

Теория вероятностей

Швецова Анна, Василенко Елизавета

5 апреля 2018 г.

Содержание

1. Введение	1
1.1 §Графовые теоремы.	1
1.2 §Предельные теоремы для схем Бернулли	1
2. Общая теория вероятностей	4
2.1 Колмогоровское определение вероятности	4
2.2 Случайная величина, распределение, плотность	5
2.3 Примеры вероятностных распределений	8
2.4 Многомерные распределения	9
2.5 Свёртки мер	10
3. Математическое ожидание	12
3.1 Сходимость случайных величин и закон больших чисел	15

1. Введение

27.02.18

1.1. §Графовые теоремы.

Теорема 1.1 (Теорема Рамсея). $\forall k, m \exists n = n(k, m)$ т.ч. для любого графа на n вершинах существует либо пустой подграф на m вершинах, либо полный на k .

Определение 1.1. $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое n .

Нижняя оценка на $\mathcal{R}(k, m)$:

Теорема 1.2 (Теорема Эрдеша). Если $2^{1-C_k^2} C_n^k < 1$, то существует такой граф на n вершинах, что у него нет ни полного подграфа на k вершинах, ни пустого подграфа на m .

В частности $\mathcal{R}(k, k) > 2^{k/2}$

Доказательство. Ω будет состоять из графов на n вершинах, $\#\Omega = 2^{C_n^2}$.
 $P(\text{событие: между } a \text{ и } b \text{ проведено ребро}) = 1/2$.

Такие события независимы. Значит, можно считать, что случайный граф – это граф, в котором каждое ребро с вероятностью $1/2$.

$$P(\bigcup_{j=1}^l A_j) \leq \sum_{j=1}^l P(A_j).$$

Зафиксируем набор из k вершин. В нём C_k^2 пар вершин. С вероятностью $2^{-C_k^2}$ все пары вершин соединены ребром и подграф полный. Аналогично, с вероятностью $2^{-C_k^2}$ подграф пустой.

$$P(\text{выбранный набор пустой или полный подграф}) = 2 \cdot 2^{-C_k^2} = 2^{1-C_k^2}$$

$$P(\text{хоть какой-то набор полный или пустой}) \leq 2^{1-C_k^2} C_n^k < 1$$

\Rightarrow существует граф на n вершинах, у которого никакие k вершин не подходят.

В частности, при $n \leq 2^{k/2}$

$$2^{1-C_k^2} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{2^{C_k^2-1}} < \frac{n^k}{k!} \frac{2}{2^{k/2(k-1)}} = \frac{n^k}{2^{k^2/2}} \frac{2^{k/2+1}}{k!} < \frac{n^k}{2^{k^2/2}} = \left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k \leq 1$$

□

Определение 1.2. $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое n .

1.2. §Предельные теоремы для схем Бернулли

Определение 1.3 (Схема Бернулли). Монетку кидают n раз.

С вероятностью $p \in (0, 1)$ выпадает орёл (1), с вероятностью $q = 1 - p$ – решка (0)

S_n – число выпавших орлов. $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пример.

- $p = 1/5$ $P(S)_{1000} = 220 \approx 0,008984 \dots$

- $p = 1/6$ $P(S)_{2000} = 360 \approx 0,006625 \dots$

Хочется приближённые оценки

Теорема 1.3 (Пуассона). Последовательность схем Бернулли.

$$np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$$

$$\text{Тогда } P(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Замечание. При этом сходимость равномерная по k . Утверждение верно, если k не фиксировано, а $o(\sqrt{n})$. (Доказывается аналогично, но чуть труднее.)

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &\sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1 - p_n)^n \end{aligned}$$

Надо доказать, что $(1 - p_n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$, т.е. $n \log(1 - p_n) \rightarrow -\lambda$ □

Теорема 1.4 (Прохорова). $\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(S_n = k) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| \leq \frac{\min\{2, \lambda\}}{n} 2\lambda$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &\sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1 - p_n)^n \end{aligned}$$

Надо доказать, что $(1 - p_n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$, т.е. $n \log(1 - p_n) \rightarrow -\lambda$ □

Пример. Рулетка $p = 1/37$ – вероятность выигрыша, $n = 111$ – число игр, $\lambda = np = 3$. При выигрыше $+37$, за игру -1 .

Вероятность остаться с суммой 0:

$$P(S_{111} = 3) = C_{111}^3 \left(\frac{1}{37}\right)^3 (1 - 1/37)^{111-3} \approx 0,227127\dots$$

$$\text{По теореме: } \approx \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{3^3 e^{-3}}{6} = 0,224041\dots$$

Вероятность не проиграть:

$$P(S_n > 3) = 1 - P(S_n = 0) - P(S_n = 1) - P(S_n = 2) - P(S_n = 3) \approx 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!} - \frac{3^2 e^{-3}}{2!} - \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0,352768\dots$$

Точное значение:

$$1 - \frac{13}{e^3} = 0,352754\dots$$

Теорема 1.5 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). $0 < p < 1$, $x := \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, T – фиксированное число. Если $n \rightarrow \infty$, а k меняется таким образом, что при $|x| \leq T$, $P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}$ равномерно по x .

Замечание. Более того, если $\phi(n) = o((npq)^{1/6})$ и $|x| \leq \phi(n)$, то заключение верно и эквивалентность равномерна по x (то есть, предел, равный 1, равномерный).

Доказательство. $k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$

$$n - k = np - x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$\alpha := \frac{k}{n} = \frac{np + x\sqrt{npq}}{n} = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow p$$

$$1 - \alpha = 1 - p - x\sqrt{\frac{pq}{n}} = q - x\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow q$$

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n p^k q^{n-k}}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi(n-k)}} =$$

$$= \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha^k (1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \alpha (1-\alpha)}} \sim \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha^k (1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}}$$

Надо понять, что $\left(\frac{p}{\alpha}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-x^2/2}$

$$A := k \log\left(\frac{\alpha}{p}\right) + (n-k) \log\left(\frac{1-\alpha}{1-p}\right) \rightarrow? \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + (t^3)$$

$$\frac{\alpha}{p} = 1 + x \sqrt{\frac{q}{pn}}$$

$$\frac{1-\alpha}{1-p} = 1 - x \sqrt{\frac{p}{qn}}$$

$$\ln\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \ln\left(1 + x \sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x \sqrt{\frac{q}{np}} - 1/2 x^2 \frac{q}{np} + (n^{-3/2})$$

$$\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-p}\right) = \ln\left(1 - x \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x \sqrt{\frac{p}{nq}} - 1/2 x^2 \frac{p}{nq} + (n^{-3/2})$$

$$k = n\alpha = np + x \sqrt{npq}$$

$$n-k = n(1-\alpha) = nq - x \sqrt{npq}$$

$$A = x \sqrt{qp n} + x^2 q - 1/2 x^2 q - 1/2 x^3 \frac{q^{2/3}}{\sqrt{np}} + (n^{-1/2}) -$$

$$-x \sqrt{qp n} + x^2 p - 1/2 x^2 p + 1/2 x^3 \frac{p^{2/3}}{\sqrt{nq}} + (n^{-1/2}) = \frac{x^2}{2} + (n^{-1/2})$$

□

Пример Рулетка. Ставим только на красные. $n = 222, k = 111$ (сколько раз выиграли), $p = 18/37, q = 19/37$

$$P(S_{222} = 111) \approx 0,0493228 \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q e^?}} \approx 0,0493228 \dots$$

Теорема 1.6 (Интегральная теорема). $0 < p < 1$

$$P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt \text{ равномерно по } a \text{ и } b.$$

Замечание. Частный случай теоремы Берри-Эссена

$$\sup \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \frac{1}{\sqrt{1\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

Замечание. Лучше \sqrt{n} в знаменателе быть не может.

$$P(S_{2n} = n) = C_{2n}^n (1/2)^n (1/2)^n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$p = q = 1/2$$

$$P(S_{2n} < n) + P(S_{2n} = n) + P(S_{2n} > n) = 1$$

$$P(S_{2n} < n) \approx \frac{1 + \sqrt{\pi n}}{2} = 1/2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$$

$$\left| P(S_{2n} < n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt \right| \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$$

Пример. Задача о театре

1600 мест. Два гардероба у двух разных входов. Люди случайно выбирают один из входов. Сколько сделать мест в гардеробе, чтобы он переполнялся не чаще раза в месяц?

В гардеробах по C мест.

$$P((S_n < C) \cap (S_n \geq n - C)) \leq 29/30$$

$$= P(n - C \leq S_n \leq C) = P\left(\frac{n-C-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{C-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{nq-C}{\sqrt{npq}}}^{\frac{C-np}{\sqrt{npq}}} e^{-t^2/2} dt \approx 2 \cdot 29/60$$

$$\frac{C-800}{20} \approx 2,13, C \approx 800 + 20 \cdot 2 \cdot 13 = 843$$

2. Общая теория вероятностей

07.03.2018

2.1. Колмогоровское определение вероятности

Определение 2.1 (Вероятностное пространство). (Ω, F, P) , где

Ω – пространство элементарных событий (простыми словами множество).

F – совокупность случайных событий $\subset 2^\Omega$. σ -алгебра

P – мера на F , такая что $P(\Omega) = 1$ (вероятностная мера)

Замечание. На самом деле от меры требуется только конечность т.к. её всегда можно отнормировать.

Замечание. Если Ω не более чем счётна, то в качестве F всегда можно взять не более чем счётные подмножества. $F = 2^\Omega$. В этом случае можно воспользоваться счётной аддитивностью меры и тогда мера определится везде.

Определение 2.2 (Условная вероятность). Пусть $B \in F, P(B) > 0$, тогда $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Формула полной вероятности, формула и теорема Байеса верны и тут т.к. основывались в дискретном пространстве только на этой формуле.

Определение 2.3 (Независимые события). $P(A)P(B) = P(A \cap B)$.

$$A_1, A_2, \dots, A_n, P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)$$

Для бесконечных последовательностей событий скажем, что они независимы, если любой конечный поднабор независим.

Лемма (Бореля-Кантелли). A_1, A_2, \dots – события, B – событие ”наступило бесконечное число событий из A_1, A_2, \dots ”.

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$.
2. Если A_1, A_2, \dots независимы в совокупности и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ то $P(B) = 1$

Доказательство. Начнём с понимания того, что такое B .

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Пояснение: что значит произошло бесконечное число A_i ? Значит, мы взяли какой-то элемент, который лежит в бесконечном числе A_i . Значит, в любом $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ он тоже лежит. Но тогда такой элемент лежит и в пересечении.

Если некоторый элемент лежал лишь в конечном числе A_i , то, начиная с некоторого i в объединение он не попадёт. Тогда и в пересечение тоже.

$$P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ вложены друг в друга как множества, поэтому

$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ (в первых двух переходах вспоминаем про то, что P – это мера, в последнем получаем ноль т.к. хвост сходящегося ряда).

Первый пункт доказан. Второй.

Если $A_1, A_2 \dots$ независимы, тогда и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots$ независимы. Тогда

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leftarrow P\left(\bigcap_{k=1}^m \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^m P(\overline{A_k}) \rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} P(\overline{A_k})$$

Заметим, что первая стрелочка требует конечности меры пространства, которая у нас конечно есть.

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

А теперь соберём равенство и будем считать всё не с 1, а с n и получим, что:

$$\prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) = 1 - P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P(B)$$

Осталось понять, что $\prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Прологарифмируем, и вспомним, что $\ln(1 - t) \leq -t$.

$$\ln\left(\prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k))\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = -\infty$$

□

Следствие Закон 0 и 1. Если $A_1, A_2 \dots$ независимые в совокупности события, то или $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$.

2.2. Случайная величина, распределение, плотность

Определение 2.4 (Случайная величина). Обозначают как $\xi, \eta, \zeta \dots$

Это просто измеримая функция : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Определение 2.5 (Распределение случайной величины ξ). $A \subset \mathbb{R}$ – борелевское.

$$P_{\xi}(A) = P(\xi \in A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$$

P_{ξ} – вероятностная мера на борелевских подмножествах \mathbb{R} . (упражнение – понять, что это одно и то же)

Замечание. Для определения меры на борелевской оболочке достаточно определить её на ячейках. На ячейках, в свою очередь, достаточно определить меру на лучах

Определение 2.6 (Функция распределения с.в. ξ). $F_{\xi}(x) := P(\xi \leq x)$

Замечание. $P_{\xi}((a, b]) = P(a < \xi \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) \Rightarrow$ Функция распределения однозначно задаёт распределение с.в.

Определение 2.7. Случайные величины ξ и η одинаковораспределены, если $P_{\xi} = P_{\eta}$ (распределения одинаковы).

Замечание. Т.е. одинаковы их функции распределения.

Свойства.

- $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$

$$F_\xi = P(\xi \leq x)$$

- F_ξ не убывает

Очевидно из строчки выше

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\xi \leq x_n)) = P(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi \leq x_n)) = P(\Omega) = 1$$

- F_ξ непрерывна справа

$$\lim_{x_n \searrow x} P(\xi \leq x_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\xi \leq x_n)) = P(\xi \leq x)$$

- $F_{\xi+c}(x) = F_\xi(x-c)$

$$F_{\xi+c}(x) = P(\xi + c \leq x) = P(\xi \leq x - c) = F_\xi(x - c)$$

- $F_{c\xi}(x) = F_\xi(\frac{x}{c}), c > 0$

$$F_{c\xi}(x) = P(c\xi \leq x) = P(\xi \leq \frac{x}{c}) = F_\xi(\frac{x}{c})$$

Замечание. Любая функция $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая свойствами с 2 по 4 – это функция распределения некоторой случайной величины.

Определение 2.8 (Дискретное распределение). $\xi : \Omega \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$ – не более чем счётно. – дискретная случайная величина.

Замечание. Как устроена вероятность дискретного распределения?

$$P_\xi(\{x\}) = 0, \text{ если } x \neq y_k.$$

$$P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \sum_{y_k \in A} P(\xi = y_k).$$

А функция распределения? Пусть $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$, тогда функция устроена ступенечками, высоты которых – это вероятности $P(\xi = y_i)$ (**TODO**картинка). Если не так, то там будут какие-то хаотические ступеньки.

$$\text{Вывод: распределение полностью определяется величинами } P(\xi = y_k). \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = y_k) = 1.$$

Определение 2.9 (Непрерывное распределение). $\forall x \in \mathbb{R} P_\xi(\{x\}) = 0$ т.е. $\forall x \in \mathbb{R} P(\xi = x) = 0$.

Замечание. $P(\xi = x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y)$

$$\lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) = F_\xi(x)$$

т.е. непрерывное распределение = распределение, у которых функция распределения непрерывна

Пример Мерзкий пример – Канторова лестница. Иногда, несмотря на то, что распределение непрерывно, могут получаться весьма непривлекательные картинки. (**TODO**картинка) Это некоторая функция распределения.

Определение 2.10 (Абсолютно непрерывное распределение). Если существует $p_\xi(t)$ – измеримая функция т.ч.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt, p_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$p_\xi(t)$ – плотность распределения.

Свойства.

1. $P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \int_A p_\xi(t) dt$

$P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t) dt$ верна на лучах $(-\infty, x]$. Значит верна на полуинтервалах (как на разнице лучей).

Тогда по единственности продолжения меры на полуинтервалах, она верна на борелевских множествах.

2. $p_\xi \geq 0$ почти везде.

$A := \{t : p_\xi(t) < 0\}$. Тогда из предыдущего свойства

$$P_\xi(A) = \int_{\{t: p_\xi(t) < 0\}} p_\xi(t) dt < 0, \text{ если}$$

$P(p_\xi < 0) > 0$, но в то же время $P_\xi(A) \geq 0$ как вероятность. Противоречие.

3. $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t) dt = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 1 - 0 = 1$$

Или ещё можно доказать так: $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t) dt = P_\xi(\mathbb{R}) = 1$

4. $p_\xi(t) = F'_\xi(t)$ при почти всех t .

Если доказывали в теории меры, то см. туда, если нет, то я её доказывать не буду.

2.3. Примеры вероятностных распределений

Пример.

1. Биномиальные распределения

$$\xi \sim \text{Binom}(n, p)$$

(\sim – ‘случайная величина с таким распределением’)

$$0 < p < 1, n \in \mathbb{N}$$

$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ – число успехов в схеме Бернулли

2. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\lambda > 0$$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. Геометрическое

$$\xi \sim \text{Geom}(p)$$

$$0 < p < 1$$

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, \infty$$

4. Дискретное равномерное распределение

$$\xi : \Omega \rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

$$P(\xi = y_k) = 1/n$$

5. Непрерывное равномерное распределение

$$\xi \sim U[a, b]$$

$$P_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

6. Нормальное распределение

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$$

$$a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$P_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}$$

6'. Стандартное нормальное распределение

$$\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Замечание. Если $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $\sigma\nu + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Определение 2.11.

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

$\Phi(0) = 1/2$, $\Phi(\infty) = 1/2$ т.к. интеграл симметричен относительно 0

$$\Phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

при $x > 0$ $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$

при $x < 0$ $\Phi(x) = 1/2 - \Phi_0(-x)$

Пример (продолжение).

7. Экспоненциальное распределение

$$\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$P_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(t)$$

2.4. Многомерные распределения**Определение 2.12** (Совместное (многомерное) распределение).

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^n, P_{\vec{\xi}}(A) = P(\vec{\xi} \in A)$$

Будем считать, что вероятностная мера P задана на \mathcal{B}^n – борелевских подмножествах \mathbb{R}^n *Замечание.* $P_{\vec{\xi}}$ определяет меры $P_{\xi_1}, P_{\xi_2}, \dots, P_{\xi_n}$

$$B \subset \mathbb{R}, P_{\xi_1}(B) = P_{\vec{\xi}}(B \times \mathbb{R}^{n-1})$$

Обратное неверно

Пример. $\xi_1, \xi_2 : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ с равными вероятностями.Если подбрасывания независимы, то $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, то четыре равновероятных исхода.Если $\xi_1 = \xi_2$, то два равновероятных исхода $(0, 0)$ и $(1, 1)$.**Определение 2.13.**Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ борелевских события $\{\xi_1 \in A_1\}, \{\xi_2 \in A_2\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$ – независимы**Теорема 2.1.** $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow P_{\vec{\xi}} = \bigotimes_{k=1}^n P_{\xi_k}$ (произведение мер)**Доказательство.**

$$P_{\vec{\xi}}(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = P(\vec{\xi} \in A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) =$$

$$= P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) \underset{\text{так как независ.}}{=} \prod_{k=1}^n P(\xi_k \in A_k) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(A_k) \quad \square$$

Определение 2.14 (Совместная (многомерная) функция распределения).

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Определение 2.15 (Совместная плотность распределения). $p_{\vec{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т.ч.

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\vec{\xi}}(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) dt_n \dots dt_3 dt_2 dt_1$$

(интеграл по n -мерной мере Лебега)**Следствие.** $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n)$ **Доказательство.**

$$\text{“}\Rightarrow\text{” } P_{\vec{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(-\infty, x_k] = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k)$$

“ \Leftarrow ” Функция распределения однозначно определяет меру на ячейках \Rightarrow везде. \square

Следствие. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – абсолютно непрерывные с.в.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow p_{\vec{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = p_{\xi_1}(t_1)p_{\xi_2}(t_2) \dots p_{\xi_n}(t_n)$.

Доказательство. По абсолютной непрерывности мы знаем, что у функций распределения есть производная, она же плотность. Значит, продифференцируем их и получим равенство выше. \square

2.5. Свёртки мер

Определение 2.16 (Свёртка мер). μ и ν – конечные меры на борелевских подмножествах \mathbb{R} .

Свёртка мер $(\mu * \nu)(A) := \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$

$(A - x)$ – это сдвиг множества A на x влево на прямой.

Свойства.

- $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(y) d\nu(x)$

Доказательство.

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y + x) d\mu(y) d\nu(x)$$

Первый переход – определение интеграла по мере, второй – $y \in A - x \iff y + x \in A$ \square

- $(\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$

- $\mu * \nu = \nu * \mu$

- $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$

- $c\mu * \nu = c(\mu * \nu)$

- $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$

- δ_x – мера, состоящая из единичной нагрузки в точке x .

$$\mu * \delta_0 = \mu$$

Доказательство. $(\delta_0 * \mu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$ \square

Теорема 2.2.

Важный частный случай – мера с плотностями

μ имеет плотность p_μ

ν имеет плотность p_ν

$\Rightarrow \mu * \nu$ имеет плотность $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds$ – свёртка функций p_μ и p_ν

Доказательство.

$$(\mu * \nu)(A) \stackrel{?}{=} \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt$$

$$\int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t) p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt =$$

$$u := t - s, du = dt$$

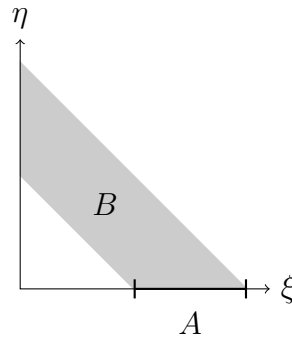
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) p_\mu(u) p_\nu(s) du ds = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y) \stackrel{\text{по св-ву 1}}{=} (\mu * \nu)(A)$$

Предпоследний переход: потому что интеграл по мере – это домножить на плотность и проинтегрировать обычным образом. (TODO Понять это) \square

Теорема 2.3 (о распределении суммы независимых с.в.).

ξ и η – независимые с.в. $\Rightarrow P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}$
 $(\xi, \eta) \in B \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \xi + \eta \in A$



$$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_{\xi, \eta}(x, y) = \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_{\xi, \eta}(x, y) \stackrel{\text{по т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y)$$

□

Пример.

1. Свёртка с дискретным распределением

$$\nu = \sum p_k \delta_{x_k}, p_k > 0$$

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \sum p_k \mu(A - x_k)$$

2. $\xi_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ – независимы

$$P_{\xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \delta_k$$

$$P_{\xi_1 + \xi_2}(\{n\}) = P_{\xi_1} * P_{\xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} = e^{-\lambda_1 + \lambda_2} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_2^k \lambda_1^{n-k} = \frac{1}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Замечание. $P(\xi_1 + \xi_2 = n) = \sum_{k=0}^n P(\xi_1 = k, \xi_2 = n - k) = \sum_{k=0}^n P(\xi_1 = k) P(\xi_2 = n - k)$ и подставить

Упражнение. 1. ξ_1 и $\xi_2 \sim Exp(1)$ найти распределение $\xi_1 + \xi_2$

$$2. \xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

3. Математическое ожидание

Определение 3.1. (Математическое ожидание) $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – случайная величина
 $E\xi := \int_{\Omega} \xi(w) dP(w)$ – математическое ожидание

Свойства.

1. $E\xi < +\infty \iff E|\xi| < +\infty$

2. $E_{\alpha\xi+\beta\eta} = \alpha E\xi + \beta E\eta$

3. $\xi \geq 0$ с вероятностью 1 $\Rightarrow E\xi \geq 0$

4. $\xi \geq \eta$ с вероятностью 1 $\Rightarrow E\xi \geq E\eta$

5. $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x)$

6. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – с.в

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо относительно борелевской σ -алгебры

Тогда $Ef(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dP_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

28.03.2018

Замечание. $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_\xi(x)$

1) P_ξ – дискретная мера.

$$\xi : \Omega \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$$

$$E_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(\xi = y_k)$$

2) P_ξ – абсолютно непрерывна, т.е. есть плотность $p_\xi(x)$

$$E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x) dx$$

Определение 3.2. Ковариация $E_{\xi^2} < +\infty$

$$E_{\eta^2} < +\infty$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) := E((\xi - E_\xi)(\eta - E_\eta))$$

Свойства. 1. $\text{cov}(\xi, \xi) = D_\xi$

$$2. \text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta$$

$$\text{Доказательство. } \text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta - \xi E_\eta - \eta E_\xi + E_\xi E_\eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta - E_\eta E_\xi + E_\xi E_\eta \quad \square$$

3. Если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

$$4. \text{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \text{cov}(\xi_1, \eta) + \text{cov}(\xi_2, \eta)$$

$$\text{cov}(c\xi, \eta) = c \cdot \text{cov}(\xi, \eta)$$

$$5. \text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$$

$$6. D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$D(\sum_{k=1}^n \xi_k) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{i < k} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Доказательство. Индукция.

База $n = 2$.

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (E\xi)^2 - 2E\xi E_\eta - (E_\eta)^2$$

Переход $n \rightarrow n + 1$

$$D(\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k) = D(\sum_{k=1}^n \xi_k + \xi_{n+1}) = D(\sum_{k=1}^n \xi_k) + D\xi_{n+1} + 2\text{cov}(\sum_{k=1}^n \xi_k, \xi_{n+1}) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{i < k \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_k) + D\xi_{n+1} + 2\text{cov}(\sum_{k=1}^n \xi_k, \xi_{n+1}) \quad \square$$

Замечание. $\text{cov}(\xi, \eta) = 0 \not\Rightarrow \xi$ и η независимы.

$$\xi(w) = \cos(w)$$

$$\eta(w) = \sin(w)$$

$$\Omega = \{0, \pi/2, \pi\}$$

$$E\xi = \frac{\cos 0 + \cos \pi/2 + \cos \pi}{3} = 0$$

$$\xi\eta \equiv 0 \Rightarrow E(\xi\eta) = 0$$

$$E\xi E_\eta = 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

Но нет независимости:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{3} = P(\xi = 1)P(\eta = 1) \neq P(\xi = 1, \eta = 1) = 0$$

Определение 3.3. Коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \in [-1, 1]$

$$|E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2}$$

Случайные величины коррелируют, если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

Замечание. Рассмотрим $E\xi^2 < +\infty$

$$\langle \xi, \eta \rangle := \text{cov}(\xi, \eta)$$

$\sqrt{D\xi}$ – норма в таком пространстве (называется стандартным отклонением $\sigma(\xi)$)

Пример. $\Omega := \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$\nu(k) :=$ количество различных простых в разложении k

Теорема 3.1. Харди-Рамануджана

$$\omega(n) \rightarrow +\infty$$

Тогда $P(|\nu(k) - \ln \ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$

Доказательство. Туран, 1935 $\xi_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } p|k \\ 0, & \text{если } p \nmid k \end{cases}$

$$M := \sqrt[n]{n}$$

$$\xi := \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq M} \xi_p$$

$$0 \leq \nu(k) - \xi(k) \leq 10$$

$$P(|\xi - \ln \ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow 0$$

$$E\xi = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq M} E\xi_p = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq M} 1/p + (M/n) = \ln \ln M + (1) = \ln \ln n + (1)$$

$$E\xi_p = \frac{[n/p]}{n} = \frac{n/p + (1)}{n} = 1/p + (1/n)$$

$$D\xi = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq M} D\xi_p + 2 \sum_{p, q \in \mathbb{P}, p < q \leq M} \text{cov}(\xi_p, \xi_q)$$

$$D\xi_p = E\xi_p^2 - (E\xi_p)^2 = E\xi_p - (E\xi_p)^2 = 1/p + (1/n) - 1/p^2 + (1/n)$$

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) = E(\xi_p \xi_q) - E\xi_p E\xi_q = \frac{[n/pq]}{n} - \frac{[n/p]}{n} \frac{[n/q]}{n}$$

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) \geq \frac{n/pq - 1}{n} - \frac{n/p}{n} - \frac{n/q}{n} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{n} - \frac{1}{pq} = -\frac{1}{n}$$

$$1 \sum \text{cov}(\xi_p, \xi_q) \geq M^2 \frac{1}{n} = (1)$$

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) \leq \frac{n}{pq} - \frac{(n/p-1)(n/q-1)}{n^2} =$$

...

Неравенство Чебышёва

$$P(|\xi - E\xi| \geq \lambda \sqrt{D\xi}) \leq \frac{D\xi}{(\lambda \sqrt{D\xi})^2} = 1/\lambda^2$$

$$E\xi = \ln \ln n + (1)$$

$$\sqrt{D\xi} = \sqrt{\ln \ln n} + (1)$$

□

Определение 3.4. k -й момент $E\xi^k$ – k -й момент случайной величины ξ

$$E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_{\xi}(x)$$

Определение 3.5. $E|\xi - E\xi|^k$ – k -й центральный момент

$D\xi$ – второй центральный момент

3.1. Сходимость случайных величин и закон больших чисел

Определение 3.6. $\xi_n, \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

1. ξ_n сходится к ξ почти наверное (= с вероятностью 1), если $P(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$
2. ξ_n сходится к ξ в среднем порядка $r > 0$, если $E|\xi_n - \xi|^r \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$
3. ξ_n сходится к ξ по вероятности
 $\forall \varepsilon > 0 P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$
4. ξ_n сходится к ξ по распределению
 F_{ξ_n} сходится к F_ξ во всех точках непрерывности F_ξ . (\sim теорема Муавра-Лапласа)

Замечание. Связь между сходимостями

1 \Rightarrow 3 теорема Лебега (3 \nRightarrow 1 был пример)

2 \Rightarrow 3

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^r > \varepsilon^r) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \rightarrow 0$$

1 \nRightarrow 2 (а значит, и 3 \nRightarrow 2)

$$\Omega = [0, 1]$$

$\xi_n = n^{1/r} \mathbb{1}_{[0, 1/n]} \rightarrow \xi \equiv 0$ сходится почти наверное

$$\text{Но } E\xi_n^r = E(n \mathbb{1}_{[0, 1/n]}) = 1 \nrightarrow 0$$

2 \nRightarrow 1 (а значит 3 \nRightarrow 1)

Контрпример: $\xi_{n,k} := \mathbb{1}_{[k/n, (k+1)/n]}$

$$E\xi_{n,k}^r = 1/n^r \rightarrow 0$$

3 \Rightarrow 4

Пусть F_ξ непрерывна в точке x .

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

$$\{\xi_n > x\} \supset \{\xi > x + \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$$

$$P(\xi_n > x) \geq P(\dots)$$

$$\{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi \leq x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

$$F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = F_\xi(x + \varepsilon)$$

$$\{\xi_n \leq x\} \supset \{\xi \leq x - \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$$

$$\{\xi_n > x\} \subset \{\xi > x - \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

$$1 - F_{\xi_n}(x) \leq 1 - F_\xi(x - \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$$

$$F_{\xi_n}(x) \geq F_\xi(x - \varepsilon) - P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) \geq F_\xi(x - \varepsilon)$$

$$F_\xi(x + \varepsilon) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) \geq F_\xi(x - \varepsilon) \rightarrow F_\xi(x)$$

$$F_\xi(x + \varepsilon) \rightarrow F_\xi(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

4 \nRightarrow 3 Некорректна такая постановка вопроса