# Теория вероятностей

Швецова Анна, Василенко Елизавета

14 апреля 2018 г.

## Содержание

# 1. Введение

27.02.18

## 1.1. Графовые теоремы.

**Теорема 1.1** (Теорема Рамсея)**.** $\forall k, m \exists n = n(k, m)$ т.ч. для любого графа на $n$ вершинах существует либо пустой подграф на $m$ вершинах, либо полный на $k$.

***Определение* 1.1*.*** $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое $n$.

Нижняя оценка на $\mathcal{R}(k, m)$:

**Теорема 1.2** (Теорема Эрдеша)**.** Если $2^{1-C_k^2}C_n^k < 1$, то существует такой граф на $n$ вершинах, что у него нет ни полного подграфа на $k$ вершинах, ни пустого подрафа на $m$.

В частности $\mathcal{R}(k, k) > 2^{k/2}$

**Доказательство**. $\Omega$ будет состоять из графов на $n$ вершинах, $\#\Omega = 2^{C_n^2}$.
$P$(событие: между $a$ и $b$ проведено ребро) $= 1/2$.

Такие события независимы. Значит, можно считать, что случайный граф – это граф, в котором каждое ребро с вероятностью $1/2$.

$P(\bigcup_{j=1}^l A_j) \leqslant \sum_{j=1}^l P(A_j)$.

Зафиксируем набор из $k$ вершин. В нём $C_k^2$ пар вершин. С вероятностью $2^{-C_k^2}$ все пары вершин соединены ребром и подграф полный. Аналогично, с вероятностью $2^{-C_k^2}$ подграф пустой.

$P$(выбранный набор пустой или полный подграф) $= 2 \cdot 2^{-C_k^2} = 2^{1-C_k^2}$

$P$(хоть какой-то набор полный или пустой) $\leqslant 2^{1-C_k^2}C_n^k < 1$

$\Rightarrow$ существует граф на $n$ вершинах, у которого никакие $k$ вершин не походят.

В частности, при $n \leqslant 2^{k/2}$

$$2^{1-C_k^2}C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{2^{C_k^2-1}} < \frac{n^k}{k!}\frac{2}{2^{k/2(k-1)}} = \frac{n^k}{2^{k^2/2}}\frac{2^{k/2+1}}{k!} < \frac{n^k}{2^{k^2/2}} = \left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k \leqslant 1$$

□

***Определение* 1.2*.*** $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое $n$.

## 1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

***Определение* 1.3** (Схема Бернулли)**.** Монетку кидают $n$ раз.

С вероятностью $p \in (0, 1)$ выпадает орёл (1), с вероятностью $q = 1 - p$ – решка (0)

$S_n$ – число выпавших орлов. $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

**Пример.**

- $p = 1/5$ $P(S)_{1000} = 220 \approx 0,008984\dots$
- $p = 1/6$ $P(S)_{2000} = 360 \approx 0,006625\dots$

Хочется приближённые оценки

**Теорема 1.3** (Пуассона)**.** Последовательность схем Бернулли.
$np_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda > 0$
Тогда $P(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

*Замечание.* При этом сходимость равномерная по $k$. Утверждение верно, если $k$ не фиксировано, а $o(\sqrt{n})$. (Доказывается аналогично, но чуть труднее.)

**Доказательство**.

$$P(S_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$\sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n$$

Надо доказать, что $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$, т.е. $n\log(1-p_n) \to -\lambda$ □

**Теорема 1.4** (Прохорова)**.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(S_n = k)\ \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| \leqslant \frac{\min\{2,\lambda\}}{n} 2\lambda$

**Доказательство**.

$$P(S_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$\sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n$$

Надо доказать, что $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$, т.е. $n\log(1-p_n) \to -\lambda$

□

**Пример.** Рулетка $p = 1/37$ – вероятность выигрыша, $n = 111$ – число игр, $\lambda = np = 3$. При выигрыше $+37$, за игру $-1$.
Вероятность остаться с суммой 0:
$P(S_{111} = 3) = C_{111}^3 \left(\left(\frac{1}{37}\right)\right)^3 (1-1/37)^{111-3} \approx 0,227127\dots$
По теореме: $\approx \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{3^3 e^{-3}}{6} = 0,224041\dots$

Вероятность не проиграть:
$P(S_n > 3) = 1 - P(S_n = 0) - P(S_n = 1) - P(S_n = 2) - P(S_n = 3) \approx 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!} - \frac{3^2 e^{-3}}{2!} - \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0,352768\dots$
Точное значение:
$1 - \frac{13}{e^3} = 0,352754\dots$

**Теорема 1.5** (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** $0 < p < 1$, $x := \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $T$ – фиксированное число. Если $n \to \infty$, а $k$ меняется таким образом, что при $|x| \leqslant T$, $P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}$ равномерно по $x$.

*Замечание.* Более того, если $\phi(n) = o((npq)^{1/6})$ и $|x| \leqslant \phi(n)$, то заключение верно и эквивалентность равномерна по $x$ (то есть, предел, равный 1, равномерный).

**Доказательство**. $k = np + x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
$n - k = np - x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
$\alpha := \frac{k}{n} = \frac{np + x\sqrt{npq}}{n} = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to p$
$1 - \alpha = 1 - p - x\sqrt{\frac{pq}{n}} = q - x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to q$

$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}} =$
$= \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha(1-\alpha)}} \sim \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$

Надо понять, что $\left(\frac{p}{\alpha}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{n-k} \to e^{-x^2/2}$
$A \coloneqq k\log(\frac{\alpha}{p}) + (n-k)\log(\frac{1-\alpha}{1-p}) \to^? \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + (t^3)$

$\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{pn}}$
$\frac{1-\alpha}{1-p} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{qn}}$
$\ln(\frac{\alpha}{p}) = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - 1/2x^2\frac{q}{np} + (n^{-3/2})$
$\ln(\frac{1-\alpha}{1-p}) = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - 1/2x^2\frac{p}{nq} + (n^{-3/2})$
$k = n\alpha = np + x\sqrt{npq}$
$n - k = n(1-\alpha) = nq - x\sqrt{npq}$
$A = x\sqrt{qpn} + x^2q - 1/2x^2q - 1/2x^3\frac{q^{2/3}}{\sqrt{np}} + (n^{-1/2}) -$
$-x\sqrt{qpn} + x^2p - 1/2x^2p + 1/2x^3\frac{p^{2/3}}{\sqrt{nq}} + (n^{-1/2}) = \frac{x^2}{2} + (n^{-1/2})$

□

**Пример Рулетка.** Ставим только на красные. $n = 222, k = 111$(сколько раз выиграли)$, p = 18/37, q = 19/37$
$P(S_{222} = 111) \approx 0,0493228\dots$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq e^?}} \approx 0,0493228\dots$

**Теорема 1.6** (Интегральная теорема)**.** $0 < p < 1$
$P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt$ равномерно по $a$ и $b$.

*Замечание.* Частный случай теоремы Берри-Эссена
$\sup\left|P(\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \leqslant x) - \frac{1}{\sqrt{1\pi}\int_{-\infty}^x} e^{-t^2/2}dt\right| \leqslant \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$

*Замечание.* Лучше $\sqrt{n}$ в знаменателе быть не может.
$P(S_{2n} = n) = C_{2n}^n(1/2)^n(1/2)^n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$
$p = q = 1/2$
$P(S_{2n} < n) + P(S_{2n} = n) + p(S_{2n} > n) = 1$
$P(S_{2n} < n) \approx \frac{1+\sqrt{\pi n}}{2} = 1/2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$
$\left|P(S_{2n} < n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}dt\right| \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$

**Пример.** Задача о театре

1600 мест. Два гардероба у двух разных входов. Люди случайно выбирают один из входов. Сколько сделать мест в гардеробе, чтобы он переполнялся не чаще раза в месяц?

В гардеробах по $C$ мест.
$P((S_n < C) \cap (S_n \geqslant n - C)) \leqslant 29/30$
$= P(n - C \leqslant S_n \leqslant C) = P(\frac{n-C-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{C-np}{\sqrt{npq}}) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{nq-C}{\sqrt{npq}}}^{\frac{C-np}{\sqrt{npq}}} e^{-t^2/2}dt \approx 2\cdot 29/60$
$\frac{C-800}{20} \approx 2,13$, $C \approx 800 + 20\cdot 2\cdot 13 = 843$

# 2. Общая теория вероятностей

07.03.2018

## 2.1. Колмогоровское определение вероятности

***Определение* 2.1** (Вероятностное пространство)**.** $(\Omega, F, P)$, где

$\Omega$ – пространство элементарных событий (простыми словами множество).

$F$ – совокупность случайных событий $\subset 2^\Omega$. $\sigma$-алгебра

$P$ – мера на $F$, такая что $P(\Omega) = 1$ (вероятностная мера)

*Замечание.* На самом деле от меры требуется только конечность т.к. её всегда можно отнормировать.

*Замечание.* Если $\Omega$ не более чем счётна, то в качестве $F$ всегда можно взять не более чем счётные подмножества. $F = 2^\Omega$. В этом случае можно воспользоваться счётной аддитивностью меры и тогда мера определится везде.

***Определение* 2.2** (Условная вероятность)**.** Пусть $B \in F$, $P(B) > 0$, тогда $P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Формула полной вероятности, формула и теорема Байеса верны и тут т.к. основывались в дискретном пространстве только на этой формуле.

***Определение* 2.3** (Независимые события)**.** $P(A)P(B) = P(A \cap B)$.

$A_1, A_2 \ldots, A_n$, $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) = P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n)$

Для бесконечных последовательностей событий скажем, что они независимы, если любой конечный поднабор независим.

**Лемма** (Бореля-Кантелли)**.** $A_1, A_2, \ldots$ – события, $B$ – событие "наступило бесконечное число событий из $A_1, A_2 \ldots$".

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$.
2. Если $A_1, A_2 \ldots$ независимы в совокупности и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ то $P(B) = 1$

**Доказательство**. Начнём с понимания того, что такое $B$.

$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Пояснение: что значит произошло бесконечное число $A_i$? Значит, мы взяли какой-то элемент, который лежит в бесконечном числе $A_i$. Значит, в любом $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ он тоже лежит. Но тогда такой элемент лежит и в пересечении.

Если некоторый элемент лежал лишь в конечном числе $A_i$, то, начиная с некоторого $i$ в объединение он не попадёт. Тогда и в пересечение тоже.

$P(B) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$

$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ вложены друг в друга как множества, поэтому

$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ (в первых двух переходах вспоминаем про то, что $P$ – это мера, в последнем получаем ноль т.к. хвост сходящегося ряда).

Первый пункт доказан. Второй.

Если $A_1, A_2 \dots$ независимы, тогда и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots$ независимы. Тогда

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leftarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_k}\right) = \Pi_{k=1}^{m} P(\overline{A_k}) \to \Pi_{k=1}^{\infty} P(\overline{A_k})$$

Заметим, что первая стрелочка требует конечности меры пространства, которая у нас конечно есть.

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \Pi_{k=1}^{\infty} P(\overline{A_k}) = \Pi_{k=1}^{\infty}(1 - P(A_k))$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

А теперь соберём равенство и будем считать всё не с 1, а с $n$ и получим, что:

$$\Pi_{k=n}^{\infty}(1 - P(A_k)) = 1 - P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P(B)$$

Осталось понять, что $\Pi_{k=n}^{\infty} P(1 - P(A_k)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Прологарифмируем, и вспомним, что $\ln(1-t) \leqslant t$.

$$\ln(\Pi_{k=n}^{\infty}(1 - P(A_k))) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \leqslant -\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = -\infty$$

□

***Следствие Закон 0 и 1.*** Если $A_1, A_2 \dots$ независимые в совокупности события, то или $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$.

## 2.2. Случайная величина, распределение, плотность

***Определение* 2.4** (Случайная величина)**.** Обозначают как $\xi, \eta, \zeta \dots$

Это просто измеримая функция : $\Omega \to \mathbb{R}$

***Определение* 2.5** (Распределение случайной величины $\xi$)**.** $A \subset \mathbb{R}$ – борелевское.

$P_\xi(A) = P(\xi \in A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

$P(\xi)$ – вероятностная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$. (упражнение – понять, что это одно и то же)

*Замечание.* Для определения меры на борелевской оболочке достаточно определить её на ячейках. На ячейках, в свою очередь, достаточно определить меру на лучах

***Определение* 2.6** (Функция распределения с.в. $\xi$)**.** $F_\xi(x) := P(\xi \leqslant x)$

*Замечание.* $P_\xi((a,b]) = P(a < \xi \leqslant b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) \Rightarrow$ Функция распределения однозначно задаёт распределение с.в.

***Определение* 2.7.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ одинаковораспределены, если $P_\xi = P_\eta$ (распределения одинаковы).

*Замечание.* Т.е. одинаковы их функции распределения.

***Свойства.***

1. $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1$

   $F_\xi = P(\xi \leqslant x)$

2. $F_\xi$ не убывает

   Очевидно из строчки выше

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = P(\bigcap_{n=1}^\infty(\xi \leqslant x_n)) = P(\varnothing) = 0$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = P(\bigcup_{n=1}^\infty(\xi \leqslant x_n)) = P(\Omega) = 1$

4. $F_\xi$ непрерывна справа

   $\lim\limits_{x_n\searrow x} P(\xi \leqslant x_n) = P(\bigcap_{n=1}^\infty(\xi \leqslant x_n)) = P(\xi \leqslant x)$

5. $F_{\xi+c}(x) = F_\xi(x-c)$

   $F_{\xi+c}(x) = P(\xi + c \leqslant x) = P(\xi \leqslant x - c) = F_\xi(x-c)$

6. $F_{x\xi}(x) = F_\xi(\frac{x}{c})$, $c > 0$

   $F_{c\xi}(x) = P(c\xi \leqslant x) = P(\xi \leqslant \frac{x}{c}) = F_\xi(\frac{x}{c})$

*Замечание.* Любая функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами с 2 по 4 – это функция распределения некоторой случайной величины.

***Определение* 2.8** (Дискретное распределение)**.** $\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \dots\}$ – не более чем счётно. – дискретная случайная величина.

*Замечание.* Как устроена вероятность дискретного распредлеения?

$P_\xi(\{x\}) = 0$, если $x \neq y_k$.

$P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \sum_{y_k\in A} P(\xi = y_k)$.

А функция распределения? Пусть $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$, тогда функция устроена ступенечками, высоты которых – это вероятности $P(\xi = y_i)$ (TODO: картинка). Если не так, то там будут какие-то хаотические ступеньки.

Вывод: распределение полностью определяется величинами $P(\xi = y_k)$. $\sum_{k=1}^\infty P(\xi = y_k) = 1$.

***Определение* 2.9** (Непрерывное распределение)**.** $\forall x \in \mathbb{R}\ P_\xi(\{x\}) = 0$ т.е. $\forall x \in \mathbb{R}\ P(\xi = x) = 0$.

*Замечание.* $P(\xi = x) = P(\xi \leqslant x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim\limits_{y\to x-} F_\xi(y)$

$\lim\limits_{y\to x-} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

т.е. непрерывное распределение = распределение, у которых функция распределения непрерывна

**Пример Мерзкий пример – Канторова лестница.** Иногда, несмотря на то, что распределение непрерывно, могут получаться весьма непривлекательные картинки. (TODO: картинка) Это некоторая функция распределения.

***Определение* 2.10** (Абсолютно непрерывное распределение)**.** Если существует $p_\xi(t)$ – измеримая функция т.ч.

$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t), p_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$p_\xi(t)$ – плотность распределения.

***Свойства.***

1. $P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \int_A p_\xi(t)dt$

   $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t)dt$ верна на лучах $(-\infty, x]$. Значит верна на полуинтервалах (как на разнице лучей).

   Тогда по единственности продолжения меры на полуинтервалах, она верна на борелевских множествах.

2. $p_\xi \geqslant 0$ почти везде.

   $A := \{t : p_\xi(t) < 0\}$. Тогда из предыдущего свойства

   $P_\xi(A) = \int_{\{t: p_\xi(t) < 0\}} p_\xi(t)dt < 0$, если

   $P(p_\xi < 0) > 0$, но в то же время $P_\xi(A) \geqslant 0$ как вероятность. Противоречие.

3. $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = 1$.

   $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) - \lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 1 - 0 = 1$

   Или ещё можно доказать так: $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = P_\xi(\mathbb{R}) = 1$

4. $p_\xi(t) = F'_\xi(t)$ при почти всех $t$.

   Если доказывали в теории меры, то см. туда, если нет, то я её доказывать не буду.

14.03.2018

## 2.3. Примеры вероятностных распределений

**Пример.**

1. Биномиальные распределения
   $\xi \sim Binom(n, p)$
   ($\sim$ – ‘случайная величина с таким распределением‘)
   $0 < p < 1,\ n \in \mathbb{N}$
   $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ – число успехов в схеме Бернулли

2. Распределение Пуассона
   $\xi \sim Poisson(\lambda)$
   $\lambda > 0$
   $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

3. Геометрическое
   $\xi \sim Geom(p)$
   $0 < p < 1$
   $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$ , $k = 1, 2, \ldots, \infty$

4. Дискретное равномерное распределение
   $\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
   $P(\xi = y_k) = 1/n$

5. Непрерывное равномерное распределение
   $\xi \sim U[a, b]$
   $P_\xi(t) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$

6. Нормальное распределение
   $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   $a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$
   $p_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}$

6'. Стандартное нормальное распределение
   $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$
   $p_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$

*Замечание.* Если $\nu \sim \mathcal{N}(0,1)$, то $\sigma\nu + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

***Определение* 2.11.**

$\Phi(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$
$\Phi(0) = 1/2\,\Phi(\infty) = 1/2$ т.к. интеграл симметричен относительно 0
$\Phi_0(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt$
при $x > 0$ $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$
при $x < 0$ $\Phi(x) = 1/2 - \Phi_0(-x)$

**Пример (продолжение).**

7. Экспоненциальное распределение
   $\xi \sim Exp(\lambda)$
   $p_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$

## 2.4. Многомерные распределения

***Определение* 2.12** (Совместное (многомерное) распределение)**.**
$\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$
$A \in \mathbb{R}^n$, $P_{\overrightarrow{\xi}}(A) = P(\overrightarrow{\xi} \in A)$
Будем считать, что вероятностная мера $P$ задана на $\mathcal{B}^n$ – борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$

*Замечание.*
$P_{\overrightarrow{\xi}}$ определяет меры $P_{\xi_1}, P_{\xi_2}, \ldots, P_{\xi_n}$
$B \subset \mathbb{R}$, $P_{\xi_1}(B) = P_{\overrightarrow{\xi}}(B \times \mathbb{R}^{n-1})$
Обратное неверно

**Пример.**
$\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \{0, 1\}$ с равными вероятностями.

Если подбрасывания независимы, то $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, то четыре равновероятных исхода.
Если $\xi_1 = \xi_2$, то два равновероятных исхода $(0,0)$ и $(1,1)$.

***Определение* 2.13.**
Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если
$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ борелевских события $\{\xi_1 \in A_1\}, \{\xi_2 \in A_2\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$ – независимы

**Теорема 2.1.**
$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow P_{\overrightarrow{\xi}} = \bigotimes_{k=1}^n P_{\xi_k}$ (произведение мер)

**Доказательство**.
$P_{\overrightarrow{\xi}}(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = P(\overrightarrow{\xi} \in A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) =$
$= P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) \underset{\text{так как независ.}}{=} \prod_{k=1}^n P(\xi_k \in A_k) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(A_k)$ □

***Определение* 2.14** (Совместная (многомерная) функция распределения)**.**
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \dots, \xi_n \leqslant x_n)$

***Определение* 2.15** (Совместная плотность распределения)**.**
$p_{\overrightarrow{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т.ч.
$F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) dt_n \dots dt_3 dt_2 dt_1$

(интеграл по $n$-мерной мере Лебега)

***Следствие.***
$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n)$

**Доказательство**.

"$\Rightarrow$" $P_{\overrightarrow{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(-\infty, x_k] = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k)$

"$\Leftarrow$" Функция распределения однозначно определяет меру на ячейках $\Rightarrow$ везде. □

***Следствие.*** $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – абсолютно непрерывные с.в.
$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow p_{\overrightarrow{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = p_{\xi_1}(t_1) p_{\xi_2}(x_2) \dots p_{\xi_n}(x_n)$.

**Доказательство**. По абсолютной непрерывности мы знаем, что у функций распределения есть производная, она же плотность. Значит, продифференцируем их и получим равенство выше. □

## 2.5. Свёртки мер

***Определение* 2.16** (Свёртка мер)**.** $\mu$ и $\nu$ – конечные меры на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$.
Свёртка мер $(\mu * \nu)(A) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$
$(A - x)$ – это сдвиг множества $A$ на $x$ влево на прямой.

***Свойства.***

1. $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(y) d\nu(x)$

   **Доказательство**.
   $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y + x) d\mu(y) d\nu(x)$
   Первый переход – определение интеграла по мере, второй – $y \in A - x \iff y + x \in A$ □

2. $(\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots \mu_n(x_n)$

3. $\mu * \nu = \nu * \mu$

4. $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$

5. $c\mu * \nu = c(\mu * \nu)$

6. $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$

7. $\delta_x$ – мера, состоящая из единичной нагрузки в точке $x$.
   $\mu * \delta_0 = \mu$

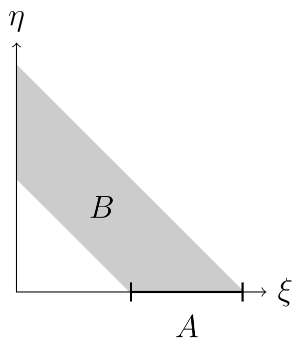
   **Доказательство.** $(\delta_0 * \mu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$ □

**Теорема 2.2.**
Важный частный случай – мера с плотностями
$\mu$ имеет плотность $p_\mu$
$\nu$ имеет плотность $p_\nu$
$\Rightarrow$ $\mu * \nu$ имеет плотность $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s) p_n u(s) ds$ – свёртка функций $p_\mu$ и $p_\nu$

**Доказательство.**
$(\mu * \nu)(A) \stackrel{?}{=} \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s) p_\nu(s) ds dt$
$\int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s) p_\nu(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t) p\mu(t-s) p_\nu(s) ds dt =$
$u := t - s$, $du = dt$
$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u+s) p_\mu(u) p_\nu(s) du ds = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \underset{\text{по св-ву 1}}{=} (\mu * \nu)(A)$
Предпоследний переход: потому что интеграл по мере – это домножить на плотность и проинтегрировать обычным образом. (TODO: Понять это) □

**Теорема 2.3** (о распределении суммы независимых с.в.)**.**
$\xi$ и $\eta$ – независимые с.в. $\Rightarrow P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

**Доказательство.** $A \subset \mathbb{R}$
$(\xi, \eta) \in B \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \xi + \eta \in A$




$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi+\eta \in A) = P((\xi,\eta) \in B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y) dP_{\xi,\eta}(x,y) =$
$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y) dP_{\xi,\eta}(x,y) \underset{\text{по т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y) dP_\xi(x) dP_\eta(y)$

□

**Пример.**

1. Свёртка с дискретным распределением
   $\nu = \sum p_k \delta_{x_k}$, $p_k > 0$
   $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \sum p_k \mu(A - x_k)$

2. $\xi_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ – независимы
   $P_{\xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \delta_k$
   $P_{\xi_1+\xi_2}(\{n\}) = P_{\xi_1} * P_{\xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} =$
   $= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} = e^{-\lambda_1+\lambda_2} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_2^k \lambda_1^{n-k} = \frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

   *Замечание.* $P(\xi_1+\xi_2=n) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi_1=k, \xi_2=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi_1=k)P(\xi_2=n-k)$ и подставить

**Упражнение.** 1. $\xi_1$ и $\xi_2 \sim Exp(1)$ найти распределение $\xi_1+\xi_2$

2. $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2),\ \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1+\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

# 3. Математическое ожидание

***Определение* 3.1.** (Математическое ожидание) $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина
$E_\xi := \int_\Omega \xi(w)dP(w)$ – математическое ожидание (если такой интеграл существует)

*Замечание.* Если случайная величина неотрицательна, то такой интеграл всегда существует (т.к. с.в. – это измеримая функция). Если же она меняет знак, необходимо, чтобы отрицательная и положительная составляющие не были бесконечностями одновременно.

*Замечание.* Т.к. вероятностная мера на всём пространстве единичка, то такой интеграл – это в точности среднее значение случайной величины. (В помощь к осознанию: представьте себе для начала дискретную вероятность. Тогда матожидание, как и ожидается, будет выглядеть ровно как сумма произведений значений на их вероятности).

***Свойства.***

1. $E_\xi < +\infty \iff E_{|\xi|} < +\infty$
   Значем из теории меры TODO: Откуда именно

2. $E_{\alpha\xi+\beta\eta} = \alpha E_\xi + \beta E_\eta$ (Линейность интеграла по мере)

3. $\xi \geqslant 0$ с вероятностью $1 \Rightarrow E_\xi \geqslant 0$
   Измеримая функция больше нуля почти везде. Тогда и интеграл по ней неотрицательный

4. $\xi \geqslant \eta$ с вероятностью $1 \Rightarrow E_\xi \geqslant E_\eta$
   Аналогично, одна измеримая функция почти везде не меньше другой

5. $E_\xi = \int_\mathbb{R} xdP_\xi(x)$ (Следует из 6)

6. Если $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ – с.в
   $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримо относительно борелевской $\sigma$-алгебры
   Тогда $E_{f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)dP_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$
   В частности, $E_{f(\xi)} = \int_\mathbb{R} f(x)dP_\xi(x)$.

   **Доказательство.**
   Шаг 1
   $f = \mathbb{1}_A$
   $E_{\mathbb{1}_A(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)} = \int_\Omega \xi_1(w),\xi_2(w),\dots,\xi_n(w)dP(w) =$
   Это просто мера точек, в которых характеристическая функция единица.
   $= P((\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in A) = P_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}dP_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}$
   Шаг 2
   Для простых функций сразу получили всё по линейности
   Шаг 3
   $f \geqslant 0$. Берём $\{\phi_k\}$ – простые, которые $\nearrow f$
   $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x_1,x_2,\dots,x_n)dP_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = E_{\phi_k(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)} =$
   $= \int_\Omega \phi_k(\xi_1(w),\xi_2(w),\dots,\xi_n(w))dP(w)$
   Перейдём к пределу по монотонной последовательности $\phi_k \underset{k\to+\infty}{\to} f$ (так можно по теореме Беппо-Леви)
   Тогда
   $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x_1,x_2,\dots,x_n)dP_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)dP_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$
   $\int_\Omega \phi_k(\xi_1(w),\xi_2(w),\dots,\xi_n(w))dP(w) \to \int_\Omega f(\xi_1(w),\xi_2(w),\dots,\xi_n(w))dP(w)$

Шаг 4

$f = f_+ - f_-$

$\square$

7. Если $\xi$ и $\eta$ независимы, то $E_{\xi\eta} = E_\xi E_\eta$.
   Если $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ независимы, то $E_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n} = E_{\xi_1}E_{\xi_2}\ldots E_{\xi_n}$
   (Если все эти интегралы существуют, конечно)

   **Доказательство.**
   $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2\ldots x_n$
   $E(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1x_2\ldots x_n dP_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$
   Мы знаем, что мера независимых с.в. – произведение мер по каждой координате
   $= \int_{\mathbb{R}^n} x_1x_2\ldots x_n dP_{\xi_1}(x_1)P_{\xi_2}(x_2)\ldots P_{\xi_n} \underset{\text{по т. Тонелли}}{=} \int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}} x_1dP_{\xi_1}(x_1)x_2P_{\xi_2}(x_2)\ldots x_ndP_{\xi_n}(x_n) =$
   $\int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}} E_{\xi_1}x_2P_{\xi_2}(x_2)\ldots x_ndP_{\xi_n}(x_n) = E_{\xi_1}\int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}} x_2P_{\xi_2}(x_2)\ldots x_ndP_{\xi_n}(x_n) = E_{\xi_1}E_{\xi_2}\ldots E_{\xi_n}$
   (TODO: 180321: 19:25 - 20:30, 21:40 - 22:00 даётся аккуратное объяснение тому, почему последние переходы делать корректно, я нахожусь в процессе формулировки) $\square$

8. Если $\xi \geqslant 0$, то $E_\xi = \int_0^\infty P(\xi \geqslant t)dt$
   Была в теории меры. Называлась интегралом по функции распределения

9. $E_{|\xi\eta|} \leqslant (E_{|\xi|^p})^{\frac{1}{p}}(E_{|\eta|^q})^{\frac{1}{q}}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $p,q > 0$
   Неравенство Гёльдера как оно есть для интегралов по мере.

10. Если $0 < r < s$, то $(E_{|\xi|^r})^{\frac{1}{r}} \leqslant (E_{|\xi|^s})^{\frac{1}{s}}$ (неравенство Ляпунова)

    **Доказательство.**
    Заметим, что достаточно проверить неравенство для $r = 1$:
    $\overline{\xi} \coloneqq |\xi|^r$, $E_{\overline{\xi}} \leqslant (E_{\overline{\xi}^{\frac{s}{r}}})^{\frac{r}{s}}$
    Проверим для $r = 1$.
    Берём $p = s > 1$ и соответствующее $q$. $\eta \equiv 1$. Тогда по неравенству Гёльдера:
    $E_\xi \leqslant (E_{|\xi|^s})^{\frac{1}{s}}(E_{|\eta|^q})^{\frac{1}{q}} = (E_{|\xi|^s})^{\frac{1}{s}}$ т.к. матожидание единицы – это единица. $\square$

*Замечание.* $E_{\xi\eta} = E_\xi E_\eta$ без независимости неверно

**Пример.**
$\xi : \Omega \to \{\pm 1\}$, $P(\xi = -1) = P(\xi = +1) = \frac{1}{2}$
$E_\xi = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$
$\eta \coloneqq \xi$, $\xi\eta = \xi^2 \equiv 1$.
$E_{\xi\eta} = 1 \neq 0 = E_\xi E_\eta$

***Определение* 3.2** (Медиана)**.**
$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$
Медиана $\xi$ – это такое число $a \in \mathbb{R}$, что вероятность того, что $P(\xi \geqslant a) \geqslant \frac{1}{2}$ и $P(\xi \leqslant a) \geqslant \frac{1}{2}$

*Замечание.* Такое $a$ может быть не единственно. Например, для примера выше любое число из $[-1,1]$ является медианой.

**Пример.**
Есть 1000 человек.
999 из них получает 1000$, а их начальник 1000000$
Какая средняя зарплата с точки зрения матожидания?
$E_\xi = \frac{999}{1000}\cdot 1000 + \frac{1}{1000}\cdot 1000000 = 1999$

А если посчитать медиану? Медианой будет 1000 т.к. если взять меньше, то все зарплаты будут больше, если взять больше, то вероятность получить зарплату больше медианы слишком маленькая.

Эта задача иллюстрирует, что если нас интересует корректная средняя заплата, то правильнее считать медиану. В целом, во многих странах так и делают (не в России)...

***Определение* 3.3** (Дисперсия)**.**
$D_\xi := E(\xi - E_\xi)^2$
Для того, чтобы существовала дисперсия обязательно нужно, чтобы существовало конечное математическое ожидание.

***Свойства.***

1. $D_\xi = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2$

   **Доказательство**. $D_\xi = E_{(\xi - E_\xi)^2} = E_{\xi^2 - 2\xi E_\xi + (E_\xi)^2} = E_{\xi^2} - 2E_\xi E_\xi + E_{(E_\xi)^2} =$
   $E_{(E_\xi)^2}$ – это матожидание от константы, оно равно этой самой константе
   $= E_{\xi^2} - 2(E_\xi)^2 + (E_\xi)^2 = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2$ □

2. $D_\xi \geqslant 0$ как интеграл от неотрицательной функции

3. Если $D_\xi = 0$, то $\xi = const$ с вероятностью 1.

   **Доказательство**. $E_{(\xi - E_\xi)^2} = 0$. Это значит, что интеграл неотрицательной функции равен нулю. Это значит, что функция равна нулю почти везде. На языке вероятностей это значит, что функция равна нулю с нулевой вероятностью.

   Т. е. $\xi - E_\xi = 0$ с вероятностью 1. Вспомним, что $E_\xi$ – это константа. Получили, что $\xi = const$ с вероятностью 1. □

4. $D_{\xi+c} = D_\xi$

   **Доказательство**. $E_{\xi+c} = c + E_\xi \Rightarrow \xi - E_\xi = (\xi + c) - E_{\xi+c} = \xi + c - E_\xi - c$ □

5. $D_{c\xi} = c^2 D_\xi$

   **Доказательство**. $D_{c\xi} = E_{(c\xi - E_{c\xi})^2} = E_{(c(\xi - E_\xi))^2} = c^2 E_{(\xi - E_\xi)^2}$ □

6. $D(-\xi) = D(\xi)$ (Следует из того, что $(-1)^2 = 1$)

7. Если $\xi$, $\eta$ независимы, то $D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$

   **Доказательство**. $E_{(\eta+\xi)^2} = E_{\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2} = E_{\xi^2} + 2E_{\xi\eta} + E_{\eta^2} \underset{\text{по незав.}}{=} E_{\xi^2} + 2E_\xi E_\eta + E_{\eta^2}$
   Посмотрим теперь на $(E_{\eta+\xi})^2 = (E_\xi + E_\eta)^2 = (E_\xi)^2 + 2E_\xi E_\eta + (E_\eta)^2$
   По первому свойству, $D_{\eta+\xi} = E_{(\eta+\xi)^2} - (E_{\eta+\xi})^2 =$
   $= E_{\xi^2} + 2E_\xi E_\eta + E_{\eta^2} - ((E_\xi)^2 + 2E_\xi E_\eta + (E_\eta)^2) = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2 + E_{\xi^2} - (E_\eta)^2 = D_\xi + D_\eta$ □

8. $E_{|\xi - E_\xi|} \leqslant \sqrt{D_\xi}$

   **Доказательство**. По неравенству Ляпунова, $r = 1, s = 2, \overline{\xi} := |\xi - E_\xi|$ □

**Теорема 3.1** (Неравенство Чебышёва (Маркова))**.**
$t, p > 0 \Rightarrow R(|\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{E_{|\xi|^p}}{t^p}$

**Доказательство**. У нас оно уже было, только вместо матожидания был интеграл. □

***Следствие.*** $P(|\xi - E_\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{D_\xi}{t^2}$.

**Доказательство**. В неравенство Чебышёва напишем $\xi - E_\xi$ вместо $\xi$, а вместо $p$ напишем 2. □

**Пример.**

1. $\xi \sim U[0,1]$
   $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_\xi(x) =$.
   В нашем случае $P_\xi(x)$ – это мера Лебега на $[0,1]$. Тогда
   $= \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$
   $E_{\xi^2} = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_\xi(x) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$
   $D_\xi = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}$
2. $\xi \sim U[a,b]$.
   $\xi = (b-a)\eta + a$, где $\eta \sim U[0,1]$.
   $E_\xi = E_{(b-a)\eta+a} = (b-a)E_\eta + a = (b-a)\frac{1}{2} + 1 = \frac{a+b}{2}$
   $D_\xi = D_{(b-a)\eta} + a = D_{(b-a)\eta} = (b-a)^2 D_\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$
   $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x\, P_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0$ т.к. нечётная ф-я.
   $E_{\xi^2} = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-x) d(e^{-x^2/2}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} d(-x) = 1$

   $D_\xi = E_{\xi^2} - E_\xi^2 = 1$
4. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   $\xi = \sigma\eta + a$, где $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$
   $E_\xi = E_{\sigma\eta+a} = \sigma E_\eta + a = a$
   $D_\xi = D_{\sigma\eta+a} = D_{\sigma\eta} = \sigma^2 D_\eta = \sigma^2$

**Пример Независимое множество в графе.**
$G = (V, E)$ – граф, $n$ вершин и $\frac{nd}{2}$ рёбер для $d \geqslant 1$
Тогда в графе можно выбрать антиклику размера $\frac{n}{2d}$.

**Доказательство**. Выберем некоторый параметр $p \in [0,1]$
Будем брать случайное множество вершин $S$: $P(s \in S) = p$
Рассмотрим подграф на $S$.
Если $\{x,y\} \in E$, то

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{если } x, y \in S \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$\xi = \sum_{\{x,y\} \in E} \xi_{xy}$
$E_\xi = \sum_{\{x,y\} \in E} E_{\xi_{xy}} = \frac{nd}{2} p^2$
Если $v \in V$, то

$$\eta_v = \begin{cases} 1 & \text{если } v \in S \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$\eta = \sum_{v \in V} \eta_v$
$E_\eta = \sum_{v \in V} E_{\eta_v} = pn$
$E_{\eta-\xi} = pn - \frac{ndp^2}{2}$

Проще говоря, мы только что ввели величины количеств вершин и рёбер в случайном множестве $S$.

Выберем такое $p$, чтобы выражение выше имело максимальное значение
$p \coloneqq \frac{1}{d}$
$E_{\eta-\xi} = \frac{n}{2d}$.

Если среднее значение равно $\frac{n}{2d}$, то существует мно-во $S$, для которого $\eta - \xi \geqslant \frac{n}{2d}$. Величина $\eta - \xi$ – это количество вершин минус количество рёбер (для $S$ она $\geqslant \frac{n}{2d}$). Внутри множества $S$ есть сколько рёбер и сколько-то вершин. Давайте для каждого ребра в $S$ выкинем какую-то одну вершину. Тогда рёбер не останется, а вершин будет хотя бы $\frac{n}{2d}$. И оставшиеся вершины будут образовывать независимое множество. □

*Замечание.* Обычно с помощью данного подсчёта матожидания можно многое относительно точно понять о комбинаторных объектах с неизвестной структурой. Так, для примера выше, очевидно, что детерминированным алгоритмом можно выбрать независимое множество получше. Но порядок величины очень часто оказывается весьма точным.

28.03.2018

*Замечание.* Мы знаем, что $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_\xi(x)$. Как будет выглядеть эта формула, если мы что-нибудь знаем о распределении?

1. $P_\xi$ – дискретная мера.
   $\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \dots\}$
   Тогда $E_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(\xi = y_k)$

2. $P_\xi$ – абсолютно непрерывна, т.е. есть плотность $p_\xi(x)$
   Тогда $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x) dx$

## 3.1. Корреляция и ковариация

***Определение* 3.4** (Ковариация).
$\eta, \xi$ – с.в. такие, что $E_{\xi^2} < +\infty$, $E_{\eta^2} < +\infty$
$cov(\xi, \eta) \coloneqq E((\xi - E_\xi)(\eta - E_\eta))$

***Свойства.***

1. $cov(\xi, \xi) = D_\xi$

2. $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta$

   **Доказательство**. $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta - \xi E_\eta - \eta E_\xi + E_\xi E_\eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta - E_\eta E_\xi + E_\xi E_\eta$ □

3. Если $\xi$ и $\eta$ независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$

   **Доказательство**. Для независимых $\eta$ и $\xi$ верно, что $E_{\xi\eta} = E_\xi E_\eta$. И см. пункт выше □

4. $cov(\xi_1 + \xi_2, \eta) = cov(\xi_1, \eta) + cov(\xi_2, \eta)$
   $cov(c\xi, \eta) = c \cdot cov(\xi, \eta)$

5. $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$

6. $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi,\eta)$
   $D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{i<k} cov(\xi_i,\xi_j)$

   **Доказательство**. Индукция.
   База $n = 2$.
   $D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2) - (E\xi)^2 - 2E\xi E\eta - (E\eta)^2$
   Переход $n \to n+1$
   $D(\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k) = D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k + \xi_{n+1}) = D(\sum^{n}\xi_k) + D\xi_{n+1} + 2cov(\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \xi_{n+1}) =$
   $\underset{\text{по инд. и линейн.}}{=} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{i<k\leqslant n} cov(\xi_i,\xi_k) + D\xi_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} cov(\xi_k,\xi_{n+1})$ ☐

*Замечание.* $cov(\xi,\eta) = 0 \not\Rightarrow \xi$ и $\eta$ независимы.

**Доказательство**.
$\xi(w) = \cos(w)$
$\eta(w) = \sin(w)$
$\Omega = \{0, \pi/2, \pi\}$
$E_\xi = \frac{\cos 0 + \cos\pi/2 + \cos\pi}{3} = 0$
$\xi\eta \equiv 0 \Rightarrow E_{\xi\eta} = 0$
$E_\xi E_\eta = 0 \Rightarrow cov(\xi,\eta) = 0$

Но нет независимости:
$P(\xi=1)P(\eta=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \neq P(\xi=1,\eta=1) = 0$ ☐

***Определение* 3.5** (Коэффициент корреляции)**.**

$\rho(\xi,\eta) := \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_\eta}}$

Случайные величины не коррелируют, если $cov(\xi,\eta) = 0$

*Замечание.*
$\rho(\xi,\eta) \in [-1,1]$ т.к. по неравенству Коши-Буняковского:
$|E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \leqslant \sqrt{E(\xi-E\xi)^2}\sqrt{E(\eta-E\eta)^2}$

*Замечание.* Рассмотрим $E_{\xi^2}, E_{\eta^2} < +\infty$

Тогда на пространстве таких величин (с конечным матожиданием квадрата), пофакторизованных по константе, можно определить скалярное произведение:

$\langle\xi,\eta\rangle := cov(\xi,\eta)$
$\sqrt{D_\xi}$ – норма в таком пространстве (называется стандартным отклонением $\sigma(\xi)$)
Фактор по константе нужен для того, чтобы соблюдалось свойство: $\langle\xi,\xi\rangle = 0 \iff \xi = 0$

**Пример.** $\Omega := \{1,2,3,\ldots,n\}$
$\nu(k) :=$ количество различных простых в разложении $k$.
А теперь смотрим на теорему ниже:

**Теорема 3.2** (Харди-Рамануджана)**.**
$\omega(n) \to +\infty$
Тогда $P(|\nu(k) - \ln\ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln\ln n}) \to 0$ при $n \to +\infty$

**Доказательство**. Туран, 1935
$\xi_p(k) = \begin{cases} 1, \text{ если } p|k \\ 0, \text{ если } p \nmid k \end{cases}$

$M := \sqrt[10]{n}$

$\xi := \sum_{p\in\mathbb{P},\ p\leqslant M}\xi_p$

$0 \leqslant \nu(k) - \xi(k) \leqslant 10$

$P(|\xi - \ln\ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln\ln n}) \to 0$

$E\xi = \sum_{p\in\mathbb{P},\ p\leqslant M} E\xi_p = \sum_{p\in\mathbb{P},\ p\leqslant M} 1/p + (M/n) = \ln\ln M + (1) = \ln\ln n + (1)$

$E\xi_p = \frac{[n/p]}{n} = \frac{n/p+(1)}{n} = 1/p + (1/p)$

$D\xi = \sum_{p\in\mathbb{P},\ p\leqslant M} D\xi_p + 2\sum_{p,\,q\in\mathbb{P},\ p<q\leqslant M} cov(\xi_p,\xi_q)$

$D\xi_p = E\xi_p^2 - (E\xi_p)^2 = E\xi_p - (E\xi_p)^2 = 1/p + (1/n) - 1/p^2 + (1/n)$

$cov(\xi_p,\xi_q) = E(\xi_p\xi_q) - E\xi_p E_{\xi_q} = \frac{[\frac{n}{pq}]}{n} - \frac{[n/p]}{n}\frac{[n/q]}{n}$

$cov(\xi_p,\xi_q) \geqslant \frac{\frac{n}{pq}-1}{n} - \frac{n/p}{n} - \frac{n/q}{n} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\frac{1}{q} = -\frac{1}{n}$

$1\sum cov(\xi_p,\xi_q) \geqslant M^2\frac{1}{n} = (1)$

$cov(\xi_p,\xi_q) \leqslant \frac{\frac{n}{pq}}{n} - \frac{(\frac{n}{p}-1)(\frac{n}{q}-1)}{n^2} =$

...

Неравенство Чебышёва

$P(|\xi - E\xi| \geqslant \lambda\sqrt{D\xi}) \leqslant \frac{D\xi}{(\lambda\sqrt{D\xi})^2} = 1/\lambda^2$

$E\xi = \ln\ln + (1)$

$\sqrt{D\xi} = \sqrt{\ln\ln} + (1)$

$\square$

***Определение* 3.6.** $k$-й момент $E\xi^k$ – $k$-й момент случайной величины $\xi$

$E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_\xi(x)$

***Определение* 3.7.** $E|\xi - E\xi|^k$ – $k$-й центральный момент

$D\xi$ – второй центральный момент

## 3.2. Сходимость случайных величин и закон больших чисел

***Определение* 3.8.** $\xi_n, \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

1. $\xi_n$ сходится к $\xi$ почти наверное (= с вероятностью 1), если $P(\omega\in\Omega : \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$

2. $\xi_n$ сходится к $\xi$ в среднем порядка $r > 0$, если $E|\xi_n - \xi|^r \to 0$ при $n\to\infty$

3. $\xi_n$ сходится к $\xi$ по вероятности

$\forall\varepsilon > 0\ P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

4. $\xi_n$ сходится к $\xi$ по распределению

$F(\xi_n)$ сходится к $F_\xi$ во всех точках непрерывности $F_\xi$. ($\sim$ теорема Муавра-Лапласа)

*Замечание.* Связь между сходимостями

$1 \Rightarrow 3$ теорема Лебега ($3 \not\Rightarrow 1$ был пример)

$2 \Rightarrow 3$

$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^r > \varepsilon^r) \leqslant \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \to 0$

$1 \not\Rightarrow 2$ (а значит, и $3 \not\Rightarrow 2$)

$\Omega = [0,1]$

$\xi_n = n^{1/r}\mathbb{1}_{[0,1/n]} \to \xi \equiv 0$ сходится почти наверное

Но $E\xi_n^r = E(n\mathbb{1}_{[0,1/n]}) = 1 \nrightarrow 0$

$2 \nRightarrow 1$ (а значит $3 \nRightarrow 1$)

Контрпример: $\xi_{n,k} \coloneqq \mathbb{1}_{[k/n,(k+1)/n]}$

$E\xi_{n,k}^r = 1/n^r \to 0$

$3 \Rightarrow 4$

Пусть $F_\xi$ непрерывна в точке $x$.

$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

$\{\xi_n > x\} \supset \{\xi > x+\varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi < \varepsilon|\}$

$P(\xi_n > x) \geqslant P(\dots)$

$\{\xi_n \leqslant x\} \subset \{\xi \leqslant x+\varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$

$F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x+\varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x_\varepsilon) + \varlimsup\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = F_\xi(x_\varepsilon)$

$\{\xi_n \leqslant x\} \supset \{\xi \leqslant x-\varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$

$\{\xi_n > x\} \subset \{\xi > x-\varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$

$1 - F_{\xi_n}(x) \leqslant 1 - F_\xi(x-\varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x-\varepsilon) - P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$\varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x-\varepsilon)$

$F_\xi(x+\varepsilon) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x-\varepsilon) \to F_\xi(x)$

$F_\xi(x+\varepsilon) \to F_\xi(x)$ при $\varepsilon \to 0$

$4 \nRightarrow 3$ Некорректна такая постановка вопроса

14.03.2018

**Пример.** $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\xi\sigma\eta + a$

$\varphi_\xi(t) = e^{iat}\varphi_\eta(at)$

$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it)^2/2}dx$

Контур: прямоугольник под осью $Ox$, проходящий через $-it$, с горизонтальной стороной от $-R$ до $R$.

$0 = \int\limits_{\Gamma_R} e^{-z^2/2}dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2/2}dx - \int\limits_{-R}^{R} e^{-(x-it)^2/2}dx + \int\limits_{0}^{-t} e^{-(R+iy)^2/2}dy + \int\limits_{0}^{-t} e^{-(-R+iy)^2/2}dy \to \sqrt{2\pi} - \int\limits_{-R}^{R} e^{-(x-it)^2/2}dx + 0$

$|e^{-(\pm R+iy)^2/2}| = e^{-R^2/2}e^{y^2/2}$

$\sqrt{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it)^2/2}dx$

$\varphi_\eta(t) = e^{t^2/2}$

$\varphi_\xi(t) = e^{iat-\sigma^2t^2/2}$

**Теорема 3.3.** Пусть $E|\xi|^n < +\infty$. Тогда $\forall k = 1, 2, \dots, n$

$(\varphi_\xi(t))^{(k)} = E((i\xi)^k e^{it\xi})$

В частности $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

**Доказательство.** Индукция по $k$. База $k = 0$ – определение $\varphi_\xi$.

Переход $k \to k+1$:

$(\varphi_\xi(t))^{(k+1)} = \lim\limits_{h\to0} \frac{(\varphi_\xi(t+h))^{(k)}-(\varphi_\xi(t))^{(k)}}{h} = \lim\limits_{h\to0} \frac{E((i\xi)^k e^{i(t+h)\xi})-E((i\xi)^k e^{it\xi})}{h} = \lim\limits_{h\to0} E((i\xi)^k e^{it\xi}\frac{e^{ih\xi}-1}{h}) = \lim\limits_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}(ix)^k e^{it}$

$|(ix)^k e^{itx}\frac{e^{ihx}-1}{h}| = x^k|\frac{e^{ihx}-1}{h}| = x^k(x) = (x^{k+1})$ – суммируемая мажоранта

$|xh| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|h|} < |x|$

□

***Следствие.*** $E\xi = -i\varphi'_\xi(0)$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi) = \varphi''_\xi(0) + (\varphi'_\xi(0))^2$

**Теорема 3.4.** Если существует $\varphi''_\xi(0)$, то $E\xi^2 < +\infty$.

**Доказательство.** $E\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dP_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim\limits_{t\to0}(\frac{\sin(tx)}{t})^2 dP_\xi(x) <$

$(\sin(tx))^2 = (\frac{e^{itx}-e^{-itx}}{2i})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2itx} + e^{-2itx} - 2)$

По лемме Фату можем переставить предел и интеграл, чтобы получить оценку:

$< \lim\limits_{t\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin tx}{t})^2 dP_\xi(x) = \lim\limits_{t\to0} -\frac{1}{4t^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(e^{2itx} + e^{-2itx} - 2)dP_\xi(x) = -\frac{1}{4}\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^2}(\varphi_\xi(2t) + \varphi_\xi(-2t) - 2\varphi_\xi(0)) =$

$\varphi_\xi(s) = \varphi_\xi(0) + s\varphi'_\xi(0) + \frac{s^2}{2}\varphi''_\xi(0) + o(s^2)$

$= -\frac{1}{4}\lim\limits_{t\to0}\frac{(2t)^2\varphi''_\xi(0)+o(t^2)}{t^2} = -\varphi''_\xi(0)$

□

*Замечание.* Если существует $\varphi^{(2n)}(0)$, то $E\xi^{2n} < +\infty$

**Теорема 3.5.** Формула Обращения

$a < b$

$P_\xi(\{a\}) = P_\xi(\{b\}) = 0$

(иначе говоря $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$)

$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{+T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_\xi(t)dt$

(Можно воспринимать это как интеграл по главному значению от $-\infty$ до $+\infty$)

**Доказательство.** $\{\xi \in [a, b]\} \Leftrightarrow \{\eta \in [-1, 1]\}$

$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\eta$

$\varphi_\xi(t) = e^{i\frac{a+b}{2}t}\varphi_\eta(\frac{b-a}{2}t)$

$\int\limits_{-T}^{+T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_\xi(t)dt = \int\limits_{-T}^{+T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{i\frac{a+b}{2}t}\varphi_\eta(\frac{b-a}{2}t)dt = \int\limits_{-T}^{+T}\frac{e^{-i\frac{a-b}{2}t}-e^{-i\frac{b-a}{2}t}}{it}\varphi_\eta(\frac{b-a}{2}t)dt \underset{s:=\frac{b-a}{2}t}{=} \int\limits_{-\frac{b-a}{2}T}^{\frac{b-a}{2}T}\frac{e^{is}-e^{is}}{is}\varphi_\eta(s)d$

Считаем, что $[a, b] = [-1, 1]$

$\int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\varphi_\xi(t)dt = \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{it}}{-it} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dP_\xi(x)dt \underset{\text{т. Фубини}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}e^{itx}dtdP_\xi(x)$

$\Phi_T(x) \coloneqq \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}e^{itx}dt$

$\Phi_T(x) = \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-1}^{1} e^{itu}due^{itx}dt = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-T}^{T} e^{it(u+x)}dtdu = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{iT(u+x)}-e^{-iT(u+x)}}{i(u+x)}du = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2\sin(T(u+x))}{u+x}du \underset{v:=T(u+x)}{=}$
$2\int\limits_{T(x_1)}^{T(x+1)} \frac{\sin v}{v}dv$

$\int\limits_{T(x_1)}^{T(x+1)} \frac{\sin v}{v}dv \to_{T\to+\infty} = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 1 \\ \pi, \text{ если } -1 < x < 1 \text{ (считали где-то раньше, говорят)} \\ 0, \text{ если } x < -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\varphi_\xi(t) = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_T(x)dP_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim\limits_{T\to+\infty} \Phi_T(x)dP_\xi(x) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dP_\xi(x) =$
$P_\xi([-1, 1])$

Переставить интеграл с пределом можно по теореме Лебега. Суммируемая мажоранта $=$ $2\pi$ □

***Следствие.*** Если $\varphi_\xi = \varphi_\eta$, то $\xi$ и $\eta$ одинаково распределены.

**Доказательство**. Надо проверить, что совпали функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$.

1) $b$ такое, что $P(\xi = b) = 0$

Проблемных точек не более, чем счётное число.

$a_n < b$, $a_n \searrow -\infty$ и $P(\xi = a_n) = P(\eta = a_n) = 0$

$P(a_n \leqslant \xi \leqslant b) = \lim \dots = P(a_n \leqslant \eta \leqslant b) \to P(\eta \leqslant b) = F_\eta(b)$

$P(a_n \leqslant \xi \leqslant b) \to P(\xi \leqslant b) = F_\xi(b)$

$\Rightarrow F_\xi = F_\eta$ во всех точках, где $P(\xi = b) = P(\eta = b) = 0$

Но они непрерывны справа. Введём $b_n \searrow x$ $P(\xi = b_n) = P(\eta = b_n) = 0$

$F_\xi(x) \leftarrow F_\xi(b_n) = F_\eta(b_n) \to F_\eta(x)$

□

***Следствие.*** Пусть $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_\xi(t)|dt < +\infty$.

Тогда $\xi$ имеет плотность $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt$.

**Доказательство**. $P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat}-e^{-iat}}{it}\varphi_\xi(t)dt$

Проверим, что формула плотности из условия теоремы подходит:

$\int\limits_{a}^{b} p_\xi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dtdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{a}^{b} e^{-itx}dx\varphi_\xi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat}-e^{-iat}}{it}\varphi_\xi(t)dt$

□

**Теорема 3.6.** $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$ – независимые с.в.

$\eta = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \xi_k$ причём не все $c_k = 0$

$A \coloneqq a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k a_k$

$\sigma \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \sigma_k^2$

Тогда $\eta \sim \mathcal{N}(A, \sigma)$

**Доказательство**. $\varphi_{\xi_k}(t) = e^{ia_k t} e^{-\sigma_k^2 t^2/2}$

$\varphi_\eta(t) = \varphi_{a_0}(t) \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{c_k \xi_k}(t) = e^{ia_0 t} \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi(c_k t) = e^{ia_0 t} \prod\limits_{k=1}^{n} e^{ia_k c_k t} e^{-\sigma_k^2 c_k^2 t^2/2} = e^{iAt - \sigma^2 t^2/2}$

□