\,| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\implies |\, f(x) - T(x)\,| < \varepsilon \;\; \forall x \in [0,\pi]$

$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Разложим все в ряды Тейлора.

Они сходятся равномерно на $[0, \pi]$

Обрежем их так, что хвосты (с коэффициентами $|\, a_k\,|$ и $|\, b_k\,|$) все вместе будут $< \varepsilon$.

Получится многочлен P, т.ч. $|\, P(x) - T(x)\,| < \varepsilon \ \ \forall x \in [0, \pi]$

$\implies |\, f(x) - P(x)\,| < 2\varepsilon \quad \forall x \in [0, \pi]$ □

22.05.2018

Замечание.

f – голоморфна в кольце $r < |\, z\,| < R$.

$r < 1 < R$. Тогда коэффициент в ряде Лорана

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\, z\,|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \underset{z=e^{it}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt = c_n(g)$ – коэффициент Фурье.

$g(t) = f(e^{it})$

f на $|\, z\,| = 1$, $g(t) = f(e^{it})$

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(t) e^{-int}\, dt$

3. 15. Поверхностные интегралы

3.1. §1. Площадь поверхности

***Определение* 3.1.**

$\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ – подпространство с нулевыми $n-k$ последними координатами.

$\mathcal{A}_k$ – измеримые по Лебегу множества в $\mathbb{R}^k$.

***Определение* 3.2.**

L – k-мерное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Возьмем $\Phi : \mathbb{R}^k \to L$ – движение.

$\mathcal{A}_L := \{E \subset L : \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{A}_k\}$ – σ-алгебра.

$\lambda_L E := \lambda_k \Phi^{-1}(E)$

Корректность.

λ_L не зависит от выбора Φ.

Φ_1 и $\Phi_2 : \mathbb{R}^k \to L$ – движение $\implies \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – движение.

$\lambda_L E := \lambda_k \Phi_1^{-1}(E)$

$\tilde{\lambda_L} E := \lambda_k \Phi_2^{-1}(E)$

Эти штуки – одно и то же, т.к. при движении $\Phi_2^{-1}\Phi_1$ множества $\Phi_1^{-1}(E)$ и $\Phi_2^{-1}(E)$ переходят друг в друга.

Значит, меры равны. □

Замечание.

Если L – k-мерное аффинное подпространство $\mathbb{R}^n$, E содержится в $(k-1)$-мерном аффинном подпространстве, то $\lambda_L E = 0$

Доказательство.

$\Phi^{-1}(E)$ – подмножество $(k-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{R}^k \implies \lambda_k \Phi^{-1}(E) = 0$ □

***Определение* 3.3.**

$x_0, a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}(x_0, a_1, ..., a_k) := \{x_0 + a_1 t_1 + ... + a_k t_k : 0 < t_j < 1\}$

k-мерный параллелепипед.

Обозначение. Если $A := (a_1, ..., a_k)$ – матрица k столбцов и строк.

$\mathcal{P}_A := \mathcal{P}(x_0, a_1, ..., a_k)$

Теорема 3.1.

Пусть L – подпространство размерности k, натянутое на $\mathcal{P}_A$ $\lambda_L \mathcal{P}_A = \sqrt{|\det A^T A|} = \sqrt{\det \Gamma_A}$

$$\Gamma_A = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \dots & \langle a_1, a_k\rangle \\ & \dots & \\ \langle a_k, a_1\rangle & \dots & \langle a_k, a_k\rangle \end{pmatrix} \text{ – матрица Грама.}$$

Доказательство.

$$UA = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

B – матрица $k \times k$, U – поворот.

$\lambda_L \mathcal{P}_A := \lambda_k(U\mathcal{P}_A) = \lambda_k(\mathcal{P}_B) = |\det B| = \sqrt{\det B^T B} =$

$B = (b_1, b_2, ..., b_k) \quad B^T B = \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ & \dots & \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{pmatrix}$

$\langle b_i, b_j \rangle = \langle Ua_i, Ua_j \rangle = \langle a_i, a_j \rangle$ – поворот не меняет скалярное произведение.

$= \sqrt{\det A^T A}$ □

Замечание.

Напоминание про диффеоморфизм. Определение 3.23 третьего семестра.

***Определение* 3.4.**

S – k-мерная гладкая элементарная поверхность в $\mathbb{R}^n$,

если существует U – открытое $\subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi \,:\, U \to S$ – диффеоморфизм.

φ – параметризация поверхности.

***Определение* 3.5.**

$A_S := \{E \subset S \,:\, \varphi^{-1}(E) \in A_k\}$ – σ-алгебра.

$\lambda_s E := \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\det \varphi'(t)^T \varphi'(t)}\, d\lambda_k(t)$

Это мера.

Корректность.

$\lambda_s E$ не зависит от параметризации.

$\varphi \,:\, U \to S$

$\psi \,:\, V \to S$

$L := \psi^{-1} \circ \varphi \,:\, U \to V$ – диффеоморфизм.

$\varphi = \psi \circ L$

$\tilde{\lambda}_s E = \int\limits_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{\det \psi'(t)^T \psi'(t)}\, d\lambda_k(t)$

$\lambda_s E = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)}\, d\lambda_k(x) =$

$\varphi' = (\psi' \circ L)' = \psi'(L(x))L'(x)$

$\varphi'^T \varphi' = L'^T (\psi'(L))^T (\psi'(L)) L'$

$\det \varphi'^T \varphi' = \det(...) = \det L'^T \det((\psi'(L))^T \psi'(L)) \det L'$

$= \int\limits_{L^{-1}(\psi^{-1}(E))} \sqrt{\det(\psi'(L(x)))^T \psi'(L(x))}\, |\det L'(x)|\, d\lambda_k(x) \underset{y=L(x)}{=}$

$\underset{y=L(x)}{=} \int\limits_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{\det \psi'(y)^T \psi'(y)}\, d\lambda_k(y) = \tilde{\lambda}_s E$

□

***Определение* 3.6.**

S – кусочно-гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, если S можно разрезать на конечное число элементарных.

***Определение* 3.7.**

λ_S определяется по кусочкам.

Утверждение 3.2.

$f \,:\, S \to \mathbb{R} \;\; S$ – элементарная гладкая поверхность.

$$\int\limits_E f(x)\,d\lambda_s(x) := \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(t))\sqrt{\det \varphi'(t)^T\varphi'(t)}\,d\lambda_k(t)$$

Доказательство.

TODO Картинка про композицию.

Важный частный случай $k = 2\ \ n = 3$.

1. $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ – параметризация

   $\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$

   $\Gamma_{\varphi'} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

   $E = \left\langle \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \right\rangle = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$

   $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$

   $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$

   $\det \Gamma_{\varphi'} = EG - F^2$

   $\lambda_s(A) = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{EG - F^2}\,d\lambda_s$

2. График функции в $\mathbb{R}^3$

   $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$

   $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x & z'_y \end{pmatrix}$

   $E = 1 + (z'_x)^2 \quad F = z'_x z'_y \quad G = 1 + (z'_y)^2$

   $EG - F^2 = 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 + (z'_x)^2(z'_y)^2 - (z'_x)^2(z'_y)^2$

   $\lambda_S(A) = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,d\lambda_2(x,y)$

   $\int\limits_A f(x,y,z)\,d\lambda_s(A) = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,d\lambda_2(x,y)$

$\square$

Пример.

Площадь сферы в $\mathbb{R}^3$

$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$

$u \in (0, 2\pi)$

$v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$$

$E = \cos^2 v$

$F = 0$

$G = 1$

$\implies EG - F^2 = \cos^2 v$

Площадь $= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}\, dv\, du = 2\pi \sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi$

3.2. §2. Дифференциальные формы

Замечание от Ани.

Тут много воспоминаний об алгебре 3 семестра. Я считаю, что это параграф 4.4 конспекта по алгебре 3 семестра.

***Определение* 3.8.**

Внешняя форма степени p.

$w\ :\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times ... \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$w(\xi_1, ..., \xi_p)$ линейная по каждому ξ_j и кососимметрична.

(Т.е. $w(\xi_1, ..., \xi_i, \xi_{i+1}, ..., p) = -w(\xi_1, ..., \xi_{i+1}, \xi_i, ..., \xi_p)$)

Пример.

$p = k$

$\det(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$

***Определение* 3.9.**

Внешнее произведение $\wedge$.

A_p – p-форма, B_q – q-форма.

$A_p \wedge B_q$ – $(p+q)$-форма.

Свойства.

1. Ассоциативность
2. Дистрибутивность
3. $A_p \wedge B_q = (-1)^{pq} B_q \wedge A_p$

***Определение* 3.10.**

Обозначим через e_j проекцию на j-ую координату. Это 1-форма.

Свойства.

1. $e_I := e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_p} \quad I \subset \{1, 2, ..., k\}$
   – базис для p-форм.

2. $w_1, .., w_p$ – 1-формы.

   $$w_1 \wedge ... \wedge w_p(\xi_1, ..., \xi_p) = \det \begin{pmatrix} w_1(\xi_1) & \dots & w_1(\xi_p) \\ & \dots & \\ w_p(\xi_1) & \dots & w_p(\xi_p) \end{pmatrix}$$

23.05.2018

***Определение* 3.11.**

S – k-мерная элементарная поверхность в $\mathbb{R}^n$.

ω – дифференциальная форма степени k на S, если $\omega(x)$, где $x \in S$:

$\omega(x) \ : \ (T_xS)^k \to \mathbb{R}$, где T_xS – касательное пространство к S в точке x.

Т.е. в каждой точке $x \in S$ своя внешняя форма.

Пример.

1. $F \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то $\omega(x)(\xi) = \langle F(x), \xi \rangle$ – 1-форма.
2. $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то $\omega(x)(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle = df(x)(\xi)$
3. dx_i – проекция на i-ю координату. – 1-форма
4. $\omega = \sum a_{i_1, i_2, ..., i_p} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ – производящая форма степени p.

***Определение* 3.12.**

Внешнее дифференцирование.

$\omega = \sum a_{i_1, ..., i_p}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

$d\omega = \sum da_{i_1, ..., i_p}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

Пример.

1. Функция – форма степени 0.

   df – просто дифференциал функции. – 1-форма.

2. $\mathbb{R}^2 \quad \omega = P\,dx + Q\,dy$

   $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy) \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy) \wedge dy$

   $\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$

3. $\mathbb{R}^3 \quad \omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ – 2-форма.

   $d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dP \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy =$
   $= (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz$

4. ω – n-форма в $\mathbb{R}^n$

   $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$

   $d\omega = df \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n = 0$

   Упражнение.

   $\mathbb{R}^3 \quad w = P dx + Q dy + R dz$

   Найти dw.

Свойства.

1. Линейность. $d(\alpha\omega + \beta\lambda) = \alpha dw + \beta d\lambda$

2. $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^p \omega \wedge d\lambda$, где ω – p-форма

   Доказательство.
   По линейности достаточно проверить на одном слагаемом из разложения по базису.
   $\omega = f\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$
   $\lambda = g\, dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_q}$
   $\omega \wedge \lambda = fg\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_q}$
   $d(\omega \wedge \lambda) = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{j_q} = gdf \wedge x_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{j_q} + fdg \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{j_q} = d\omega \wedge \lambda + (-1)^p \omega \wedge d\lambda$ □

3. $d(d\omega) = 0$

   Доказательство.
   Достаточно проверить на одном слагаемом.
   $\omega = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$
   $d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = (f'_{x_1} dx_1 + ... + f'_{x_n} dx_n) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$
   $d(dw) = \sum df'_{x_k} \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} = \sum\limits_k \sum\limits_j f''_{x_k, x_j} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ □

***Определение* 3.13.**
Перенос формы.
$\varphi(S) = \tilde{S}$, причем на $\tilde{S}$ есть форма ω.
$\gamma(0) = x \quad (\varphi \circ \gamma)(0) = \varphi(x)$
$\gamma'(0) \quad (\varphi \circ \gamma)'(0) = \varphi'(\gamma(0))\gamma'(0) = \varphi'(x)\gamma'(0)$
$\omega(y) \ : \ (T_y\tilde{S})^k \to \mathbb{R}$
$(\varphi^*\omega)(x) \ : \ (T_x S)^k \to \mathbb{R}$
$(\varphi^*\omega)(x) = \omega(\varphi(x))(\varphi'(x)\xi_1, \varphi'(x)\xi_2, ..., \varphi'(x)\xi_k)$

Свойства.

1. φ^* – линейно.

2. $\varphi^*(f\omega) = f \circ \varphi \cdot \varphi^*\omega$

3. $\omega = \sum a_{i_1,...,i_p} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \implies$
   $\varphi^*\omega = \sum a_{i_1,...,i_p}(\varphi(x)) d\varphi_{i_1}(x) \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}(x)$, где $\varphi_{i_1}, .., \varphi_{i_p}$ – координатные функции φ.

   Доказательство.
   $\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$
   $(\varphi^*\omega)(x)(\xi_1, ..., \xi_p) = a(\varphi(x)) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}(\varphi'(x)\xi_1, ..., \varphi'(x)\xi_p) = a(\varphi(x)) d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}(\xi_1, .., \xi_p)$
   □

4. $\psi^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi)^*\omega$

Доказательство.
$\varphi^*\omega(x)(\xi_1,...,\xi_p) = \omega(\varphi(x))(\varphi'(x)\xi_1,...,\varphi'(x)\xi_p)$

$\psi^*(\varphi^*\omega)(t)(\xi_1,...,\xi_p) = \omega(\varphi(\psi(t)))(\varphi'(\psi(t))\psi'(t)\xi_1,...,\varphi'(\psi(t))\psi'(t)\xi_p) =$
$= \omega(\varphi \circ \psi(t))((\varphi\circ\psi)'(t)\xi_1,...,(\varphi\circ\psi)'(t)\xi_p)$ □

5. $\varphi^*(\omega \wedge \lambda) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\lambda$

   Доказательство.
   Достаточно проверить на $\omega = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

   $\lambda = g dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_p}$

   $\varphi^*\omega = f \circ \varphi d\varphi_{i_1}(x) \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}(x)$

   $\varphi^*\lambda = g \circ \varphi d\varphi_{j_1}(x) \wedge ... \wedge d\varphi_{j_q}(x)$

   $\omega \wedge \lambda = fg\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}$

   $\varphi^*(\omega \wedge \lambda) = (fg) \circ \varphi d\varphi_{i_1}(x) \wedge ... \wedge d\varphi_{j_q}(x)$

   □

6. $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$

   Доказательство.
   Достаточно проверить на $\omega = f\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

   (a) $\omega = f$
   $\varphi^*\omega = f \circ \varphi$
   $d(\varphi^*\omega)(\xi) = d(f\circ\varphi)(\xi) = (f\circ\varphi)'\xi = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\xi$
   $\varphi^*(d\omega)(\xi) = \varphi^*(df)(\xi) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\xi$

   (b) $\omega = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ $\quad d\omega = \sum f'_{x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$
   $\varphi^*(d\omega) = \sum f'_{x_k} \circ \varphi\, d\varphi_k \wedge d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}$
   $\varphi^*\omega = f \circ \varphi\, d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}$
   $d(\varphi^*\omega) = d(f\circ\varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_p}$
   $d(f\circ\varphi) = \sum f'_{x_k} \circ \varphi dx_k$

   □

***Определение* 3.14.**

Интеграл от дифференциальной формы.

Если k-форма в $U \subset \mathbb{R}^k$

$\implies \omega = f\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_k \quad \int\limits_U \omega := \int\limits_U f(x)\, d\lambda_k(x)$

Если ω – k-форма на связной гладкой элементарной k-мерной поверхности.

$\int\limits_S \omega = \int\limits_U \varphi^*\omega$

$\varphi\ :\ U \to S$ – параметризация.

Корректность.

$\varphi : U \to S$ и $\psi : V \to S$ – разные параметризации.

$\varphi = \psi \circ L$, где $L := \psi^{-1} \circ \varphi$ – диффеоморфизм $U \to V$.

$\omega = f\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$

$\varphi^*\omega = f \circ \varphi\, d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_k}$

$\psi^*\omega = f \circ \psi\, d\psi_{i_1} \wedge ... \wedge d\psi_{i_k} = g\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge ... \wedge dy_k$

$\int\limits_U (f \circ \varphi)\, d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_k} = \int\limits_{L^{-1}(V)} g(L(x)) \det L'(t)\, dt_1 \wedge ... \wedge dt_k = \int\limits_{L^{-1}(V)} g(L(t)) \det L'(t)\, d\lambda_k$

$\int\limits_V (f \circ \psi)\, d\psi_{i_1} \wedge ... \wedge d\psi_{i_k} = \int\limits_V g\, dy_1 \wedge ... \wedge dy_k = \int\limits_V g\, d\lambda_k$

Пояснение, откуда первое равенство в первом интеграле:

$\varphi^*\omega = (\psi \circ L)^*\omega = L^*(\psi^*\omega) = L^*(g dy_1 \wedge ... \wedge dy_k) = g(L(t)) dL_1(t) \wedge ... \wedge dL_k(t) =$
$= g(L(t)) \det L'(t)\, dt_1 \wedge ... \wedge dt_k$

Проблема – если бы в первом интеграле определитель был под модулем, то все было бы ок и была бы просто замена переменной, какой мы ее уже знаем.

Однако, определитель не под модулем, но так и должно быть.

Поймем, что $\det L'(t)$ знакопостоянен. Тогда просто в зависимости от параметризации может меняться знак, но не более.

$L^{-1} \circ L = Id \implies (L^{-1})'(L(t))L'(t) = Id \implies \det(L^{-1})'(L(t)) \det L'(t) = 1 \implies \det L'(t) \neq 0$

$\implies$ знак везде одинаковый. $\square$

24.05.2018

3.3. §3. Поверхности в $\mathbb{R}^n$

***Определение* 3.15.**

$S \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерная гладкая поверхность, если для любой точки $x \in S$ существует окрестность W и $\varphi : (-1,1)^k \to S \cap W$ (кубик) или $\varphi : (-1,0] \times (-1,1)^{k-1} \to S \cap W$ (полукубик), и φ – диффеоморфизм.

(по-другому называется такая φ картой)

Замечание.

Набор карт – атлас.

***Определение* 3.16.**

x – краевая точка поверхности, если она в образе $\{0\} \times (-1,1)^{k-1}$ при отображении из полукубика.

Край поверхности ∂S – множество краевых точек.

Остальные точки – внутренние точки поверхности.

Пример.

1. $k = 2,\ n = 2$

   $(r, \varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

   $0 < r \leqslant 1 \quad \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha$

2. $k = 2, \ \ n = 3$ единичная сфера.

   $(u, v) \to (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$

   $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$

   $\alpha < u < 2\pi + \alpha$

3. $k = 2, \ n = 3$ верхняя полусфера.

   $0 \leqslant v < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha < u < 2\pi + \alpha$

   Край – нижняя окружность.

Теорема 3.3.

S k-мерная гладкая поверхность с краем.

∂S – $k-1$-мерная гладкая поверхность без края.

Доказательство.

$\varphi \ : \ (-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1} \to S \cap W$

$\varphi\Big|_{t_1=0} \ : \ (-1, 1)^{k-1} \to \partial S \cap W$ □

***Определение* 3.17.**

Карты φ и ψ согласованы, если $\varphi(\text{куб/полукуб}) \cap \psi(\text{куб/полукуб}) = \varnothing$

или $\varphi(...) \cap \psi(...) \neq \varnothing$ и $\psi^{-1} \circ \varphi \ : $ открытое в $\mathbb{R}^k \to$ открытое в $\mathbb{R}^k$ – это диффеоморфизм и его определитель $\det(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$

***Определение* 3.18.**

Поверхность называется ориентируемой, если у нее есть атлас из попарно согласованных карт.

Ориентация поверхности – такой атлас.

Теорема 3.4.

У ориентируемой поверхности всего две ориентации.

(Здесь считаем, что ориентации различны, если они в разных классах эквивалентности)

Пример.

Лента Мебиуса – неориентируемая поверхность.

Ориентация $(n-1)$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$

$\varphi \ : \ (\text{куб/полукуб}) \to S.$

$(\vec{n}, \varphi'(x)e_1, .., \varphi'(x)e_{n-1})$ и $(e_1, e_2, .., e_n)$ одинаково ориентированы, где $\vec{n}$ – вектор нормали касательной плоскости.

Пример.

$\int\limits_{\text{полусфера}} z \, dx \wedge dy$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ \ z \geqslant 0$

$x = R \cos u \cos v$

$y = R \sin u \cos v$

$z = R \sin v$

$dx = -R \sin u \cos v \, du - R \cos u \sin v dv$

$dy = R \cos u \cos v \, du - R \sin u \sin v \, dv$

$dz = R\cos v\,dv$

$dx \wedge dy = (-R\sin u\cos v)(-R\sin u\sin v)du \wedge dv + (-R\cos u\sin v)(R\cos u\cos v)\cdot dv \wedge du =$
$= R^2(\sin u\cos v\cdot\sin u\sin v + \cos u\sin v\cos u\cos v)\,du\wedge dv = R^2\cos v\sin v du\wedge dv$

$z\,dx\wedge dy = R^3\cos v\sin^2 v\,du\wedge dv$

$\int z\,dx\wedge dy = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi} R^3\cos v\sin^2 v\,dudv = 2\pi R^3\int\limits_0^{\pi/2}\cos v\sin^2 v\,dv = \frac{2\pi R^3}{3}$

***Определение* 3.19.**

Согласованная ориентация края.

Если есть ориентированный атлас, то $\varphi\Big|_{t_1=0} \;:\; (-1,1)^{k-1}\to\partial S$ – атлас, дающий согласованную ориентацию края.

Замечание.

Неформальное пояснение. Если идти по краю и смотреть влево, то должны видеть торчащие вверх нормали.

***Определение* 3.20.**

Ориентация кусочно-гладкой поверхности. Клеим из кусочков, чтобы соотносилась согласованная ориентация края. Соотносилась – дают противоположные знаки.

Теорема 3.5 (формула Стокса)**.**

S – k-мерная кусочно-гладкая ориентированная поверхность с краем в $\mathbb{R}^n$.

ω – дифференциальная форма степени $k-1$ C^1-гладкая.

Тогда $\int\limits_{\partial S}\omega = \int\limits_S d\omega$

(Ориентация на крае ∂S согласована с ориентацией на S)

Доказательство. для поверхностей $S=\varphi([-1,1]^k)$

$\int\limits_S d\omega = \int\limits_{[-1,1]^k}\varphi^*(d\omega) = \int\limits_{[-1,1]^k} d(\varphi^*\omega) \underset{?}{=} \int\limits_{\partial[-1,1]^k}\varphi^*\omega = \int\limits_{\partial S}\omega$

$\varphi^*\omega$ $k-1$ форма в $\mathbb{R}^k$

Надо показать равенство с вопросиком.

$\int\limits_{[-1,1]^k} d\tilde\omega = \int\limits_{\partial[-1,1]^k}\tilde\omega,\quad \tilde\omega$ – произвольная C^1-гладкая $k-1$-форма

$\tilde\omega = \sum\limits_{i=1}^k a_i(t)\,dt_1\wedge\ldots\wedge \cancel{dt_i}\wedge\ldots\wedge dt_k$

Достаточно понять для $\tilde w = f(t)\,dt_1\wedge\ldots\wedge\cancel{dt_i}\wedge\ldots\wedge dt_k$

$d\tilde\omega = \sum\limits_{j=1}^k f'_{t_j}(t)\,dt_j\wedge dt_1\wedge\ldots\wedge\cancel{dt_i}\wedge\ldots\wedge dt_k = (-1)^{i-1}f'_{t_i}\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k$

$\int\limits_{[-1,1]^k} d\tilde\omega = (-1)^{i-1}\int\limits_{[-1,1]^k} f'_{t_i}\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k = (-1)^{i-1}\int\limits_{[-1,1]^k} f'_{t_i}\,d\lambda_k(t) =$
$= (-1)^{i-1}\int\limits_{[-1,1]^{k-1}}\int\limits_{-1}^{1} f'_{t_i}(t)\,dt_i\,d\lambda_{k-1}(t_1,..,\cancel{t_i},..,t_k) =$
$= (-1)^{i-1}\int\limits_{[-1,1]^{k-1}} f(t_1,\ldots,t_{i-1},1,t_{i+1},\ldots,t_k)\,d\lambda_{k-1} - (-1)^{i-1}\int\limits_{[-1,1]^{k-1}} f(t_1,\ldots,t_{i-1},-1,t_{i+1},\ldots,t_k)\,d\lambda_k$

Хочется показать теперь, что

$\int\limits_{\partial[-1,1]^k}\tilde\omega = (-1)^{i-1}\int\limits_{\text{грань } t_i=1}\tilde\omega - (-1)^{i-1}\int\limits_{\text{грань } t_i=-1}\tilde\omega$

$$\int\limits_{\text{грань } t_i=1} f(t)\, dt_1 \wedge ... \wedge \cancel{dt_i} \wedge ... \wedge dt_k = \int\limits_{[-1,1]^{k-1}} f(t_1, ..., t_{i-1}, 1, t_{i+1}, ..., t_k)\, d\lambda_{k-1}$$ □

Свойства.

1. Формула Грина

   $\omega = P\, dx + Q\, dy, \quad d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx \wedge dy$

   $\int\limits_{\partial S} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{S} d\omega = \int\limits_{S} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx \wedge dy$

2. Формула Гаусса-Остроградского.

   $n = 3, \; k = 3, \; \omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

   $d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, dx \wedge dy \wedge dz$

   S – кусок пространства.

   $\int\limits_{S} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, d\lambda_3 = \int\limits_{S} d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{\partial S} P\, dy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

3. Формула Стокса.

   $n = 3, k = 2$

   $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

   $d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx \wedge dy + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz$

   $\int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{S} d\omega$