Теория вероятностей

Швецова Анна, Василенко Елизавета

28 марта 2018 г.

Содержание

1. Введение

27.02.18

1.1. §Графовые теоремы.

Теорема 1.1 (Теорема Рамсея)**.** $\forall k, m \exists n = n(k, m)$ т.ч. для любого графа на n вершинах существует либо пустой подграф на m вершинах, либо полный на k.

***Определение* 1.1.** $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое n.

Нижняя оценка на $\mathcal{R}(k, m)$:

Теорема 1.2 (Теорема Эрдеша)**.** Если $2^{1-C_k^2} C_n^k < 1$, то существует такой граф на n вершинах, что у него нет ни полного подграфа на k вершинах, ни пустого подрафа на m.

В частности $\mathcal{R}(k, k) > 2^{k/2}$

Доказательство. Ω будет состоять из графов на n вершинах, $\#\Omega = 2^{C_n^2}$.
P(событие: между a и b проведено ребро) $= 1/2$. Такие события независимы. Значит, можно считать, что случайный граф – это граф, в котором каждое ребро с вероятностью $1/2$. $P(\bigcup_{j=1}^l A_j) \leqslant \sum_{j=1}^l P(A_j)$. Возьмём набор из k вершин $a_1, a_2, \dots a_k$. C_k^2 пар вершин. $2^{-C_k^2}$ – вероятнность полного подграфа $2^{-C_k^2}$ – вероятнность пустого подграфа P(вершины $a_1, a_2, \dots a_k$ подходят) $= 2^{1-C_k^2}$ P(хоть какие-то вершины подходят) $= 2^{1-C_k^2} C_n^k < 1 \Rightarrow$ существует граф на n вершинах, у которого никакие k вершин не походят.

В частности: $n = 2^{k/2}$
$2^{1-C_k^2} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{2^{C_k^2 - 1}} < \frac{n^k}{k!} \frac{2}{2^{k/2(k-1)}} = \frac{n^k}{2^{k^2/2}} \frac{2^{k/2+1}}{k!} < \frac{n^k}{2^{k^2/2}} = \left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k < 1$ при $n \leqslant 2^{k/2}$ $\square$

***Определение* 1.2.** $\mathcal{R}(k, m)$ – наименьшее такое n.

1.2. §Предельные теоремы для схем Бернулли

С вероятностью $p, 0 < p < 1$ выпадает орёл (1)
С вероятностью $q = p - 1$ выпадает решка (0)
n раз. S_n – число выпавших орлов. $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пример. $p = 1/5$ $P(S)_{1000} = 220 \approx 0,008984\dots$
$p = 1/6$ $P(S)_{2000} = 360 \approx 0,006625\dots$
Хочется приближённые оценки

Теорема 1.3 (Пуассона)**.** Последовательность схем Бернулли.
$np_n \to_{n\to\infty} \lambda > 0$
Тогда $P(S_n = k) \to_{n\to\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Замечание. При этом сходимость равномерная по k.
Утверждение верно, если k не фиксировано, а $o(\sqrt{n})$.

(Доказывается аналогично, но чуть труднее.)

Доказательство. $P(S_n = k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1 - p_n)^n$

Надо доказать, что $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$, т.е. $n\log(1-p_n) \to -\lambda$ $\square$

Теорема 1.4 (Прохорова)**.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(S_n = k)\ \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| \leqslant \frac{\min\{2,\lambda\}}{n} 2\lambda$

Доказательство. $P(S_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \sim \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^n \frac{1}{(1-p_n)^k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n$
Надо доказать, что $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$, т.е. $n\log(1-p_n) \to -\lambda$

$\square$

Пример. Рулетка $p = 1/37$ – вероятность выигрыша, $n = 111$ – число игр, $\lambda = np = 3$. При выигрыше $+37$, за игру -1.
Вероятность остаться с суммой 0:
$P(S_{111} = 3) = C_{111}^3 \left(\left(\frac{1}{37}\right)\right)^3 (1-1/37)^{111-3} \approx 0,227127\dots$
По теореме: $\approx \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{3^3 e^{-3}}{6} = 0,224041\dots$

Вероятность не проиграть:
$P(S_n > 3) = 1 - P(S_n = 0) - P(S_n = 1) - P(S_n = 2) - P(S_n = 3) \approx 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!} - \frac{3^2 e^{-3}}{2!} - \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0,352768\dots$
Точное значение:
$1 - \frac{13}{e^3} = 0,352754\dots$

Теорема 1.5 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** $0 < p < 1$, $x \coloneqq \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, T – фиксированное число
Если $n \to \infty$, а k меняется таким образом, что $|x| \leqslant T$, то $P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}$ равонмерно по x.

Замечание. Более того, если $\phi(n) = o((npq)^{1/6})$ и $|x| \leqslant \phi(n)$, то заключение верно и эквивалентность равномерна по x (то есть, предел, равный 1, равномерный).

Доказательство. $k = np + x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
$n - k = np - x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
$\alpha \coloneqq \frac{k}{n} = \frac{np + x\sqrt{npq}}{n} = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to p$
$1 - \alpha = 1 - p - x\sqrt{\frac{pq}{n}} = q - x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to q$
$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{} k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)} = \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha(1-\alpha)}} \sim \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$

Надо понять, что $\left(\frac{p}{\alpha}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{n-k} \to e^{-x^2/2}$
$A \coloneqq k\log(\frac{\alpha}{p}) + (n-k)\log(\frac{1-\alpha}{1-p}) \to^? \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + (t^3)$

$\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{pn}}$

$\frac{1-\alpha}{1-p} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{qn}}$
$\ln(\frac{\alpha}{p}) = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - 1/2x^2\frac{q}{np} + (n^{-3/2})$
$\ln(\frac{1-\alpha}{1-p}) = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - 1/2x^2\frac{p}{nq} + (n^{-3/2})$
$k = n\alpha = np + x\sqrt{npq}$
$n - k = n(1-\alpha) = nq - x\sqrt{npq}$
$A = x\sqrt{qpn} + x^2 q - 1/2x^2 q - 1/2x^3\frac{q^{2/3}}{\sqrt{np}} + (n^{-1/2}) -$

$-x\sqrt{qpn} + x^2p - 1/2x^2p + 1/2x^3\frac{p^{2/3}}{\sqrt{nq}} + (n^{-1/2}) = \frac{x^2}{2} + (n^{-1/2})$

$\square$

Пример. Рулетка Ставим только на красные. $n = 222, k = 111$(сколько раз выиграли)$, p = 18/37, q = 19/37$
$P(S_{222} = 111) \approx 0,0493228\ldots$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi npqe^?}} \approx 0,0493228\ldots$

Теорема 1.6 (Интегральная теорема)**.** $0 < p < 1$
$0 < p < 1$
$P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) \to_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt$ равномерно по a и b.

Замечание. Частный случай теоремы Берри-Эссена
$\sup\left|P(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x) - \frac{1}{\sqrt{1\pi}\int_{-\infty}^x} e^{-t^2/2}dt\right| \leqslant \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$

Замечание. Лучше $\sqrt{n}$ в знаменателе быть не может.
$P(S_{2n} = n) = C_{2n}^n(1/2)^n(1/2)^n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$
$p = q = 1/2$
$P(S_{2n} < n) + P(S_{2n} = n) + p(S_{2n} > n) = 1$
$P(S_{2n} < n) \approx \frac{1+\sqrt{\pi n}}{2} = 1/2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$
$\left|P(S_{2n} < n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}dt\right| \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$

Пример. Задача о театре

1600 мест. Два гардероба у двух разных входов. Люди случайно выбирают один из входов. Сколько сделать мест в гардеробе, чтобы он переполнялся не чаще раза в месяц?

В гардеробах по C мест.
$P((S_n < C) \cap (S_n \geqslant n - C)) \leqslant 29/30$
$= P(n - C \leqslant S_n \leqslant C) = P(\frac{n-C-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{C-np}{\sqrt{npq}}) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{nq-C}{\sqrt{npq}}}^{\frac{C-np}{\sqrt{npq}}} e^{-t^2/2}dt \approx 2\cdot 29/60$
$\frac{C-800}{20} \approx 2,13$
$C \approx 800 + 20\cdot 2\cdot 13 = 843$

2. Общая теория вероятностей

07.03.2018

2.1. Колмогоровское определение вероятности

***Определение* 2.1** (Вероятностное пространство)**.** (Ω, F, P), где

Ω – пространство элементарных событий (простыми словами множество).

F – совокупность случайных событий $\subset 2^{\Omega}$. σ-алгебра

P – мера на F, такая что $P(\Omega) = 1$ (вероятностная мера)

Замечание. На самом деле от меры требуется только конечность т.к. её всегда можно отнормировать.

Замечание. Если Ω не более чем счётна, то в качестве F всегда можно взять не более чем счётные подмножества. $F = 2^{\Omega}$. В этом случае можно воспользоваться счётной аддитивностью меры и тогда мера определится везде.

***Определение* 2.2** (Условная вероятность)**.** Пусть $B \in F$, $P(B) > 0$, тогда $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Формула полной вероятности, формула и теорема Байеса верны и тут т.к. основывались в дискретном пространстве только на этой формуле.

***Определение* 2.3** (Независимые события)**.** $P(A)P(B) = P(A \cup B)$.

$A_1, A_2 \ldots, A_n$, $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) = P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n)$

Для бесконечных последовательностей событий скажем, что они независимы, если любой конечный поднабор независим.

Лемма (Бореля-Кантелли)**.** $A_1, A_2, \ldots$ – события, B – событие "наступило бесконечное число событий из $A_1, A_2 \ldots$".

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$.
2. Если $A_1, A_2 \ldots$ независимы в совокупности и

$$\sum_{n=1}^{\text{inf}} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(B) = 1$$

Доказательство. Начнём с понимания того, что такое B. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$P(B) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$

$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ вложены друг в друга как множества, поэтому $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ (т.к. хвост сходящегося ряда).

Первый пункт доказан. Второй;

Если $A_1, A_2 \ldots$ независимы, тогда и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots$ независимы. Тогда

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}) \leftarrow P(\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_k}) = \Pi_{k=1}^{m} P(\overline{A_k}) \to \Pi_{k=1}^{m} P(\overline{A_k})$$

$1-P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1-P(\overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}}) = P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}) = \Pi_{k=1}^{m} P(\overline{A_k}) = \Pi_{k=n}^{m} P(1-P(A_k))$ (TODOпереписать, чтобы было понятно, что известно, а что дописалось) $1 - P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \to 1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1 - P(B)$

Надо понять, что $\Pi_{k=n}^{m} P(1 - P(A_k)) \to n \to \infty 0$

Прологарифмируем, и вспомним, что $\ln(1 - t) \leqslant t$.

$\ln(\Pi_{k=n}^{\infty}(1 - P(A_k))) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \leqslant -\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = -\infty$ □

Следствие закон 0 и 1. Если $A_1, A_2 \dots$ независимые в совокупности события, то или $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$.

***Определение* 2.4** (Случайная величина)**.** Обозначают как $\xi, \eta, \zeta \dots$

Это просто измеримая функция : $\Omega \to \mathbb{R}$

(далее с.в)

***Определение* 2.5** (Распределение случайной величины ξ)**.** $P_\xi(A) = P(\xi \in A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

$A \in \mathbb{R}$ – борелевское.

$P(\xi)$ – вероятностная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$. (упражнение – понять, что это одно и то же)

Замечание. Для определения меры на борелевской оболочке достаточно определить её на ячейках. На ячейках, в свою очередь, достаточно определить меру на лучах

***Определение* 2.6** (Функция распределения с.в. ξ)**.** $F_\xi(x) := P(\xi \leqslant x)$

Замечание. $P_x i((a, b]) = P(a < \xi \leqslant b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) \Rightarrow$ Функция распределения однозначно задаёт распределение с.в.

***Определение* 2.7.** Случайные величины ξ и η одинаково распределены, если $P_\xi = P_\eta$ (распределения одинаковы).

Замечание. Т.е. одинаковы их функции распределения.

Свойства.

1. $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1$

   $F_\xi = P(\xi \leqslant x)$

2. F_ξ не убывает

   Очевидно из строчки выше

3. $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$

   $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\xi \leqslant x_n)) = P(\varnothing) = 0$

   $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi \leqslant x_n)) = P(\Omega) = 1$

4. F_ξ непрерывна справа

   $\lim_{x_n \downarrow x} P(\xi \leqslant x_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}) = P(\xi \leqslant x)$

5. $F_{\xi+c}(x) = F_\xi(x - c)$

   $F_{\xi+c}(x) = P(\xi + c \leqslant x) = P(\xi \leqslant x - c) = F\xi(x - c)$

6. $F_{x\xi}(x) = F_x i(\frac{x}{c})$, $c > 0$

   $F_{c\xi}(x) = P(c\xi \leqslant x) = P(\xi \leqslant \frac{x}{c}) = F_\xi(\frac{x}{c})$

Замечание. Любая функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами с 2 по 4 – это функция распределения некоторой случайной величины.

***Определение* 2.8** (Дискретное распределение)**.** $\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \ldots\}$ – не более чем счётно. – дискретная случайная величина.

Замечание. Как устроена вероятность дискретного распредлеения?

$P_x i(\{x\}) = 0$, если $x \neq y_k$.

$P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \sum_{y_k \in A} P(\xi = y_k)$.

А функция распределения? Пусть $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots$, тогда функция устроена ступенечками, высоты которых – это вероятности $P(\xi = y_i)$ (TODOкартинка). Если не так, то там будут какие-то хаотические ступеньки.

Вывод: распределение полностью определяется величинами $P(\xi = y_k)$. $\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = y_k) = 1$.

***Определение* 2.9** (Непрерывное распределение)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_\xi(\{x\}) = 0$ т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(\xi = x) = 0$.

Замечание. $P(\xi = x) = P(\xi \leqslant x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim_{y \to x-} F_\xi(y)$

$lim_{y \to x-} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

т.е. непрерывное распределение = распределение, у которых функция распределения непрерывна

Пример Мерзкий пример – Канторова лестница. Иногда, несмотря на то, что распределение непрерывно, могут получаться весьма непривлекательные картинки. (TODOкартинка) Это некоторая функция распределения.

***Определение* 2.10** (Абсолютно непрерывное распределение)**.** Если существует $p_\xi(t)$ – измеримая функция т.ч. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)$

$p_\xi(t)$ – плотность распределения.

Свойства.

1. $P_\xi(A) = P(\xi \in A) = \int_A p_\xi(t)dt$

   $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t)dt$ верна на лучах $(-\infty, x]$. Значит верна на полуинтервалах (как на разнице лучей).

   Тогда по единственности продолжения меры на полуинтервалах, она верна на борелевских множествах.

2. $p_\xi \geqslant 0$ почти везде.

   $A := \{t : p_\xi(t) < 0\}$. Тогда из предыдущего свойства

   $P_\xi(A) = \int_{t: p_\xi(t) < 0} p_\xi(t)dt < 0$, если

   $P(p_\xi > 0)$

3. $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = 1$.

   $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) - \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 1 - 0 = 1$

   Или ещё можно доказать так: $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)dt = P_\xi(\mathbb{R}) = 1$

4. $p_\xi(t) = F'_\xi(t)$ при почти всех t.

   Если доказывали в теории меры, то см туда, если нет, то я её доказывать не буду.

14.03.2018

Пример вероятностных распределений.

1. Биномиальные распределения
   $\xi \sim Binom(n, p)$
   ($\sim$ – 'случайная величина с таким распределением')
   $0 < p < 1,\ n \in \mathbb{N}$
   $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ – число успехов в схеме Бернулли

2. Распределение Пуассона
   $\xi \sim Poisson(\lambda)$
   $\lambda > 0$
   $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

3. Геометрическое
   $\xi \sim Geom(p)$
   $0 < p < 1$
   $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$

4. Дискретное равномерное распределение
   $\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$
   $P(\xi = y_k) = 1/n$

5. Непрерывное равномерное распределение
   $\xi \sim U[a, b]$
   $P_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$

6. Нормальное распределение
   $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   $a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$
   $P_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}$

6'. Стандартное нормальное распределение
   $P_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2}$

Замечание. Если $\nu \sim \mathcal{N}$, то $\sigma\nu + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

***Определение* 2.11.**

$\Phi(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$
$\Phi(0) = 1/2$
$\Phi(\infty) = 1/2$
$\Phi_0(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$
при $x > 0$ $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$
при $x < 0$ $\Phi(x) = 1/2 - \Phi_0(-x)$

Пример (продолжение).

7. Экспоненциальное распределение
   $\xi \sim Exp(\lambda)$
   $P_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$

***Определение* 2.12** (Совместное (многомерное) распределение)**.**
$\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$
$P_{\overrightarrow{\xi}}(A) = P(\overrightarrow{\xi} \in A)$
Будем считать, что она задана на $\mathcal{B}^n$ – борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$

Замечание.
$P_{\overrightarrow{\xi}}$ определяет меры $P_{\xi_1}, P_{\xi_2}, \dots, P_{\xi_n}$
$P_{\xi_1}(B) = P_{\overrightarrow{\xi}}(B \times \mathbb{R}^{n-1})$
$B \subset \mathbb{R}$
Обратное неверно

Пример.
$\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \{0, 1\}$ с равными вероятностями.
Если подбрасывания независимы, то $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, то четыре равновероятных исхода.
Если $\xi_1 = \xi_2$, то два равновероятных исхода $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

***Определение* 2.13.**
Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, если
$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ борелевских события $\{\xi_1 \in A_1\}, \{\xi_2 \in A_2\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$ – независимы

Теорема 2.1.
$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимы $\Leftrightarrow P_{\overrightarrow{\xi}} = \bigotimes_{k=1}^n P_{\xi_k}$ (произведение мер)

Доказательство. $P_{\overrightarrow{\xi}}(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = P(\overrightarrow{\xi} \in A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) = (.) \prod_{k=1}^n P(\xi_k \in A_k) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(a_k)$ □

***Определение* 2.14** (Совместная (многомерная) функция распределения)**.** $F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \dots, \xi_n \leqslant x_n)$

***Определение* 2.15** (Совместная плотность распределения)**.** $p_{\overrightarrow{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т.ч. $F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(t_1, t_1, t_1, t_1,)dt_n dt_n dt_n dt_n$

(интеграл по n-мерной мере Лебега)

Следствие. $\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1$ – независимы $\Leftrightarrow F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, x_1, x_1, x_1) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_1}(x_1)$

Доказательство. "$\Rightarrow$" $P_{\overrightarrow{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \prod_{k=1}^n P_{\xi_k}(-\infty, x_k]$

"$\Leftarrow$" Функция распределения однозначно определяет меру на ячейках $\Rightarrow$ везде. □

Следствие. $\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1$ – абсолютно непрерывные с.в.
$\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_1$ – независимы $\Leftrightarrow p_{\overrightarrow{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = p_{\xi_1}(t_1)p_{\xi_2}(x_2)\dots p_{\xi_n}(x_n)$

***Определение* 2.16.** μ и ν – конечные меры на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$. Свёртка мер $(\mu * \nu)(A) :- \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x)d\nu(x)$

Свойства. 1. $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y)d\mu(y)d\nu(x)$

Доказательство. $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-x)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y)d\mu(y)\nu(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y+x)d\mu(y)\nu(x)$ □

2. $(\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1+\cdots+x_n)d\mu_1(x_1)\ldots\mu_n(x_n)$
3. $\mu * \nu = \nu * \mu$
4. $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$
5. $c\mu * \nu = c(\mu * \nu)$
6. $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$
7. δ_x – мера, состоящая из единичной нагрузки в точке x.
   $\mu * \delta_0 = \mu$

Доказательство. $(\delta_0 * \mu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A-x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)d\mu(x) = \mu(A)$ □

Теорема 2.2. Важный частный случай – мера с плотностями μ имеет плотность p_μ
ν имеет плотность p_ν
$\Rightarrow$ $\mu * \nu$ имеет плотность $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s)p_nu(s)ds$ – свёртка функций p_μ и p_ν

Доказательство. $(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)d\mu(x)d\nu(y)$
$=^? \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s)p_\nu(s)dsdt = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t)p\mu(t-s)p_\nu(s)dsdt =$
$u :- t - s$
$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u+s)p_\mu(u)p_\nu(s)duds$ □

Теорема 2.3 (о распределении суммы независимых с.в.)**.** ξ и η – независимые с.в. $\Rightarrow P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}$
$(\xi, \eta) \in B \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \xi + \eta \in A$
тут был график η от ξ – диагональка слева сверху вправо вниз ... $P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi+\eta \in A) = P((\xi,\eta) \in B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y)dP_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x,y)dP_\xi(x)dP_\eta(y)$ □

Пример. 1. Свёртка с дискретным распределением
$\nu = \sum p_k \delta_{x_k}$
$p_k > 0$
$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-x)d\nu(x) = \sum p_k \mu(A - x_k)$

2. $\xi_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ – независимы
$P_{\xi_2} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}\delta_k$
$P_{\xi_1+\xi_2}(\{n\}) = P_{\xi_1} * P_{\xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}\frac{\lambda_1^{n-k}e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}\frac{\lambda_1^{n-k}e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} = e^{-\lambda_1+\lambda_2} 1/n! \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda_2^k \lambda_1^{n-k}$
$\frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

Замечание. $P(\xi_1+\xi_2 = n) = \sum_{k=0}^n P(\xi_1 = k, \xi_2 = n-k) = \sum_{k=0}^n P(\xi_1 = k)P(\xi_2 = n-k)$ и подставить

Упражнение. 1. ξ_1 и $\xi_2 \sim Exp(1)$ найти распределение $\xi_1 + \xi_2$

2. $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

28.03.2018

Замечание. $E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_\xi(x)$

1) P_ξ – дискретная мера.

$\xi : \Omega \to \{y_1, y_2, \dots\}$

$E_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(\xi = y_k)$

2) P_ξ – абсолютно непрерывна, т.е. есть плотность $p_\xi(x)$

$E_\xi = \int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x) dx$

***Определение* 2.17.** Ковариация $E_{\xi^2} < +\infty$

$E_{\eta^2} < +\infty$

$cov(\xi, \eta) \coloneqq E((\xi - E_\xi)(\eta - E_\eta))$

Свойства. 1. $cov(\xi, \xi) = D_\xi$

2. $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta$

   Доказательство. $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta - \xi E_\eta - \eta E_\xi + E_\xi E_\eta) = E(\xi\eta) - E_\xi E_\eta - E_\eta E_\xi + E_\xi E_\eta$ □

3. Если ξ и η независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$

4. $cov(\xi_1 + \xi_2, \eta) = cov(\xi_1, \eta) + cov(\xi_2, \eta)$

   $cov(c\xi, \eta) = c \cdot cov(\xi, \eta)$

5. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$

6. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$

   $D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{i<k} cov(\xi_i, \xi_j)$

   Доказательство. Индукция.

   База $n = 2$.

   $D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (E\xi)^2 - 2E\xi E\eta - (E\eta)^2$

   Переход $n \to n + 1$

   $D(\sum_{k=1}^{n+1})\xi_k = D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k + \xi_{n+1}) = D(\sum^n \xi_k) + D\xi_{n+1} + 2cov(\sum^n \xi_k, \xi_{n+1}) = \sum^n D\xi_k + 2\sum_{i<k\leqslant n} cov(\xi_i, \xi_k)$
   $D\xi_{n+1} + 2cov(\sum^n \xi_k, \xi_{n+1})$ □

Замечание. $cov(\xi, \eta) = 0 \not\Rightarrow \xi$ и η независимы.

$\xi(w) = \cos(w)$

$\eta(w) = \sin(w)$

$\Omega = \{0, \pi/2, \pi\}$

$E\xi = \frac{\cos 0 + \cos \pi/2 + \cos \pi}{3} = 0$

$\xi\eta \equiv 0 \Rightarrow E(\xi\eta) = 0$

$E\xi E\eta = 0 \Rightarrow cov(\xi, \eta) = 0$

Но нет независимости:

$\frac{1}{3}\frac{1}{3} = P(\xi = 1)P(\eta = 1) \neq P(\xi = 1, \eta = 1) = 0$

***Определение* 2.18.** Коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta) \coloneqq \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \in [-1, 1]$

$|E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \leqslant \sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\sqrt{E(\eta - E\eta)^2}$

Случайные величины коррелируют, если $cov(\xi, \eta) = 0$

Замечание. Рассмотрим $E\xi^2 < +\infty$

$\langle \xi, \eta \rangle \coloneqq cov(\xi, \eta)$

$\sqrt{D\xi}$ – норма в таком пространстве (называется стандартным отклонением $\sigma(\xi)$)

Пример. $\Omega \coloneqq \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$\nu(k) \coloneqq$ количество различных простых в разложении k

Теорема 2.4. Харди-Рамануджана

$\omega(n) \to +\infty$

Тогда $P(|\nu(k) - \ln\ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln\ln n}) \to 0$ при $n \to +\infty$

Доказательство. Туран, 1935 $\xi_p(k) = \begin{cases} 1, \text{ если } p | k \\ 0, \text{ если } p \nmid k \end{cases}$

$M \coloneqq \sqrt[10]{n}$

$\xi \coloneqq \sum_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant M} \xi_p$

$0 \leqslant \nu(k) - \xi(k) \leqslant 10$

$P(|\xi - \ln\ln n| > \omega(n)\sqrt{\ln\ln n}) \to 0$

$E\xi = \sum_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant M} E\xi_p = \sum_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant M} 1/p + (M/n) = \ln\ln M + (1) = \ln\ln n + (1)$

$E\xi_p = \frac{[n/p]}{n} = \frac{n/p + (1)}{n} = 1/p + (1/p)$

$D\xi = \sum_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant M} D\xi_p + 2\sum_{p, q \in \mathbb{P},\ p < q \leqslant M} cov(\xi_p, \xi_q)$

$D\xi_p = E\xi_p^2 - (E\xi_p)^2 = E\xi_p - (E\xi_p)^2 = 1/p + (1/n) - 1/p^2 + (1/n)$

$cov(\xi_p, \xi_q) = E(\xi_p\xi_q) - E\xi_p E_{\xi_q} = \frac{[\frac{n}{pq}]}{n} - \frac{[n/p]}{n}\frac{[n/q]}{n}$

$cov(\xi_p, \xi_q) \geqslant \frac{\frac{n}{pq} - 1}{n} - \frac{n/p}{n} - \frac{n/q}{n} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\frac{1}{q} = -\frac{1}{n}$

$1 \sum cov(\xi_p, \xi_q) \geqslant M^2\frac{1}{n} = (1)$

$cov(\xi_p, \xi_q) \leqslant \frac{\frac{n}{pq}}{n} - \frac{(\frac{n}{p} - 1)(\frac{n}{q} - 1)}{n^2} =$

...

Неравенство Чебышёва

$P(|\xi - E\xi| \geqslant \lambda\sqrt{D\xi}) \leqslant \frac{D\xi}{(\lambda\sqrt{D\xi})^2} = 1/\lambda^2$

$E\xi = \ln\ln + (1)$

$\sqrt{D\xi} = \sqrt{\ln\ln} + (1)$

□

***Определение* 2.19.** k-й момент $E\xi^k$ – k-й момент случайной величины ξ

$E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_\xi(x)$

***Определение* 2.20.** $E|\xi - E\xi|^k$ – k-й центральный момент

$D\xi$ – второй центральный момент

2.2. Сходимость случайных величин и закон больших чисел

***Определение* 2.21.** $\xi_n, \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

1. ξ_n сходится к ξ почти наверное (= с вероятностью 1), если $P(\omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$

2. ξ_n сходится к ξ в среднем порядка $r > 0$, если $E|\xi_n - \xi|^r \to 0$ при $n \to \infty$

3. ξ_n сходится к ξ по вероятности

$\forall \varepsilon > 0\ P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

4. ξ_n сходится к ξ по распределению

$F_(\xi_n)$ сходится к F_ξ во всех точках непрерывности F_ξ. ($\sim$ теорема Муавра-Лапласа)

Замечание. Связь между сходимостями

$1 \Rightarrow 3$ теорема Лебега ($3 \not\Rightarrow 1$ был пример)

$2 \Rightarrow 3$

$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^r > \varepsilon^r) \leqslant \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \to 0$

$1 \not\Rightarrow 2$ (а значит, и $3 \not\Rightarrow 2$)

$\Omega = [0, 1]$

$\xi_n = n^{1/r}\mathbb{1}_{[0,1/n]} \to \xi \equiv 0$ сходится почти наверное

Но $E\xi_n^r = E(n\mathbb{1}_{[0,1/n]}) = 1 \not\to 0$

$2 \not\Rightarrow 1$ (а значит $3 \not\Rightarrow 1$)

Контрпример: $\xi_{n,k} \coloneqq \mathbb{1}_{[k/n,(k+1)/n]}$

$E\xi_{n,k}^r = 1/n^r \to 0$

$3 \Rightarrow 4$

Пусть F_ξ непрерывна в точке x.

$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

$\{\xi_n > x\} \supset \{\xi > x + \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi < \varepsilon|\}$

$P(\xi_n > x) \geqslant P(\dots)$

$\{\xi_n \leqslant x\} \subset \{\xi \leqslant x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$

$F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x + \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x_\varepsilon) + \varlimsup\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = F_\xi(x_\varepsilon)$

$\{\xi_n \leqslant x\} \supset \{\xi \leqslant x - \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$

$\{\xi_n > x\} \subset \{\xi > x - \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$

$1 - F_{\xi_n}(x) \leqslant 1 - F_\xi(x - \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x - \varepsilon) - P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$

$\varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x - \varepsilon)$

$F_\xi(x + \varepsilon) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x - \varepsilon) \to F_\xi(x)$

$F_\xi(x + \varepsilon) \to F_\xi(x)$ при $\varepsilon \to 0$

$4 \not\Rightarrow 3$ Некорректна такая постановка вопроса